

УДК 532.5.013.4 + 537.84

© 1992 г. И. М. РУТКЕВИЧ

НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ АКУСТИЧЕСКИ АКТИВНЫХ СРЕД*

Акустические процессы, сопровождающие движения газов в разнообразных технических устройствах, в лабораторных и природных условиях вызывают растущее внимание исследователей в области механики и ее приложений. Одной из наиболее интересных и важных особенностей распространения звука в неоднородной движущейся среде является сочетание эффектов рефракции и усиления бегущих звуковых волн. Если усиление волны в среде может проявляться в пространственно однородном течении или в состоянии покоя, то такую среду будем называть акустически активной.

Примерами акустически активных сред могут служить слабоионизованная плазма с протекающим по ней электрическим током [1—3], многокомпонентные химически реагирующие смеси [4, 5], светопоглощающие среды [6, 7], пьезополупроводники [8]. Во всех перечисленных случаях акустическая активность среды обусловлена положительной обратной связью между возмущениями динамических параметров среды, создаваемыми звуковой волной, и возмущениями объемных воздействий — распределенных внешних сил и источников тепла. Положительная обратная связь возникает, когда объемные воздействия зависят от параметров среды и модулируются волной с таким сдвигом по фазе, который способствует усилению начальной флуктуации. Так, в слабоионизованной плазме механизмы усиления звука обусловлены зависимостями компонент тензора электропроводности от температуры и давления. В химически реагирующих смесях аналогичную роль играют скорости реакций, а в светопоглощающих средах — зависимость коэффициента поглощения от параметров среды.

Обычный идеальный газ с уравнением состояния, удовлетворяющим известным из термодинамики требованиям устойчивости локального термодинамического равновесия, не обладает акустической активностью в указанном выше смысле. Вместе с тем даже в отсутствие внешних сил и источников тепла в неоднородных течениях такого газа звук может усиливаться. Это приводит к неустойчивости определенных классов газодинамических течений в соплах и каналах переменного сечения при наличии ударных волн (соответствующие примеры имеются в литературе [9—12]). Данное обстоятельство необходимо принимать во внимание при рассмотрении усиления звука в устройствах с активной движущейся рабочей средой, где влияние стационарных градиентов на усиление или ослабление звука может оказаться решающим. Такая ситуация характерна для течений слабоионизованной плазмы в профилированных каналах крупномасштабных МГД-генераторов [13, 14].

Существование усиливаемых волн в физической системе с распределенными параметрами, ограниченной в пространстве, указывает на потенциальную возможность самовозбуждения незатухающих колебаний [15]. Такие колебания часто возникают при мягком режиме потери устойчивости стационарного состояния ограниченной системы. В условиях краевой задачи само по себе наличие усиления какой-либо из волн не является достаточным условием потери устойчивости. Усиленная волна, достигнув границы среды, может трансформироваться в отраженную волну встречного направления, характеризующуюся пространственным затуханием. Если это затухание компенсирует эффект усиления первичной волны, то собственная мода, образуемая вследствие интерференции встречных волн, не будет нарастать во времени.

* По материалам доклада, прочитанного на секции механики жидкости и газа VII съезда по теоретической и прикладной механике, Москва, август 1991 г.

Для систем с «активными» границами, при отражении от которых происходит увеличение амплитуды волны, объемное усиление какой-либо из волн, вообще говоря, не является необходимым для возникновения неустойчивости. Пример неустойчивой системы такого типа рассмотрен в [16] в связи с проблемой самовозбуждения резонатора типа свистка или органной трубы, помещенной открытым концом в сдвиговый поток газа, скорость которого лежит в плоскости среза трубы, играющей роль активной границы. Активные свойства отражающей поверхности могут проявляться и в других ситуациях, например при падении звуковой волны на границу области, занятой неравновесно возбужденным газом [17].

Спонтанная генерация звуковых колебаний в газах и плазме зафиксирована во многих экспериментах. Так, еще Рэлей дал описание явления «поющего пламени» — самовозбуждения звука при подводе тепла от газовой горелки к открытому резонатору [18]. Возбуждение акустических колебаний многократно наблюдалось в камерах сгорания, где подвод тепла осуществляется за счет экзотермической реакции [4]. Спонтанное возбуждение звука в плазме с протекающим по ней электрическим током наблюдалось в газоразрядных устройствах [19, 20], при течении плазмы в МГД-каналах [21, 22].

Получение аналитических критериев устойчивости неоднородного течения акустически активной среды весьма сложно даже в одномерном случае. Более изучен вопрос о достаточных условиях неустойчивости, так как здесь можно ограничиться рассмотрением возмущений определенного вида, например коротковолновых. Такие возмущения могут быть рассчитаны асимптотическими методами типа ВКБ-приближения, применяемого в задачах квантовой механики [23], или методом геометрической акустики, изложенным в [24] применительно к распространению звука в неоднородном движущемся газе в отсутствие внешних объемных воздействий. Использование асимптотических методов позволяет учесть два важных фактора, осложняющих анализ устойчивости неоднородных течений. Первый из них состоит в том, что области локального усиления и ослабления волны могут чередоваться в пространстве. Второй фактор связан с рефракцией звуковых лучей в неоднородной среде, вследствие которой в дозвуковом потоке могут возникать области, недоступные для бегущей волны фиксированной частоты. Волна испытывает практически полное отражение от границы области непроникновения, представляющей собой огибающую семейства лучей (каустику).

Ниже дан обзор аналитических методов и результатов исследований акустической неустойчивости неоднородных стационарных течений в каналах. Рассмотрение проводится на основе системы уравнений, описывающей движения электропроводного газа при малых магнитных числах Рейнольдса [25]. Это позволяет в рамках единого подхода рассмотреть акустические явления в потоках плазмы и непроводящего газа.

1. Основные задачи линейной теории. Рассмотрим малые нестационарные возмущения, наложенные на стационарное течение электропроводного газа. Будем предполагать, что характерное время изменения возмущений t , и их характерный пространственный масштаб l , удовлетворяют условиям

$$\text{Re}_m^* = \mu_0 \sigma l^2 / t, \ll 1, \quad t_s \gg \{\epsilon_0(1 + \beta^2) / \sigma, \quad l / c\} \quad (1.1)$$

где σ и β — невозмущенные значения электропроводности и параметра Холла, μ_0 и ϵ_0 — магнитная и электрическая постоянные, $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ — скорость света. Предположим также, что плотность газа достаточно высока, чтобы при имеющейся интенсивности джоулева тепловыделения можно было пренебречь отличием температуры электронов от температуры тяжелых частиц и использовать уравнения одножидкостной магнитной газодинамики. Выполнение условий (1.1) позволяет считать возмущение электрического поля потенциальным, а также пренебречь током смещения и возмущением магнитной индукции в линеаризованных уравнениях. Предположим также выполнение неравенств $\text{Re}^* = l^2 / (\nu t_s) \gg 1$, $\text{Pe}^* = l^2 / (\chi t_s) \gg 1$ где ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность плазмы, позволяющих пренебречь возмущениями тензора вязких напряжений и вектора потока тепла в линеаризованных уравнениях магнитной газодинамики.

Сделанные допущения приводят к следующей системе уравнений относительно возмущений:

$$\frac{d\rho'}{dt} + \mathbf{V}' \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V}' + \rho' \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}'}{dt} + \rho (\mathbf{V}' \nabla) \mathbf{V} + \rho' (\nabla \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p' + \mathbf{j}' \times \mathbf{B} \quad (1.3)$$

$$\rho T \frac{dS'}{dt} + [(\rho' T + \rho T') \mathbf{V} + \rho T \mathbf{V}'] \nabla S = \frac{2\mathbf{j}\mathbf{j}'}{\sigma} - \frac{j^2}{\sigma^2} \sigma' + Q' \quad (1.4)$$

$$\mathbf{E}' = -\nabla \varphi', \quad \operatorname{div} \mathbf{j}' = 0 \quad (1.5)$$

$$\mathbf{j}' + \mathbf{j}' \times \vec{\beta}' + \mathbf{j} \times \vec{\beta}' = \frac{\sigma'}{\sigma} (\mathbf{j} + \mathbf{j} \times \vec{\beta}') + \sigma (\mathbf{E}' + \mathbf{V}' \times \mathbf{B})^*$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla, \quad \vec{\beta}' = \frac{\beta \mathbf{B}}{B} \quad (1.6)$$

Здесь штрихами отмечены возмущения, величины без штрихов — параметры основного состояния: ρ — плотность газа, p — давление, T — температура, S — энтропия единицы массы, \mathbf{V} — скорость, \mathbf{j} — плотность электрического тока, \mathbf{B} — магнитная индукция, \mathbf{E} — электрическое поле. В (1.4) включен объемный источник Q' , описывающий флуктуацию тепловыделения, отличного от джоулева (например, за счет химических реакций или поглощения лазерного излучения). Возмущения ρ' и T' , а также величины σ' , β' и Q' представляются в виде линейных комбинаций возмущений p' и S' , после чего система (1.2)—(1.6) становится замкнутой.

Введем вектор-столбец газодинамических возмущений $\mathbf{f} = (p', \rho a V_x', \rho a V_y', \rho a V_z', \rho T S')$, где a — скорость звука. При таком определении вектора \mathbf{f} его компоненты имеют одинаковую размерность. Систему уравнений (1.2)—(1.6) можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + A_k(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k} + C(\mathbf{r}) \mathbf{f} + \mathbf{g}_k(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi'}{\partial x_k} = 0 \quad (1.7)$$

$$\sigma_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x_i \partial x_k} + \kappa_i(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i} + \mu_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \nu_i(\mathbf{r}) f_i = 0 \quad (1.8)$$

Здесь A_k и C — матрицы, а по повторяющимся индексам проведено суммирование. Уравнение (1.8) для возмущения электрического потенциала является следствием электродинамических уравнений (1.5), (1.6). Коэффициенты уравнений (1.7), (1.8) выражаются через распределения параметров стационарного течения. Подсистема (1.7) имеет гиперболический тип, причем ее характеристики в пространстве переменных (\mathbf{r}, t) определяются теми же соотношениями, что и характеристики линеаризованных уравнений газовой динамики. Уравнение (1.8) эллиплично по пространственным координатам, так как величины σ_{ik} являются компонентами положительно определенной симметричной части тензора проводимости. Эти общие свойства уравнений (1.7), (1.8) необходимо принимать во внимание при постановке начально-краевых задач.

Постановка любой начально-краевой задачи для ограниченной области D предполагает задание при $t=0$ вектора газодинамических возмущений:

$$\mathbf{f} |_{t=0} = \mathbf{f}_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D \quad (1.9)$$

а также граничных условий для \mathbf{f} и φ' , вид которых зависит от физических свойств стенок, а на открытых концах канала — от характера основного течения (до- или сверхзвуковое). Линейные граничные условия для вектора $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}, \varphi'\}$ запишем в символической форме

$$L[\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)] = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (1.10)$$

* Здесь и далее для векторов, обозначенных греческими буквами, используются эти же буквы со стелкой сверху.

Здесь L — некоторый линейный оператор с коэффициентами, не зависящими от времени, а J — вектор внешних воздействий, заданный на границе области ∂D . В случае безграничной среды ставится задача Коши с начальным распределением (1.9), ограниченным при $|r| \rightarrow \infty$. При этом краевые условия (1.10) заменяются требованием ограниченности $|\nabla\varphi'(r, t)|$ при $|r| \rightarrow \infty$.

В силу линейности сформулированной задачи ее решение можно представить в виде суммы $F = F_e + F_i$, где $F_e = \{f_e, \varphi_e'\}$ и $F_i = \{f_i, \varphi_i'\}$ — решения, удовлетворяющие условиям

$$f_e|_{r=0} = 0, L[F_e] = J; f_i|_{r=0} = f_0(r), L[F_i] = 0 \quad (1.11)$$

Такое представление решения соответствует его разбиению на вынужденную F_e и собственную F_i составляющие. При $J = J^*(r) \exp(-i\omega t)$ решение F_e описывает волны, возбуждаемые граничным воздействием заданной частоты ω . Определение решения F_i , описывающего эволюцию начального возмущения в отсутствие граничного воздействия J , по существу представляет собой общую задачу теории устойчивости. Для обширного класса начальных распределений асимптотическое поведение F_i при больших значениях t можно представить в виде разложения по собственным модам

$$F_i \sim \sum_i F_i^*(r; \omega_i) e^{-\omega_i t} \quad (1.12)$$

где ω_i — собственные комплексные частоты, а F_i^* — собственные векторные функции, определяемые из решения спектральной задачи. Последняя состоит в отыскании решений системы (1.7), (1.8), представляющих отдельные члены ряда (1.12) и удовлетворяющих однородным граничным условиям $L[F_i^*] = 0$. Очевидно, что неустойчивость имеет место, если существует собственная мода с $\text{Im } \omega_i > 0$.

2. Локальный анализ возмущений. В ранних работах по акустической неустойчивости плазменных течений получил распространение подход, основанный на методе «замороженных» коэффициентов (см., например, обзор [2] и библиографию в нем). Этот подход дает приближенное описание коротковолновых возмущений в малой окрестности произвольной точки пространства r_0 . Суть метода замороженных коэффициентов состоит в том, что в рассматриваемой окрестности уравнения (1.7), (1.8) заменяются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами, равными значениям коэффициентов исходной системы уравнений при $r = r_0$. Полученные таким путем уравнения допускают экспоненциальные решения вида $F = A(r_0) \exp i(kx - \omega t)$ с постоянным волновым вектором k . Условие существования таких решений приводит к локальному дисперсионному уравнению

$$\Delta(\omega, k, r_0) = 0 \quad (2.1)$$

Левая часть в (2.1) представляет собой полином пятой степени относительно ω с коэффициентами, являющимися полиномами от k и зависящими от r_0 как от параметра. При заданном k уравнение (2.1) имеет пять комплексных корней $\omega^{(j)}(k) = \omega_r^{(j)} + i\omega_i^{(j)}$, которым соответствуют различные распространяющиеся волны. Можно рассчитать корни уравнения (2.1) методом малого параметра [2, 26], в качестве которого используется величина

$$\varepsilon = 1/(|k|l) \ll 1 \quad (2.2)$$

Здесь $l = \min\{l_1, l_2\}$, где l_1 — характерный пространственный масштаб неоднородности основного течения, а $l_2 = \rho a / (\sigma B^2)$ — длина релаксации акустического возмущения, распространяющегося со скоростью звука a в однородном проводящем газе. В векторном уравнении (1.7) член Cf описывает эффекты, обусловленные наличием стационарных градиентов, а также возмущения объемных воздействий, за исключением той их части, которая содержит возмущения электрического поля. Последняя представлена в (1.7) группой членов $g_k \partial \rho' / \partial x_k$. При $\varepsilon = 0$

(1.7) следует принять $C=0$, $g_k=0$, что соответствует рассмотрению волн в однородном потоке в отсутствие внешних воздействий. Корни уравнения (2.1), обозначаемые ниже как $\omega_0^{(j)}$, имеют вид

$$\omega_0^{(1,2)} = V_k \pm ak, \omega_0^{(3)} = \omega_0^{(4)} = \omega_0^{(5)} = V_k \quad (\varepsilon = 0) \quad (2.3)$$

В случае комплексного волнового вектора k скаляр k в (2.3) определяется по формуле $k = (k \cdot k)^{1/2} = (k_r^2 - k_i^2 + 2ik_r k_i)^{1/2}$. Корни $\omega_0^{(1,2)}$ соответствуют акустическим волнам, распространяющимся относительно движущейся среды в любом направлении k со скоростями $\pm a$. Кратные корни $\omega_0^{(3,4,5)}$ соответствуют энтропийным и вихревым волнам, движущимся вместе с потоком газа. Наличие простых корней $\omega_0^{(1,2)}$ позволяет описывать акустические волны независимо от энтропийно-вихревых возмущений в случае $\varepsilon \ll 1$. Заметим, что малость параметра $1/(|k|l_1)$ необходима для применимости локального дисперсионного уравнения, поскольку линейный размер окрестности точки g_0 , в которой осуществляется замораживание коэффициентов, должен одновременно превышать длину волны возмущения и быть много меньше характерной длины неоднородности l_1 . При $|k|l_1 \lesssim 1$ само понятие акустической волны в неоднородной среде теряет определенность, так как в этом случае между возмущениями давления, энтропии и завихренности имеется сильное взаимодействие. При $|k|l_2 \lesssim 1$ акустические и вихревые возмущения взаимодействуют между собой даже в однородной среде. Малость параметров $1/(|k|l_1)$ и $1/(|k|l_2)$ необходима также для независимого описания акустических волн, движущихся вверх и вниз по потоку.

В первом порядке по ε корни $\omega_1^{(1,2)}$, соответствующие акустическим волнам, определяются формулами

$$\omega_1^{(1,2)} = \omega_0^{(1,2)} + i\lambda(\pm n), \quad \lambda = \lambda_F + \lambda_Q + \lambda_V \quad (2.4)$$

где $n = k/k$ — единичный вектор, определяющий направление фазовой скорости волны, а $\lambda(n)$ — локальный акустический инкремент. Величины λ_F , λ_Q и λ_V описывают соответственно вклады в акустический инкремент возмущения пондеромоторной силы $j' \times B$, возмущения тепловыделения $(j^2/\sigma)' + Q'$ и возмущенных членов линеаризованных уравнений (1.2)–(1.4), пропорциональных стационарным градиентам. В случае $nV = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \lambda_F &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\sigma B^2}{\rho} + n(j \times B) a \left(\frac{\partial \ln \sigma}{\partial p} \right)_s + (nj) \beta B a \left(\frac{\partial \ln(\beta/\sigma)}{\partial p} \right)_s \right\} \\ \lambda_Q &= (\gamma - 1) \left\{ \frac{[j^2 - 2(nj)^2]}{2\sigma} \left(\frac{\partial \ln \sigma}{\partial p} \right)_s + \frac{\{n(j \times \beta)\}}{\sigma} (nj) \left(\frac{\partial \ln(\beta/\sigma)}{\partial p} \right)_s - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n(j \times B)}{\rho a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)_s \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь и ниже символ $(\partial/\partial p)_s$ означает производную по давлению при постоянной энтропии, $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты. При $nV \neq 0$ в (2.5) появляются дополнительные члены и формулы становятся более громоздкими [3, 14]. Величину λ_V представим в виде

$$\begin{aligned} \lambda_V &= \lambda_V^{(1)} + \lambda_V^{(2)}, \quad \lambda_V^{(1)} = -\frac{\rho a^3}{2(a + nV)} \operatorname{div} \left[\frac{V_s(a + nV)}{\rho a^3} \right] \\ \lambda_V^{(2)} &= -\frac{n[\rho(VV)V + \nabla p]}{2\rho a} - \frac{VV S}{2c_v} \quad (V_s = V + an) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь V_s — вектор групповой скорости акустической волны. Полагая волновой вектор k вещественным, можно заключить, что $\lambda > 0$ является условием нарастания во времени короткой акустической волны синусоидальной формы в малой окрестности точки g_0 . В рамках локального анализа можно рассмотреть и задачу

об усилении волны, возбуждаемой источником заданной частоты ω и имеющей заданное направление волнового вектора $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, где \mathbf{n} — вещественный единичный вектор. Тогда из (2.3) с учетом (2.4) получим

$$k^{(1,2)} = K^{(1,2)} - i\Gamma^{(1,2)}, \quad K^{(1,2)} = \frac{\omega}{nV_{\pm}(\pm n)}, \quad \Gamma^{(1,2)} = \frac{\lambda(\pm n)}{nV_{\pm}(\pm n)} \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что при $\lambda > 0$ амплитуда волны нарастает в пространстве, если \mathbf{n} составляет острый угол с направлением V_{\pm} . Физически это соответствует усилению распространяющейся волны, так как в направлении V_{\pm} осуществляется перенос энергии акустических колебаний [24]. Таким образом, локальное рассмотрение приводит к выводу, что условие $\lambda > 0$ одновременно является и критерием временного нарастания, и критерием усиления акустической волны в окрестности точки \mathbf{r}_0 . Для неоднородных течений именно концепция локального усиления, как будет видно из дальнейшего, правильна и конструктивна при исследовании акустической неустойчивости в условиях краевой задачи.

Выражения (2.5)—(2.6) удобно использовать при рассмотрении различных физических механизмов усиления и получения оценок для характерной длины усиления, а также характерного времени нарастания начальной флуктуации, если оно оказывается меньше времени выноса флуктуации из рассматриваемой окрестности точки \mathbf{r}_0 . Условия, при которых величины λ_F , λ_Q и λ_V положительны, соответствуют проявлению силовых, тепловых и градиентных механизмов акустической неустойчивости. Описание действия этих механизмов в плазме содержится в большом числе работ, начиная с [27], где впервые был рассмотрен один из возможных механизмов акустической неустойчивости в МГД-генераторе.

В широкой области параметров слабоионизованной плазмы выполняются условия $(\partial\sigma/\partial p)_S > 0$, $(\partial\beta/\partial p)_S < 0$. Поэтому силовые механизмы неустойчивости проявляются при $\mathbf{n}(\mathbf{j} \times \mathbf{V}) > 0$, а при больших значениях параметра Холла — при $\mathbf{n}\mathbf{j} < 0$. Флуктуации джоулева тепловыделения способствуют усилению в направлениях \mathbf{n} , лежащих вне конуса с образующей, наклоненной к вектору \mathbf{j} под углом $\pi/4$, а при $\beta \gg 1$ — в направлениях внутри пары углов, характеризуемой условием $(\mathbf{n}\mathbf{j})\{\mathbf{n}(\mathbf{j} \times \vec{\beta})\} < 0$. Наличие объемного источника тепла Q способствует неустойчивости при $(\partial Q/\partial p)_S > 0$ (критерий Рэлея) [18].

Градиентные механизмы усиления звука проявляются в разнообразных условиях, например в каналах переменного течения. При этом сужение канала в направлении распространения волны является фактором, способствующим ее усилению. В МГД-каналах постоянного сечения усиление звука имеет место для сверхзвуковых режимов течения с сильным торможением потока при близких к единице значениях числа Маха [26].

Отметим, что при выводе формул (2.5), (2.6) предполагается, что $|\lambda(\pm n)| \ll |(nV \pm a)k|$, что ограничивает снизу рассматриваемые частоты колебаний. При этом используется следующая связь амплитуды электрического поля с компонентами f_r вектора амплитуд газодинамических возмущений и единичным вектором \mathbf{n} :

$$\mathbf{E}^* = [(\mu_{rs}n_s f_r^*) / (\sigma_{rs}n_s n_r)] \mathbf{n} \quad (2.8)$$

Это соотношение следует из уравнения для возмущения потенциала (1.8) в нулевом порядке по параметру ε .

3. Метод геометрической акустики. В неоднородной среде локальный индекс преломления $\lambda(\mathbf{n})$ и соответствующий ему коэффициент усиления $\Gamma(\mathbf{n})$ могут менять знак в различных областях пространства, проходимых волной при ее распространении. В такой ситуации заранее не ясно, будет ли волна, возбуждаемая на входе в канал, усиленной на выходе из него. Кроме того, у волны, распространяющейся в неоднородной среде, от пространственных координат зависит не только величина, но и направление волнового вектора, которое может меняться в пространстве вследствие рефракции. Задача расчета векторного поля \mathbf{n} выходит

за рамки метода замороженных коэффициентов. Еще большие затруднения встречает попытка исследования акустической неустойчивости ограниченной неоднородной среды в рамках локального рассмотрения, проведенного в предыдущем разделе. В однородной ограниченной среде инкремент неустойчивости можно получить, рассматривая решение в виде комбинации встречных волн с постоянными волновыми векторами k_j и удовлетворяя условиям отражения на границах. При этом величина $\text{Im } \omega$ представляется в виде линейной комбинации величин $\lambda(n_j)$ [28]. В неоднородной среде такая процедура теряет смысл, так как для собственной моды колебаний величина $\text{Im } \omega$ должна быть постоянной, а величины $\lambda(n_j)$ зависят от координат.

Для решения перечисленных здесь задач целесообразно применить метод геометрической акустики, называемый иногда лучевым методом или ВКБ-приближением и являющийся более мощным и гибким, чем метод замороженных коэффициентов. Описание метода геометрической акустики для неоднородных течений идеального газа в отсутствие внешних воздействий дано в [24]. Его модификация на случай, когда в потоке имеются внешние воздействия, включая электромагнитные, проведена в [29].

В рассматриваемом приближении $\epsilon \ll 1$ волна, распространяющаяся в неоднородном плазменном течении, ищется в виде

$$\{f, \varphi'\} = \{f^*(r, \omega), \varphi^*(r, \omega)\} \exp [i\omega\vartheta(r) - i\omega t] \quad (3.1)$$

где $\omega = \omega_r + i\omega_i$ — постоянная комплексная частота, $\omega\vartheta(r)$ — быстро осциллирующая в пространстве фаза колебаний, а $f^*(r, \omega), \varphi^*(r, \omega)$ — медленно меняющиеся амплитуды. Последние представляются в виде рядов по обратным степеням частоты

$$f^*(r, \omega) = f_0^*(r) + \sum_{s=1}^{\infty} (-i\omega)^{-s} f_s^*(r) \quad (3.2)$$

$$\varphi^*(r, \omega) = \frac{\varphi_0^*(r)}{(-i\omega)} + \sum_{s=1}^{\infty} (-i\omega)^{-s-1} \varphi_s^*(r)$$

Эти ряды являются асимптотическими, и в них допускается зависимость коэффициентов разложения от параметра ω , не нарушающая порядка асимптотики. Величина ω может также содержаться и в зависимости $\vartheta(r)$ при условии, что ϑ остается порядка единицы. Подстановка (3.2) в уравнения (1.7), (1.8) после удержания членов порядка $O(\omega)$ приводит к системе однородных линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора f_0^* и амплитуды потенциала φ_0^* . Условие разрешимости этой системы имеет вид

$$\det \|K_s(r)A_s(r) - \omega I\| = 0 \quad (3.3)$$

где $K_s(r)$ — компоненты волнового вектора $K(r) = \omega \nabla \vartheta$.

Уравнение (3.3) имеет пять корней $\omega_j(K)$. Двум из них соответствуют акустические волны, для которых $(\omega - KV)^2 = a^2 K^2$. Последнее равенство представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение эйконала [24], из которого должно быть найдено распределение $\vartheta(r)$

$$[1 - V(r)\nabla\vartheta]^2 = a^2(r)(\nabla\vartheta)^2 \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) распадается на пару уравнений относительно двух функций ϑ^+ и ϑ^- . Эти уравнения будут иметь тот же вид, что и выражения (2.7) для величин $K^{1,2}$, если в последних произвести замену

$$K^{1,2}(r) = \omega \sqrt{(\nabla\vartheta^\pm)^2} \quad (3.5)$$

$$n(r) = \nabla\vartheta^\pm / \sqrt{(\nabla\vartheta^\pm)^2} = \pm (1 - V\nabla\vartheta^\pm)^{-1} a \nabla\vartheta^\pm$$

Таким образом, величина волнового вектора $K(r)$ и поле его направлений $n(r)$ определяются решением уравнения эйконала. Знание распределения $n(r)$ позволяет определить и геометрию акустических лучей, направленных по вектору групповой скорости $V_g = V(r) + a(r)n(r)$.

При решении ряда задач акустики необходимо рассматривать комплексные решения уравнения эйконала. При $\omega_l \neq 0$ такие задачи возникают при определении собственных возмущений в резонаторах с активной средой. В случае $\omega_l = 0$ решения с $\text{Im } \vartheta \neq 0$ используются в теории высокочастотных волновых пучков [30], а также при описании зон непропускания звука за критическими сечениями волноводов, заполненных движущимся газом [31, 32]. Для комплексных решений равенство $n^2 = 1$, которому удовлетворяет единичный вектор $n = n_r + in_l$, эквивалентно соотношениям $n_r^2 - n_l^2 = 1$ и $n_r n_l = 0$.

После подстановки (3.2) в (1.7), (1.8) условие баланса членов порядка $O(1)$ приводит к системе неоднородных алгебраических уравнений относительно амплитуд первого приближения $\{f_1^*, \varphi_1^*\}$. Вектор правых частей этой системы содержит компоненты нулевого приближения $\{f_0^*, \varphi_0^*\}$ и их производные по координатам, а детерминант системы равен нулю, так как $\vartheta(r)$ удовлетворяет уравнению эйконала. Условие существования решений для первого приближения аналогично [24] приводит к уравнению переноса для амплитуды акустической волны в нулевом приближении, для которого все возмущения можно выразить через возмущение давления. В результате для волны, распространяющейся с групповой скоростью $V_g = V + an$, получается следующее уравнение относительно амплитуды возмущения давления p_0^* :

$$V_g(r; n(r)) \nabla p_0^* - \lambda(r; n(r)) p_0^* = 0 \quad (3.6)$$

Входящая сюда величина λ определяется формулами (2.5), (2.6), в которых поле направлений $n(r)$ задается решением уравнения эйконала. Уравнение переноса для второй акустической волны, имеющей групповую скорость $V_g = V - an$, получается из (3.6) заменой n на $-n$. В отсутствие объемных воздействий величины λ_r, λ_Q и $\lambda_\psi^{(2)}$ равны нулю, так что $\lambda = \lambda_\psi^{(1)}$ и (3.6) переходит в классическое уравнение переноса, данное в [24]. Следует отметить, что производные от вектора n по координатам, входящие в выражение для $\lambda_\psi^{(1)}$, в локальном анализе выпадут из рассмотрения, если считать $k = \text{const}$.

Для главных членов асимптотики сохраняет свой вид формула (2.8), определяющая локальную зависимость возмущения электрического поля от газодинамических возмущений. В уравнении переноса (3.6) дифференцирование происходит по направлению звукового луча, так как $V_g \nabla = V_g d/ds$, где d/ds — производная по длине дуги луча. Закон изменения амплитуды волны вдоль луча определяется интегралом уравнения (3.6)

$$p_0^*(r) = p_0^*(r_0) \exp \int_{s(r_0)}^{s(r)} \Gamma(r(s); n(r(s))) ds \quad (3.7)$$

где $\Gamma = \lambda/V_g$ — локальный коэффициент пространственного усиления волны.

4. Волноводные ВКБ-решения. Для квазиодномерных стационарных течений в каналах с достаточно простой формой поперечного сечения метод геометрической акустики позволяет рассчитывать неоднородные звуковые волны, распространяющиеся по каналу, как по акустическому волноводу [29, 31—33]. Волноводные решения могут быть найдены благодаря тому, что в случае одномерных неоднородностей уравнение эйконала (3.4) имеет точные пространственные решения. Так, если течение зависит от одной декартовой координаты x , а вектор скорости имеет вид $V(x) = ue_x + V_\perp$, где V_\perp — со-

ставляющая скорости, ортогональная к градиенту неоднородности, то уравнение эйконала допускает следующие решения:

$$\omega \vartheta^\pm = \int_{x_0}^x K_x^\pm(x) dx + K_1 r_1, \quad K_1 = \text{const}, \quad r_1 = ye_y + ze_z,$$

$$K_x^\pm = \omega (q \pm \sqrt{R}), \quad q = -\frac{(1 - K_1^2 V_1^2 / \omega) M}{a(1 - M^2)} \quad (4.1)$$

$$R = \frac{[(1 - K_1 V_1 / \omega)^2 - a^2(1 - M^2) K_x^2 / \omega^2]}{a^2(1 - M^2)^2}, \quad M = \frac{u}{a}$$

Здесь M — число Маха, определенное по компоненте скорости в направлении градиента неоднородности. Таким образом получают решения для волн, распространяющихся вдоль криволинейных (при $K_1 \neq 0$) звуковых лучей.

ВКБ-решения ряда задач о распространении волн в среде с одномерными неоднородностями, использующие выражения вида (4.1) для эйконала в неподвижной среде ($V = 0$), приведены в [34]. Случай $u = 0$, $V_1 \neq 0$, отвечающий распространению звука в неоднородной атмосфере при слоистом ветре, рассматривался в [24]. Для описания распространения звука в МГД-каналах прямоугольного сечения, где градиент неоднородности параллелен направлению скорости ($u \neq 0$, $V_1 = 0$), решения вида (4.1) использовались в [29, 33]. Ранее одномерные ВКБ-решения с $K_1 = 0$ рассматривались в [35] применительно к исследованию устойчивости течения в МГД-канале.

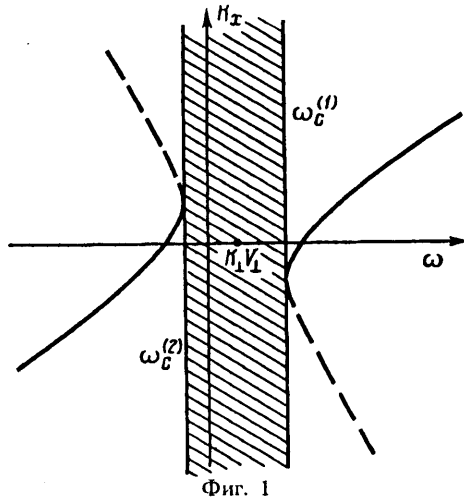
Представляют также интерес двумерные решения уравнения (3.4) для плоских течений, зависящих только от радиальной координаты, с полем скоростей вида $V(r) = V_r e_r + V_\theta e_\theta$. Соответствующие решения уравнения эйконала получаются из (4.1) заменой u на V_r , $K_x(x)$ на $K_r(r)$ и $K_1 r_1$ на $m\theta$, где m — целое число. При этом в отличие от (4.1) поперечное волновое число $K_1 = K_\theta = m/r$ меняется в направлении градиента неоднородности, а фаза колебаний постоянна вдоль кривых, имеющих форму спиралей. ВКБ-решения в виде бегущих спиральных волн плотности для случая $V_r = 0$ изучались в гидродинамической теории спиральных галактик, характеризующихся дифференциальным вращением $\Omega(r) = V_\theta/r$ [36]. Необходимость расчета спиральных акустических волн в радиально-неоднородном течении возникает при исследовании устойчивости течения в дисковом МГД-генераторе [37], где присутствуют обе компоненты скорости: V_r и V_θ .

Для течения в МГД-канале прямоугольного сечения $|y| < h$, $|z| < b$ со скоростью $V(x) = ue_x$ трехмерные волноводные решения получаются с помощью линейной комбинации четырех волн вида (3.1) с эйконалом (4.1). Им отвечают волновые векторы, различающиеся только знаками компонент K_y или K_z . Из граничных условий на непроницаемых стенках канала следует, что K_y и K_z должны иметь дискретные значения $K_y = \pi m / 2h$, $K_z = \pi l / 2b$, где m и l — целые числа. Решения, описывающие волноводное распространение звука вниз и вверх по потоку, имеют следующее строение:

$$p_\pm^* = C_{ml} Y_m(y) Z_l(z) \exp \int_{x_0}^x (iK_x^\pm \pm \Gamma^\pm) dx \quad (4.2)$$

$$\Gamma^\pm = \frac{1}{4} (u + an_x^\pm)^{-1} \sum_{j=1}^4 \lambda_j(x; n_j^\pm(x))$$

Здесь $Y_m(y)$ и $Z_l(z)$ — синусы или косинусы от $K_y y$ и $K_z z$, а Γ^+ и Γ^- sign $(1 - M)$ представляют собой коэффициенты усиления волноводных мод в направлениях их продольных групповых скоростей $V_{gx}^\pm = u + an_x^\pm$. Решения (4.2) можно использовать и для каналов с медленно меняющимся поперечным сечением, когда $h = h(x)$, $b = b(x)$. При этом в выражениях для Γ^\pm появляются члены, содержащие производные $d \ln h / dx$ и $d \ln b / dx$ [29, 33]. Для течений непроводящего газа в каналах с плавно меняющимся по длине круговым сечением структура волноводных ВКБ-решений аналогична (4.2),



Фиг. 1

с той разницей, что произведение $Y_m Z_l$ заменяется выражением вида $J_m(\alpha_l m r) \exp(im\theta)$, где J_m — функция Бесселя, а $\alpha_l m$ — медленно меняющаяся функция от x [31, 32]. Условия применимости решений вида (4.2) к течениям низкотемпературной плазмы в МГД-каналах при $\mathbf{V} = V(x)\mathbf{e}_z$ подробно рассмотрены в [13, 29, 33]. Дополнительные ограничения, связанные со спецификой МГД-течений, состоят в выполнении неравенств

$$|\omega/(u \pm a)| \min\{h, b\} \gg 1, |j_x B| h / (\rho a^2) \ll 1 \quad (4.3)$$

Первое неравенство (4.3) позволяет пренебречь влиянием электродинамических граничных условий на распространение звука в канале. При этом поле поверхностных зарядов, образующихся на стенках, мало по сравнению с полем объемных зарядов, определяемым из (2.8) [38]. Второе неравенство (4.3) позволяет пренебречь неинвариантностью коэффициента усиления бегущей волны $\Gamma(n)$ при зеркальном отражении вектора \mathbf{n} относительно плоскости $y = \text{const}$. Нарушение этого неравенства приводит к зависимостям величин Γ^\pm от координаты y . В последнем случае волноводная задача усложняется и сводится к конечно-разностному функциональному уравнению относительно распределения амплитуды волны в направлении y , ортогональном к электродным стенкам канала [29].

5. Критические частоты и отсечка волн. При $\omega_i = 0$ решения (4.2) описывают волноводное распространение в канале, если функция R , определенная в (4.1), положительна. Для сверхзвукового течения ($M^2 > 1$) всегда $R > 0$ и отсечка волн невозможна. В случае же дозвукового течения ($M^2 < 1$) могут существовать области непропускания волны, где $R < 0$. Равенство $R = 0$ определяет два значения для местной частоты отсечки $\omega_c(x, K_\perp)$

$$\omega_c^{(1,2)} = K_\perp V_\perp \pm |K_\perp| \sqrt{a^2 - u^2} \quad (5.1)$$

При фиксированном x условие $R > 0$ выполняется при $\omega > \omega_c^{(1)}$ и $\omega < \omega_c^{(2)}$. Для фиксированных ω и K_\perp обозначим через G область течения, в которой $R > 0$, а через H — область, где $R < 0$. Эти области могут не быть связными, а состоять из нескольких зон. Границы областей представляют собой критические поверхности (каустики), которые являются огибающими звуковых лучей. При плоскослойистой неоднородности каустика будет плоскостью, а в случае радиально-симметричного плоского течения — круговым цилиндром. Из (4.1) следует, что на каустике происходит слияние волновых векторов прямой и обратной волн ($K_x^+ = K_x^-$), а нормальные к каустике составляющие групповых скоростей обращаются в нуль: $V_{gx}^\pm = (\partial K_x^\pm / \partial \omega)^{-1} = 0$. Это видно также из дисперсионных кривых на фиг. 1, где сплошными и штриховыми линиями показаны зависимости $K_x^+(\omega)$ и $K_x^-(\omega)$ при фиксированном K_\perp , а заштрихованная

область представляет собой частотную полосу непропускания волн в фиксированной точке пространства.

В рамках лучевого описания каустика представляет собой полностью отражающую поверхность. Луч с $K_{\perp} \neq 0$, достигая этой поверхности из области G , касается ее и разворачивается в обратном направлении. Фактически на каустике S образуется пограничный слой, толщина которого уменьшается с ростом частоты как $\omega^{-2/3}$ [34, 39]. В пограничном слое осуществляется непрерывный переход от ВКБ-решения с вещественными лучами, справедливого для области G , к ВКБ-решению для области H с $\text{Im } K_x \neq 0$. Последнее описывает сильное экспоненциальное затухание возмущений при удалении от S . Для высоких частот характерная длина затухания ведет себя как $1/\omega$. Асимптотическое сращивание решения в пограничном слое с ВКБ-решением для дозвукового газодинамического течения в канале с переменной площадью кругового сечения проведено в [32].

В задачах теории устойчивости необходимо рассматривать решения для неоднородных бегущих волн в каналах при комплексных значениях $\omega = \omega_r + i\omega_i$, удовлетворяющих условию $|\omega_r| \gg |\omega_i|$ [29, 33]. В этом случае физическая картина отражения волны от каустики слабо отличается от имеющей место при $\omega_i = 0$, а для определения положения критических сечений можно использовать уравнение $R = 0$, полагая в нем $\omega = \omega_r$. Вблизи точки $x = x_*$, являющейся простым корнем функции $R(x)$, бегущая волна представляется в виде $\{f, \varphi'\} \equiv F = U(x) \exp i(K_{\perp} l_{\perp} - \omega t)$. Компоненты вектора $U(x)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой при $\varepsilon \ll 1$ точка $x = x_*$ является простой точкой поворота. На основе общей процедуры, описанной в [40] для систем произвольного порядка с простой точкой поворота, в [33] получено асимптотическое представление решения в окрестности каустики для системы (1.7), (1.8), учитывающей объемные внешние воздействия в потоке проводящего газа. Окрестность критического сечения, в которой неприменимы полученные лучевым методом формулы вида (4.2), определяется условием [40]

$$|\omega_r^{2/3} \xi| \ll 1, \quad \xi = \left(\frac{3}{2} \int_{x_*}^x \sqrt{R} dx \right)^{2/3} \quad (5.2)$$

В пограничном слое на каустике звуковое поле волны описывается с помощью функции Эйри $\text{Ai}[(-i\omega)^{2/3} \xi(x)]$. Вне пограничного слоя в области прозрачности G можно использовать ВКБ-решения (4.2), если ввести эффективный коэффициент отражения ζ от критического сечения. Задание ζ означает использование граничного условия на каустике в виде $p_r' + \zeta p_i' = 0$, где p_r' и p_i' — возмущения давления в отраженной и падающей волнах соответственно. При $\varepsilon \ll 1$ можно считать $\zeta = \exp(i\pi/2)$, что означает отражение волны давления без изменения амплитуды и с потерей фазы $\pi/2$.

6. Локализация звука в каналах. Расположение каустик в квазиодномерном дозвуковом потоке зависит от характера изменения критических частот $\omega_c^{(1,2)}(x)$ вдоль градиента неоднородности. Пусть при некотором $x = x_0$ зависимость $\omega_c^{(1)}(x)$ имеет локальный минимум либо зависимость $\omega_c^{(2)}(x)$ — локальный максимум. Тогда существуют частоты, при которых звуковые волны локализируются в некоторой (не обязательно малой) окрестности поверхности $x = x_0$, последовательно отражаясь от пары каустик, расположенных по разные стороны от нее. Для течения в канале с $V_{\perp} = 0$, согласно (5.1), $\omega_c^{(2)} = -\omega_c^{(1)}$. В этом случае достаточно рассмотреть поведение верхней критической частоты $\omega_c = \omega_c^{(1)}(x) > 0$. Предположим для определенности, что поперечные сечения канала $|y| < h(x)$, $|z| < b(x)$ — подобные прямоугольники, т. е. $h/b = \text{const}$. Вычисляя производную $d\omega_c/dx$ с использованием квазиодномерных уравнений стационарного МГД-течения [25], можно показать, что ее знак совпадает со знаком функции $W(x)$, где

$$W = \rho a^3 M [(\gamma + 1) M^2 - (1 - M^2)^2] \frac{d \ln \Sigma}{dx} + (\gamma - 1 + 2M^2) (j, B + \tau) u + \\ + (\gamma - 1) [1 - (\gamma + 2) M^2] \left(\frac{p}{\sigma} + Q - \tau u \right) \quad (6.1)$$

Здесь $\Sigma(x)$ — площадь поперечного сечения канала, $\tau < 0$ — сила гидравлического сопротивления на единицу объема, обусловленная пристенным трением, Q — суммарная плотность внешних и внутренних источников (стоков) тепла, отличная от джоулева тепловыделения и вязкой диссипации, B — внешнее магнитное поле, направленное по оси z . При $B = 0$ и протекании тока вдоль канала (6.1) сохраняет свой вид и для канала кругового сечения. Для идеального газодинамического течения ($j = \tau = Q = 0$) в (6.1) остается только первое слагаемое, влияние которого на поведение критической частоты в канале кругового сечения рассматривалось в [31, 32].

Расширение канала способствует убыванию критической частоты только при $M < M_\gamma = 1/2 (\sqrt{\gamma} + 5 - \sqrt{\gamma} + 1)$, а при $M_\gamma < M < 1$ частота отсечки растет вниз по потоку. Рассмотрим влияние остальных внешних воздействий [33]. Гидравлическое сопротивление τ всегда способствует убыванию ω_c , а теплоподвод ($Q > 0$) приводит к росту ω_c вниз по потоку при $M < 1/\sqrt{\gamma} + 2$ и его убыванию при $1/\sqrt{\gamma} + 2 < M < 1$. Влияние джоулева тепловыделения аналогично теплоподводу. Протекание тока в МГД-каналах в режиме генерации электроэнергии ($jE < 0$) способствует уменьшению ω_c в направлении течения, поэтому для локализации звука нужно создать поток в расширяющемся канале при достаточно близких к единице значениях M [14, 33]. В дисковом МГД-генераторе, где $\Sigma(r) = 2\pi r b(r)$, звук может локализоваться даже при убывании высоты канала $b(r)$ [37]. Наличие минимума у зависимости $\omega_c(x)$ приводит к существованию дискретного спектра собственных возмущений, для которых, как правило, $\omega_i \neq 0$.

7. Спектр собственных колебаний для дозвукового течения. Для построения акустического спектра газодинамического тракта следует задать коэффициенты отражения бегущих волноводных мод от его концов, т. е. поставить граничные условия вида

$$(p_+^* + \xi_1 p_-^*)_{x=x_1} = 0, \quad (p_-^* + \xi_2 p_+^*)_{x=x_2} = 0 \quad (7.1)$$

Здесь p_+^* и p_-^* — волноводные решения, определенные в (4.2), а ξ_1 и ξ_2 — коэффициенты отражения, в общем случае зависящие от ω . При выполнении условия

$$|\omega_i| \ll |\omega_r| \min \{1, \omega_r^2/\omega_c^2 - 1\} \quad (7.2)$$

из (4.2) и (7.1) можно получить уравнение для определения действительных собственных частот колебаний ω ,

$$\omega_r \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{R \left(x; \frac{K_1^2}{\omega^2} \right)} dx = \pi s - \frac{1}{2} (\arg \xi_1 + \arg \xi_2)_{\omega=\omega_r} \quad (7.3)$$

где s — целое число. После определения ω_r из (7.3) инкременты колебаний с учетом (7.2) можно рассчитать по формуле

$$\omega_i = \frac{1}{2} \left[\int_{x_1}^{x_2} \Lambda \left(x; K_1^4/\omega_r^2 \right) dx + \ln |\xi_1 \xi_2|_{\omega=\omega_r} \right] / \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{a^2 (1 - M^2)^2 \sqrt{R \left(x; K_1^4/\omega_r^2 \right)}} \quad (7.4)$$

$$\Lambda = (\Gamma^+ + \Gamma^-)_{\omega=\omega_r}$$

Функция $\Lambda(x)$, равная сумме коэффициентов усиления встречных волноводных мод, учитывает многочисленные механизмы усиления и ослабления бегущих волн, приводящие к расщепке или затуханию стоячих волн в неоднородном потоке. Наряду с механизмами, учтенными выше при выводе уравнения переноса (3.6), функция Λ может включать в себя члены, описывающие ослабление звука в ядре потока за счет диссипативных процессов в пограничных слоях, а в случае

МГД-течений еще и члены, описывающие влияние на устойчивость электродинамических граничных условий на стенках канала. Для квазиодномерных возмущений учет этих эффектов проведен в [13].

Трехмерный спектр собственных возмущений (7.3), (7.4) является дискретным и зависит от целых чисел s , m и l . Если концевые сечения тракта не являются активными границами, то $\ln |\xi_1 \xi_2| \leq 0$ и достаточное условие устойчивости к коротковолновым акустическим возмущениям имеет вид

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \Lambda(x; K_1^2/\omega^2) dx < 0 \quad (7.5)$$

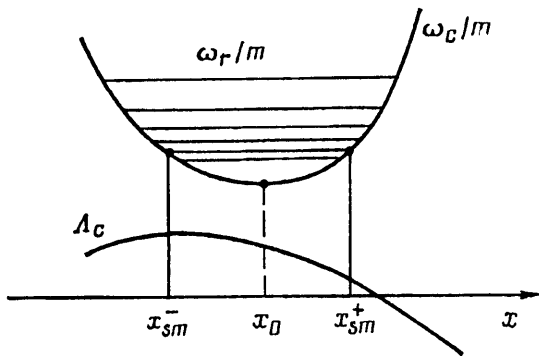
Выполнение (7.5) не гарантирует устойчивости к длинноволновым возмущениям, для которых нарушается условие применимости метода ВКБ.

Формулы (7.3), (7.4) справедливы в отсутствие критических сечений и описывают не весь высокочастотный спектр, а только ту его часть, для которой отношение $s^2/(m^2 + l^2 h^2/b^2)$ ограничено снизу некоторой константой. Рассмотрение двумерного спектра с $l=0$ [33] дает представление об устройстве собственных мод с достаточно большими поперечными волновыми числами $K_\perp = K_y$. При выполнении неравенства $\eta \equiv (|s| - 1/2)/|m| < \eta_c$, в котором параметр η_c определяется рассматриваемым течением, носителем собственной функции может быть только часть интервала (x_1, x_2) . Если функция $\alpha(x) = (a^2 - u^2)/h^2$ имеет локальный минимум в точке $x_0 \in (x_1, x_2)$, то собственные моды p_{sm}^* с $\eta < \eta_c$ локализируются внутри резонатора, ограниченного критическими сечениями $x = x_{sm}^- < x_0$ и $x = x_{sm}^+ > x_0$. Для спектра таких локализованных возмущений справедлив закон подобия: величины ω_p/m , ω_l и положения критических сечений x_{sm}^\pm зависят только от параметра η . В [41] дан пример аналитического расчета таких зависимостей для неоднородностей специального вида. При $\eta \rightarrow 0$ ширина области локализации $x_{sm}^+ - x_{sm}^-$ стремится к нулю, звуковые лучи внутри этой области почти ортогональны к стенкам, так что возникающая картина напоминает собственные функции «прыгающего мяча», описанные в [39].

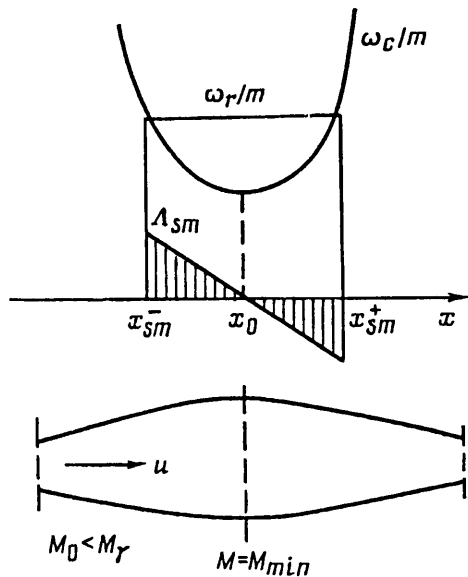
Уравнение для частот локализованных колебаний получается из (7.3) заменой интервала интегрирования (x_1, x_2) на интервал между точками поворота (x_{sm}^-, x_{sm}^+) , а суммы $\arg \xi_1 + \arg \xi_2$ — на π [14, 33]. При фиксированном m это уравнение можно представить в виде, аналогичном квазиклассическому правилу квантования Бора — Зоммерфельда [23] для квантовой частицы в потенциальной яме. Значения инкрементов получаются из формулы (7.4), в которой надо принять $\ln |\xi_1 \xi_2| = 0$, а интегрирование сохранить только по интервалу (x_{sm}^-, x_{sm}^+) . Неустойчивость к локализованным возмущениям имеет место, если для какой-нибудь пары чисел s и m интеграл по области локализации от суммы коэффициентов усиления $\Lambda = \Lambda_{sm}(x)$ положителен. Значение такой неустойчивости определяется надежностью ее прогнозирования, так как критерий раскочки колебаний не зависит от акустических свойств концов газодинамического тракта. Конкретные примеры возникновения неустойчивости описанного типа приведены в [14, 33] для линейного МГД-генератора, в [37] — для дискового холлового генератора.

Если частота отсечки $\omega_c(x)$ имеет минимум в точке $x = x_0$, то существование локализованных нарастающих мод можно гарантировать при следующем условии, не требующем вычисления интеграла от Λ . Рассмотрим функцию $\Lambda_c(x)$ получаемую из $\Lambda(x; K_1^2/\omega^2)$ заменой ω на $\omega_c(x_0)$. Тогда при $\Lambda_c(x_0) > 0$ моды с достаточно малыми η будут нарастающими. Это следует из стремления длины области локализации к нулю при $\eta \rightarrow 0$, накопления уровней величины ω_p/m вблизи дна «ямы» (см. фиг. 2) и совпадения знаков функций $\Lambda_{sm}(x)$ и $\Lambda_c(x)$ в малой окрестности точки x_0 .

Влияние одного только профилирования канала при $j = Q = \tau = 0$ может при-



Фиг. 2



Фиг. 3

вести лишь к нейтральным локализованным колебаниям. Локализованные колебания возникнут, если, например, число Маха на входе в расширяющуюся часть канала меньше, чем M_γ , а за сечением $x = x_0$, в котором достигается значение $M = M_{\min}$, канал сужается и M начинает увеличиваться (фиг. 3). В этом случае функция $\Lambda_{sm}(x)$ знакопеременна, а интеграл от нее в пределах (x_{sm}^-, x_{sm}^+) в точности равен нулю. При $\lambda \equiv \lambda^{(0)}$ коэффициенты усиления Γ^\pm представляются в виде полных производных по x от величин, пропорциональных групповым скоростям V_{gx}^\pm , обращающимся в нуль в точках поворота. На возможность нейтральных колебаний такого типа в идеальном газодинамическом течении (без рассмотрения их спектра) обращалось внимание в [31]. В [42] ВКБ-методом получен спектр нейтральных акустических колебаний между поверхностью ударной волны и каустикой в неоднородном слое газа, движущемся почти параллельно обеим отражающим поверхностям. В рассмотренной в [42] модели $\omega_i = 0$ вследствие условия $\ln |\xi_{1,2}| = 0'$ и локальной компенсации коэффициентов усиления встречных волн ($\Lambda(x) \equiv 0$).

Для газодинамических течений с теплоподводом нарастание локализованных мод в профилированном канале возможно, и соответствующие примеры нетрудно построить.

9. Нелокальные электроакустические эффекты. В плазме, находящейся во внешних полях, локализованные акустические возмущения порождают возмущения электрического поля во всей области, занятой проводящим газом. Уравнение (1.8) для φ' относится к эллиптическому типу, поэтому местные флуктуации скорости течения или компонент тензора проводимости мгновенно возмущают распределения пондеромоторной силы и джоулева тепла. Таким образом проявляется электроакустическое дальнее действие [43], благодаря которому газодинамические возмущения возникают перед фронтами звуковых импульсов. Для различных условий структура таких предвестников рассматривалась в [43—46].

Нелокальный характер электромагнитных воздействий приводит также к существованию остаточных возмущений после выключения внешнего источника звука. По этой причине в сверхзвуковых плазменных течениях в отличие от газодинамических течений могут существовать собственные акустические коле-

бания в каналах конечной длины. При определенных условиях дискретный спектр таких колебаний содержит конечное число растущих мод [47]. Механизм акустической неустойчивости обусловлен усилением звуковых волн, бегущих к выходу из канала, и передачей возмущений на вход за счет распределенной обратной связи, создаваемой возмущениями электрического поля. По-видимому, такой механизм мог проявиться в условиях эксперимента [22], в котором наблюдалось самовозбуждение колебаний давления в сверхзвуковом МГД-генераторе. ВКБ-расчет области существования акустической неустойчивости в сверхзвуковом дисковом генераторе проведен в [37].

Проявлением нелокальных эффектов при вынужденных акустических колебаниях обусловлено изменение привычной картины излучения звука от источника в сверхзвуковом потоке: в присутствии магнитного поля акустические колебания в плазме появляются перед конусом Маха [48].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. McCune J. E. Wave growth and instability in partially ionized gases//Proc. 2nd Int. Sympos. Magnetohydrodyn. Power Generation. V. 2. Paris, 1964. P. 523—538.
2. Руткевич И. М., Синкевич О. А. Волны и неустойчивости в низкотемпературной плазме//Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Мех. жидкости и газа. 1981. Т. 14. С. 127—204.
3. Недоспасов А. В., Хаит В. Д. Основы физики процессов в устройствах с низкотемпературной плазмой. М.: Энергоатомиздат, 1991. 224 с.
4. Раушенбах Б. В. Вибрационное горение. М.: Физматгиз, 1961. 500 с.
5. Артамонов К. И. Термоакустическая устойчивость высокотемпературного тепловыделяющего газа//Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 3. С. 563—566.
6. Wu P. K. S., Pirri A. N. Stability of laser heated flows//AIAA Journal. 1976. V. 14. № 3. P. 390—392.
7. Коломенский Ал. А. Акустические автоволны в светопоглощающей среде//Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 2. С. 370—372.
8. Рысаков В. М. Акустоэлектронная неустойчивость в пьезополупроводниках//Успехи физ. наук. 1991. Т. 161. № 12. С. 1—38.
9. Глазнев В. Н. Устойчивость течения за ударной волной, расположенной в канале переменного сечения//Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1973. № 13. Вып. 3. С. 97—106.
10. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Исследование устойчивости течения идеального газа в квазицилиндрическом канале//ПММ. 1975. Т. 39. № 3. С. 473—484.
11. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Об устойчивости течения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения при одновременном отражении от сечения выхода акустических и энтропийных волн//ПММ. 1976. Т. 40. № 3. С. 469—478.
12. Слободкина Ф. А. К устойчивости дозвуковых газодинамических течений//Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 1. С. 90—97.
13. Руткевич И. М. Устойчивость неоднородного дозвукового течения в мощном МГД-генераторе к квазиодномерным акустическим колебаниям//Теплофиз. высоких температур. 1986. Т. 24. № 2. С. 340—352.
14. Rutkevich I. M., Tokar P. M. Stability of the non-uniform subsonic flows in the open cycle MHD-generators//Proc. 9th Int. Conf. MHD Electr. Power Generat. Tsukuba, Japan, 1986. V. 4. Yokohama, 1986. P. 1620—1629.
15. Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983. 320 с.
16. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. Затухание Ландау, петровые волны и свисток//Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 68—104.
17. Жоған Е. Я., Мозевич Н. Е. Отражение звука от границы равновесного и неравновесно-возбужденного газа//Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 2. С. 252—255.
18. Strutt J. W. (Rayleigh). The theory of sound. V. 2. London; McMillan, 1926. (Рус. перев.: Стрэтт Дж. В. (Рэлей). Теория звука. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1944. 476 с.)
19. Alexeff I., Neidigh R. V. Observation of ionic sound waves in plasmas: their properties and applications//Phys. Rev. 1963. V. 129. № 2. P. 516—527.
20. Голубев В. С., Лебедев Ф. В. Исследования неоднородностей плазмы между коаксиальными электродами в магнитном поле//Теплофиз. высоких температур. 1973. Т. 11. № 2. С. 245—250.
21. Barton J. P., Koester J. K., Mitchner M. Fluctuations in combustion MHD generator systems//Proc. 18th Symp. Engng Aspects MHD. Butte. Montana, 1979. J. 1.1.—J. 1.8.
22. Glinov A. P., Golovin A. P., Dreizin Y. A. et al. Alternating current excitation in MHD channel load//Proc. 9th Int. Conf. MHD Electr. Power Generat. Tsukuba, Japan, 1986. V. 3. Yokohama, 1986. P. 1151—1158.
23. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
24. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 206 с.
25. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.

26. Руткевич И. М., Токарь П. М. Типы возможных магнитогидродинамических неустойчивостей плотной плазмы паров металлов//Теплофиз. высоких температур. 1981. Т. 19. № 6. С. 1228—1239.
27. Velikhov E. P. Hall instability of current-carrying slightly ionized plasma//Proc. 1st Int. Sympos. MHD Electr. Power Generation, Newcastle-upon-Tyne, 1962. London: Inst. Electr. Engrs, 1963. P. 135—136.
28. Колесников В. К., Хаит В. Д. Об акустической устойчивости дозвукового потока в МГД-канале//Теплофиз. высоких температур. 1976. Т. 14. № 6. С. 1296—1304.
29. Руткевич И. М., Токарь П. М. Двумерные акустические колебания в неоднородном МГД-течении. Бегущие волны//Теплофиз. высоких температур. 1984. Т. 22. № 5. С. 984—994.
30. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.
31. Осипов А. А. Распространение трехмерных акустических возмущений в каналах переменной площади поперечного сечения при частотах, близких к частоте отсечки//Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 6. С. 149—159.
32. Гладенко А. Ф., Леонтьев Е. А. Метод пограничного слоя в задаче распространения звука в канале переменного сечения с потоком//Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 2. С. 212—218.
33. Руткевич И. М., Токарь П. М. Роль отсечки двумерных акустических волн в возникновении неустойчивости дозвуковых МГД-течений//Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 26—36.
34. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
35. Слободкина Ф. А. Устойчивость квазиодномерных магнитогидродинамических течений//ПММ. 1967. Т. 31. № 3. С. 406—415.
36. Lin C. C., Lau Y. Y. On spiral waves in galaxies — a gas dynamic approach//SIAM J. Appl. Math. 1973. V. 29. № 2. P. 352—370.
37. Dobrydnev V. V., Komov V. I., Rutkevich I. M. Stability of plasma flows in disk MHD generators//Proc. Int. Conf. Energy Transfer in MHD flows. Cadarache. France, 1991. P. 293—298.
38. Руткевич И. М. Возникновение электродинамических пограничных слоев при распространении звука в ограниченной низкотемпературной плазме//Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 4. С. 837—840.
39. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
40. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
41. Комов В. И., Руткевич И. М. Возбуждение нелинейных звуковых колебаний в движущейся неоднородной плазме. Уравнения для амплитуд взаимодействующих волн//Теплофиз. высоких температур. 1991. Т. 29. № 1. С. 35—44.
42. Гуцин В. Р., Федоров А. В. Асимптотическая структура невязких возмущений в тонком ударном слое//Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 72—79.
43. Руткевич И. М. Влияние дальнего действия на возбуждение звука в проводящем газе//Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 1. С. 135—143.
44. Добрыднев Б. В., Руткевич И. М. Влияние границ на двумерные звуковые импульсы в проводящем газе//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 118—126.
45. Добрыднев Б. В., Руткевич И. М. Структура электроакустического предвестника, возникающего перед сферическим звуковым фронтом в МГД-плазме//Теплофиз. высоких температур. 1989. Т. 27. № 3. С. 439—448.
46. Бреев В. В., Губарев А. В., Панченко В. П. Сверхзвуковые МГД-генераторы. М.: Энергоатомиздат, 1988. 238 с.
47. Руткевич И. М. О спектре газодинамических возмущений и устойчивости сверхзвукового потока плазмы при джоулевым разогреве//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 6. С. 154—162.
48. Добрыднев Б. В., Руткевич И. М. Выход акустического излучения за пределы конуса Маха при сверхзвуковом течении плазмы//2-й Всесоюз. семинар «Взаимодействие акустических волн с плазмой». Мегри, 1991: Тез. докл. Ереван: Ин-т прикл. пробл. физики, 1991. С. 56—59.

Москва

Поступила в редакцию
5.II.1992