

УДК 532.516.5:536.33

© 1992 г. С. В. РУСАКОВ, О. Л. РУСАКОВА, Е. Л. ТАРУНИН

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ НА КОНВЕКЦИЮ ГАЗА ПРИ ПОДОГРЕВЕ СНИЗУ

Задачи естественной конвекции дают много примеров ветвления решений [1]. Чаще всего такие ветвления (с точки зрения теории катастроф) описываются складкой или сборкой Уитни. Характерной чертой нетривиального ветвления является наличие какого-либо малого, но конечного нарушения условий конвективного равновесия. В данной работе возмущением, нарушающим конвективное равновесие жидкости, подогреваемой снизу, является теплообмен излучением по закону Стефана между границами замкнутой области. Ранее естественная конвекция с учетом теплообмена излучением при подогреве сбоку исследовалась в [2].

1. Рассматривается задача о подогреве снизу прозрачного газа в параллелепипеде бесконечной длины (с горизонтальными поверхностями S_0 , S_1 и вертикальными — S_2 , S_3), описываемая уравнениями естественной конвекции в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{V} - g\beta T$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla) T = \lambda \Delta T$$

Граничные условия для вектора скорости — условия прилипания, температура поверхностей S_0 и S_1 постоянна

$$\mathbf{V}|_{\Gamma} = 0, T|_{S_0} = T_0, T|_{S_1} = T_1, T_1 > T_0$$

Специфика решаемой задачи состоит в постановке граничных условий на боковых поверхностях S_2 и S_3 . Воспользуемся моделью теплообмена излучением «черных» поверхностей, которые только излучают и поглощают (но не отражают) тепло [3]. Полагая, что степень черноты и поглощательная способность всех поверхностей S_l , $l = 0, 1, 2, 3$, равны между собой, можно записать локальное значение плотности потока результирующего излучения элементарной площадки $S_i^{(l)} \in S_l$ в виде

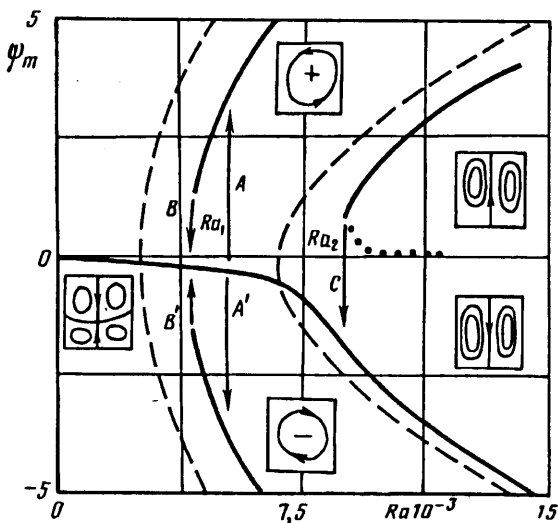
$$q(S_i^{(l)}) = \varepsilon \sigma \left[T^4(S_i^{(l)}) - \sum_{j=0}^3 \int_{S_j} K(r_i^{(l)}, r^{(j)}) T^4(S_j) dS_j^{(l)} \right]$$

где σ — постоянная Стефана, ε — степень черноты, функция $K(r_i^{(l)}, r^{(j)})$ зависит от положения и ориентации излучающих поверхностей.

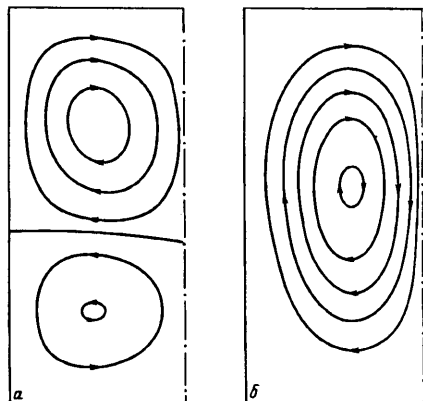
Полагая, что поверхность S_2 извне теплоизолирована, получим следующее граничное условие:

$$\lambda \frac{\partial T(S_2)}{\partial x} - \sigma \varepsilon \left\{ T^4(S_2) - T_0^4 \int_{S_0} K(r_0, r_2) dS_0 - \right.$$

$$\left. - T_1^4 \int_{S_1} K(r_1, r_2) dS_1 - \int_{S_3} K(r_3, r_2) T^4(S_3) dS_3 \right\} = 0$$



Фиг. 1



Фиг. 2

На поверхности S_3 граничное условие ставится аналогично. При использовании в качестве характерного линейного размера высоты H и безразмерной температуры $\theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ граничное условие (1.4) запишется следующим образом:

$$\eta_1 \frac{\partial \theta(S_2)}{\partial x} - \text{Rd} \left\{ [1 + \eta_1 \theta(S_2)]^4 - \int_{S_0} K(r_0, r_2) dS_0 - \right. \quad (1.5)$$

$$\left. - \eta_0^4 \int_{S_1} K(r_1, r_2) dS_1 - \int_{S_3} K(r_3, r_2) [1 + \eta_1 \theta(S_3)]^4 dS_3 \right\} = 0$$

$$\eta_0 = \frac{T_1}{T_0}, \quad \eta_1 = \eta_0 - 1, \quad \text{Rd} = \frac{\sigma \epsilon H T_0^3}{\lambda}$$

После обезразмеривания и перехода к функции тока ψ и вихрю скорости φ система уравнения (1.1) и граничные условия (1.2) примут вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Delta \varphi + G \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.6)$$

$$\Delta \psi + \varphi = 0 \quad (1.7)$$

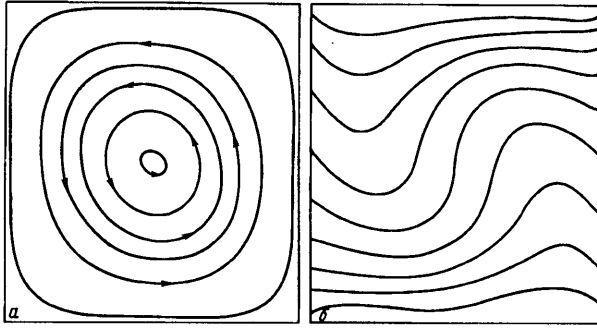
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T$$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi = (\text{rot} \mathbf{V})_z$$

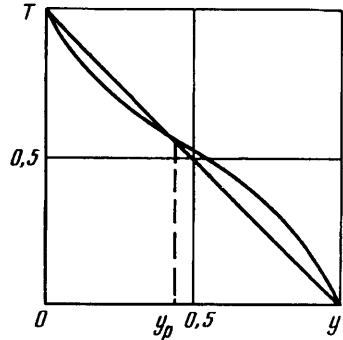
$$\psi|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad T|_{S_0} = 0, \quad T|_{S_1} = 1 \quad (1.8)$$

В систему (1.6)–(1.7) входят два безразмерных параметра — число Грасгофа G и число Прандтля $\text{Pr} = \nu/\lambda$. В целом (с учетом параметров, входящих в граничное условие (1.5)) решение задачи зависит от четырех безразмерных параметров: G , Pr , η_0 и Rd .

Сформулированная задача решалась отдельным вариантом двухполюсного метода. Уравнения движения и энергии решались методом продольно-поперечной прогонки с использованием неявной разностной схемы, основанной на параболических сплайнах с погрешностью аппроксимации $O(h^2)$. Уравнение Пуассона решалось итерационным методом продольно-поперечной прогонки. Функция



Фиг. 3



Фиг. 4

тока приближалась дискретным кубическим сплайном, что обеспечивало аппроксимацию $O(h^3)$. Значение вихря скорости на границах определялось по формуле Вудса с нижней релаксацией. Подробно эта методика изложена в [4].

2. Особенностью выбранной задачи является наличие равновесного решения $\psi^0(x, y) = 0$, $T^0(x, y) = 1 - y$ при $Rd = 0$ (отсутствие теплообмена излучением). Равновесное решение теряет устойчивость при превышении числом Рэлея критических значений $Ra_j = PrG_j$ ($j = 1, 2, \dots$). Надкритические режимы течения, возникающие после потери устойчивости равновесного решения, неоднократно исследовались методом сеток [1]. Учет теплообмена излучением приводит к нарушению условий равновесия и при любых значениях числа Рэлея существует конвективное течение.

Перейдем к обсуждению результатов расчетов. Основные вычисления выполнялись при фиксированных значениях $Pr = 0,7$ (воздух), отношения сторон $L/H = 1$ (квадратная область), $\eta_0 = T_1/T_0 = 1,1$; $Rd = 0; 1; 10; 100$. Шаг разностной сетки равнялся $h = 1/20$.

На фиг. 1 представлена полная картина бифуркаций ($Rd = 1$ и $\eta_0 = 1,1$ — сплошная линия, $Rd = 0$ — штриховая). На этом же рисунке качественно изображены и реализуемые картины течений. Стрелками A и A' показан возможный переход от структуры с четным числом вихрей к одновихревым структурам, а стрелки B и B' соответствуют обратному процессу. Таким образом, в окрестности Ra_1 наблюдается явление гистерезиса. Переход с верхней ветви двухвихревой структуры на нижнюю обозначен стрелкой C .

На фиг. 2 изображены линии тока $Rd = 1$, $\eta_0 = 1,1$. На фиг. 2, *a*: $G = 100$, $\psi_m^+ = 0,0008$, $\psi_m^- = -0,0014$ — четырехвихревое течение; на фиг. 2, *б*: $G = 11000$, $\psi_m = -1,034$ — двухвихревое течение. На фиг. 3 для $Rd = 1$, $\eta_0 = 1,1$, $G = 10^4$, $\psi_m = 5,7095$ представлены линии тока (фиг. 3, *a*) и изотермы (3, *б*) в случае одновихревого течения.

Результаты, изображенные на фиг. 3, *a* и *б*, получены с учетом симметрии относительно вертикали $x = 1/2$.

Остановимся подробнее на различных типах течения, реализующихся в зависимости от параметров задачи. В режиме ползущего течения ($G = 1$) параметры задачи варьировались в следующих пределах:

$$\eta_0 = 1 + 2^k \cdot 10^{-2} \quad (k = 0, 4), \quad Rd = 0,1 \div 100$$

При малых числах Рэлея ($Ra < 1000$) возникает четырехвихревое течение, симметричное относительно вертикали $x = 1/2$. Характер этого течения (в половине области) изображен на фиг. 2, *a*. Возникновение столь сложной вихревой структуры можно объяснить распределением температурного поля вблизи вертикальной границы. Распределение температуры на границе $x = 0$ представлено на фиг. 4.

Для сравнения штриховая линия показывает линейное распределение температуры, которое соответствует случаю $Rd = 0$.

Были исследованы геометрические и интегральные характеристики возникающего течения. К геометрическим характеристикам относились координаты точки отрыва вихрей y_0 ($\varphi(0, y_0) = 0$), смены знака градиента температуры y_c ($\partial T(0, y_c)/\partial x = 0$) и пересечения профиля температуры с равновесным решением y_p ($T(0, y_p) = 1 - y_p$). В качестве интегральных характеристик рассматривались

$$\psi_m^- = \min_{x \leq l/2} \psi(x, y), \quad \psi_m^+ = \max_{x \leq l/2} \psi(x, y)$$

$$Nu_l^{(k)} = \int_0^l \frac{\partial T(x, l)}{\partial n} dx \quad (l = 0, 1)$$

$$T(x, y) = 1 + \eta_l \theta(x, y)$$

Для записи полученных зависимостей в компактном виде введем функции

$$F_1(a, b) = \frac{aRd}{1 + bRd}, \quad F_2(a, b, c) = a \frac{1 + bRd}{1 + cRd}$$

Обработка результатов расчетов методом наименьших квадратов позволила получить следующие зависимости:

$$y_0 = 0,5 - 0,54\eta_1, \quad y_c = 0,5 - 0,41\eta_1, \quad y_p = 0,5 - 0,62\eta_1$$

$$\psi_m^\pm = \pm F_1(A(\eta_1), B(\eta_1)) G \cdot 10^{-6} \quad (2.1)$$

$$Nu_l^{(k)} = F_2((-1)^k, A(\eta_1), B(\eta_1))$$

$$A(\eta_1) = a_1\eta_1 + a_0, \quad B(\eta_1) = b_1\eta_1 + b_0$$

Значения соответствующих коэффициентов a_i и b_i ($i = 0, 1$) приведены в табл. 1.

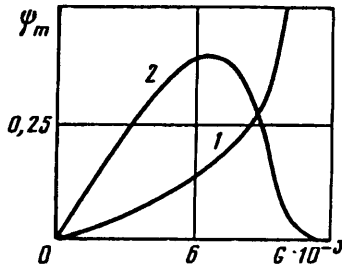
Таблица 1

	a_0	a_1	b_0	b_1
ψ_m^-	16	91	0,62	1,2
ψ_m^+	16	-30	0,63	0,24
$Nu_0^{(k)}$	0,53	1,4	0,23	0,36
$Nu_l^{(k)}$	0,54	0,51	0,23	0,44

Отметим свойства характеристик «ползущего течения». Функциями числа Грасгофа являются только величины ψ_m^\pm , зависящие от него линейно. Величины y_0 , y_c , y_p не зависят от параметра Rd , а все рассмотренные интегральные характеристики описываются дробно-рациональными зависимостями от параметра Rd с характерным эффектом насыщения. Параметр η_1 характеризует асимметрию между течением в верхней и нижней частях области (при $\eta_1 = 0$ соответствующие интегральные величины практически совпадают).

На фиг 5 изображена зависимость амплитуд ψ_m^\pm от числа G ($\eta_0 = 1,1$, $Rd = 1$). Кривая 1 соответствует $|\psi_m^-|$, а 2 — $10\psi_m^+$. Интенсивность обоих вихрей до значения $G \approx 6500$ растет; а в дальнейшем интенсивность нижнего вихря уменьшается до нуля и четырехвихревая структура переходит в двухвихревую (характерная картина течения представлена на фиг. 2, а).

Вблизи критических чисел Рэлея появляется возможность существования нескольких режимов течения. В области $Ra > Ra_2$ (см. фиг. 1) существуют две



Фиг. 5

ветви устойчивых течений (сплошные линии) и одна неустойчивая (пунктирная линия). Нижняя ветвь является «предпочтительной». Выход на противоположную, устойчивую, ветвь требует задания начальных условий специального вида. В окрестности $Ra = Ra_2$ ветвление экстремального значения функции тока хорошо описывается кубическим уравнением ($Ra = GPr$)

$$\psi_m^3 - C_1(Rd)(G - G_*(Rd))\psi_m + C_2(Rd) = 0 \quad (2.2)$$

$$G_*(Rd) = F_2(10^4; 1,4; 1,1), \quad C_1(Rd) = F_2(2,4 \cdot 10^{-3}; 0,34; 0,46)$$

$$C_2(Rd) = F_1(2,1; 0,52)$$

При числах Рэлея, много больших Ra_2 , максимальное значение функции тока хорошо описывается законом

$$\psi_m^\pm = A(Rd) \sqrt{G - G_{**}} \quad (2.3)$$

$$A(Rd) = E_2(a \cdot 10^{-2}, b, c), \quad G_{**}(Rd) = F_2(a \cdot 10^4, b, c)$$

Значения коэффициентов a , b и c приведены в табл. 2. Выводы о характере ветвления вблизи Ra_2 получены при условии симметрии течения относительно

Таблица 2

	A			G _{**}			Тип течения
	a	b	c	a	b	c	
ψ_m^+	4,9	0,35	0,41	1,0	1,3	0,94	Двухвихревое *
ψ_m^-	4,9	0,31	0,36	1,0	2,8	2,3	
ψ_m^\pm	9,5	0,70	0,85	0,38	2,1	1,0	Одновихревое

вертикали $x = 1/2$. При решении задачи в полной области (без учета симметрии) конечные возмущения могут привести к переходу от течения с четным количеством вихрей к одновихревой структуре. Значение величины ψ_m для одновихревого течения хорошо описывается корневым законом (2.3), соответствующие значения коэффициентов, входящих в формулы, приведены в табл. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарунин Е. Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
2. Варпаев В. Н. Конвекция и теплообмен в вертикальном слое с учетом излучения неизотермических стенок // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 25—30.
3. Спэрроу Э. М., Сесс Р. Д. Теплообмен излучением. Л.: Энергия, 1971. 294 с.
4. Русаков С. В. Разностные сплайн-схемы для задач тепло- и массопереноса. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 123 с.

Пермь

Поступила в редакцию
3.VII.1991