М Е Х А Н И К А
Ж И Д К О С Т И И Г А З А
№ 5 • 1992

УДК 532.5:517.31

© 1992 г. Э. Н. БЕРЕСЛАВСКИЙ, П. Я. КОЧИНА

О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ КЛАССА ФУКСА В ГИДРО- И АЭРОМЕХАНИКЕ

Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса позволяет рассмотреть широкий круг плоских установившихся задач теории струй, фильтрации, газовой динамики и др. К подобным уравнениям сводятся решения задач об отыскании функции, реализующей конформное отображение на вспомогательную каноническую область круговых многоугольников, которые возникают в областях комплексной скорости потоков. При большом числе вершин в коэффициентах этих уравнений помимо неизвестных аффиксов вершин многоугольников появляются еще и дополнительные (так называемые акцессорные) параметры, которые не определяются полностью положением особых точек уравнений и показателями в них [1—3], так что определение параметров представляет весьма сложную задачу. Ниже показано, что для целого ряда случаев, когда в многоугольнике имеются углы, кратные $\pi/2$, и разрезы (что часто встречается в гидро-, газо- и аэромеханике), решение задачи определения неизвестных параметров можно довести до конца.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение класса Фукса с четырьмя особыми точками [2, 3]:

$$Y'' + \left(\frac{1-\alpha}{\xi} + \frac{1-\beta}{\xi-1} + \frac{1-\gamma}{\xi-e}\right) Y' + \frac{(\varepsilon\varepsilon'\xi + \lambda)\, Y}{\xi(\xi-1)(\xi-e)} = 0 \tag{1}$$

Уравнению (1) соответствует задача о конформном отображении верхней полуплоскости ξ на некоторый круговой четырехугольник плоскости z с углами $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$ и $\pi\delta$ (фиг. 1), для которых имеет место соотношение Фукса

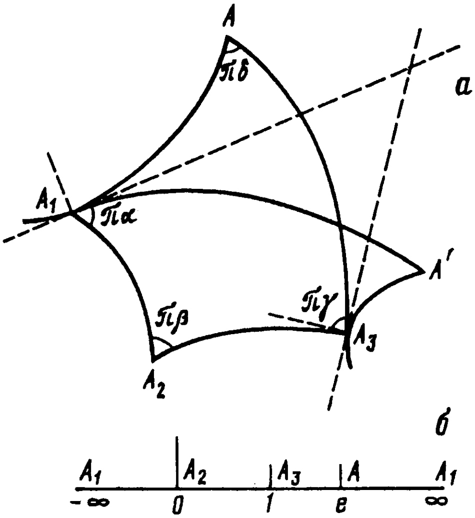
$$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon + \varepsilon' = 2, \quad \varepsilon - \varepsilon' = \delta$$

Здесь аффикс одной из вершин четырехугольника e и акцессорный параметр λ — неизвестные постоянные, о которых говорилось выше.

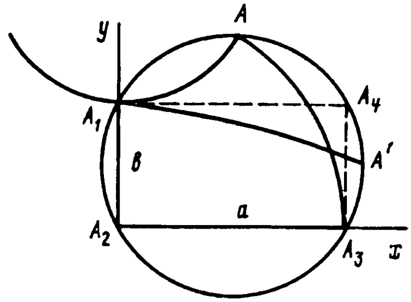
Если найти линейно-независимые интегралы уравнения (1) $y_{1,2}$, то конформное отображение кругового четырехугольника $A_1A_2A_3A$ на полуплоскость ξ определяется уравнением

$$z = \frac{C_1y_1 + C_2y_2}{C_3y_1 + C_4y_2}$$

Отношения трех произвольных постоянных C_i к четвертой достаточны для определения трех вершин четырехугольника, скажем, A_1, A_2 и A_3 (фиг. 1, *а*). На долю четвертой вершины A приходится два действительных числа: λ и e. Но поскольку эта вершина должна лежать на вполне определенной кривой (как видно из фиг. 1, *а*, можно даже найти геометрическое место вершин A при заданных A_1, A_2 и A_3 [4—6]), то для нее достаточно лишь одного параметра. Следовательно, между λ и e должна существовать зависимость, однако, как уже отмечалось, связь эта при постановке задачи остается неизвестной и вопрос об уравнении, связывающем параметры λ и e (или об исключении λ из рассмотрения), в каждом отдельном случае решается по-разному.



Фиг. 1



Фиг. 2

Обратимся сначала к примеру кругового четырехугольника с прямыми углами [4—6]. В этом случае $\alpha = \beta = \gamma = \delta = {}^1/_2$, $\varepsilon = \delta$, $\varepsilon' = 0$ и уравнение (1) принимает вид

$$Y'' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi - 1} + \frac{1}{\xi - e}\right) Y' + \frac{\lambda Y}{\xi(\xi - 1)(\xi - e)} = 0 \tag{2}$$

Дробно-линейным преобразованием можно перевести две смежные окружности в две прямые и тогда будем иметь дело с прямоугольным четырехугольником вида $A_1A_2A_3A$ (фиг. 2).

В качестве фундаментальной системы решений уравнения (2) примем выражения [4—6]

$$y_1 = \cos\,[2k\sqrt{\lambda}\;F_*(\xi, k)],\quad y_2 = \sin\,[2k\sqrt{\lambda}\;F_*(\xi, k)]$$

$$F_*(\xi, k) = F(\arcsin\sqrt{\xi}, k) = \int_0^{\sqrt{\xi}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)}}$$

Отображающая функция должна иметь вид

$$z = \frac{y_2}{y_1} = C\,\mathrm{tg}\,[2k\sqrt{\lambda}\;F_*(\xi, k)]$$

Рассматривая условия в вершинах A_2 и A_3, приходим к выражениям

$$C = a\,\mathrm{ctg}\,\mu = b\,\mathrm{cth}\,\nu \tag{3}$$

$$\mu = 2k\sqrt{\lambda}\;K,\quad \nu = 2k\sqrt{\lambda}\;K'$$

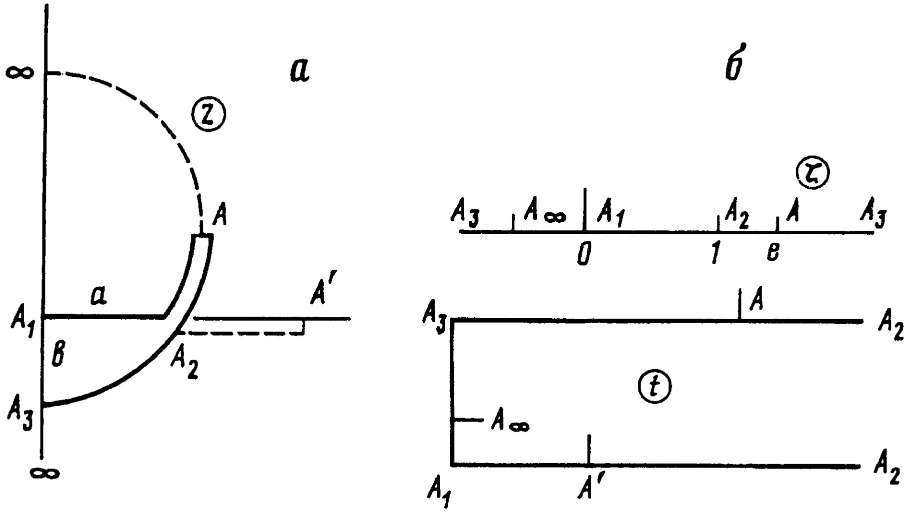
$$K = F_*\left(\frac{\pi}{2}, k\right),\quad K' = F_*\left(\frac{\pi}{2}, k'\right),\quad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

Из (3) находим искомую зависимость между параметрами λ и $e = 1/k^2$ в виде

$$b/a = \mathrm{th}\,(2k\sqrt{\lambda}\;K')\;/\;\mathrm{tg}(2k\sqrt{\lambda}\,K)$$

Соответствие вершины $A(x, y)$ дает

$$x + iy = a\,\mathrm{ctg}\,\mu\;\mathrm{tg}(\mu' + i\nu) \tag{4}$$



Фиг. 3

Отделяя в (4) вещественную и мнимую части и исключая при помощи (3) ctg μ и cth ν, получим уравнение окружности

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

проходящей через точки A_1, A_2, A_3 и A_4 (фиг. 2).

Рассмотрим теперь круговой четырехугольник с двумя прямыми и одним произвольным углами, имеющим разрез, т. е. угол, равный 2π.

В этом случае

$$\alpha = \delta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2, \quad \varepsilon = -\frac{1}{2}\beta, \quad \varepsilon' = -\frac{1}{2}(1+\beta)$$

$$Y'' + \left(\frac{1}{2\xi} + \frac{1-\beta}{\xi-1} - \frac{1}{\xi-e}\right) Y' + \frac{[\beta(1+\beta)\xi + \lambda]\, Y}{4\xi(\xi-1)(\xi-e)} = 0 \qquad (5)$$

С помощью дробно-линейного преобразования подобный круговой четырехугольник можно всегда представить в виде четырехугольника $A_1A_2AA_3$ или $A_1A'A_2A_3$ (фиг. 3, *а*). При $0 < e < 1$ будем иметь прямолинейный разрез, при $e = 1$ разрез пропадает, а при $e > 1$ он перемещается вдоль дуги окружности (фиг. 3, *а* и *б*).

В данном случае в качестве линейно-независимых частных решений уравнения (5) возьмем выражения [7]

$$y_1 = (\operatorname{ch} t \operatorname{ch}\beta t + C \operatorname{sh} t \operatorname{sh}\beta t)\operatorname{ch}^{-(1+\beta)} t \qquad (6)$$

$$y_2 = (\operatorname{ch} t \operatorname{sh}\beta t + C \operatorname{sh} t \operatorname{ch}\beta t)\operatorname{ch}^{-(1+\beta)} t$$

где t — новая переменная, связанная с ξ уравнением $\xi = \operatorname{th}^2 t$ (фиг. 3, *в*), и C — параметр, подлежащий определению.

Отображающая функция принимает вид

$$z = \frac{y_2}{y_1} = a\,\frac{\operatorname{th}\beta t + C \operatorname{th} t}{1 + C \operatorname{th}\beta t \operatorname{th} t}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) = \frac{a}{b}$$

На линии A_2A_3, где $t = t' + i\pi/2$, имеем

$$x + iy = a\,\frac{P + iab^{-1}}{1 + iPab^{-1}}, \quad P = \frac{\operatorname{th}\beta t' + C \operatorname{cth} t'}{1 + C \operatorname{th}\beta t' \operatorname{cth} t'} \qquad (7)$$

Из (7) приходим к уравнению окружности, на которой лежит дуга A_2A_3

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{b} y = a^2$$

Подставляя в (5) выражения (6), получим

$$e = \frac{C + \beta}{C\,(1 + \beta C)} \tag{8}$$

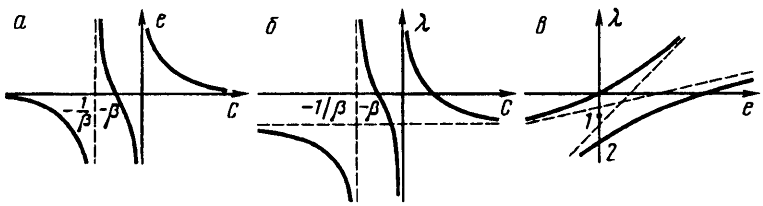
$$\lambda = \beta e\,(1 - \beta - 2C) = \frac{\beta\,(C + \beta)\,(1 - \beta - 2C)}{C\,(1 + \beta C)} \tag{9}$$

Если исключить параметр C из (8) и (9), то найдем уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda\,[(\beta^2 - \beta - 1)e + 1\,] + \beta(1 + \beta)e[(1 - \beta)(2 - \beta)e - 2\,] = 0 \tag{10}$$

которое совпадает с условием для конца разреза [2, с. 255].

Уравнения (8), (9) — это уравнения гиперболы (10) в параметрическом виде. На фиг. 4, *а* и *б* схематично представлены кривые $e = e(C)$ и $\lambda = \lambda(C)$, на фиг. 4, *в* — гипербола (10).



Фиг. 4

Таким образом, в рассматриваемом случае параметр C оказывается униформизирующей переменной [1, с. 414] для уравнения (10), дающей однозначные представления параметров λ и e в параметрической форме.

Подобным образом можно рассмотреть такие фуксовые уравнения с четырьмя, пятью и шестью особыми точками, которые отвечают задаче с конформным отображением четырехугольников с одним, пятиугольников с двумя и шестиугольников с тремя разрезами, один из углов которых произволен, а остальные являются нечетными кратными $\pi/2$ [8]. Приведем здесь результаты для фуксового уравнения

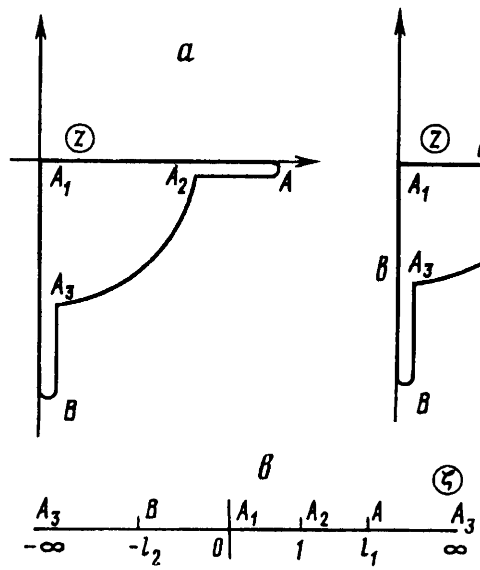
$$Y'' - \left(\frac{1}{2\xi} - \frac{1 - \beta}{\xi - 1} + \frac{1}{\xi + e_1} + \frac{1}{\xi - e_2}\right) Y' +$$

$$+ \frac{[(2 + \beta)\,(3 + \beta)\,\xi^2 + \lambda\xi + \mu\,]\,Y}{4\xi\,(\xi - 1)\,(\xi + e_1)\,(\xi - e_2)} = 0 \tag{11}$$

которое определяет отображение на верхнюю полуплоскость ξ кругового пятиугольника с углами, равными $3\pi/2, \beta\pi$ и $\pi/2$, и двумя разрезами (фиг. 5). Линейно-независимые частные решения этого уравнения получены в виде

$$y_1 = [(\mathrm{ch}^4 t + C_1 \mathrm{ch}^2 t + C_2)\,\mathrm{ch}\,(1 + \beta)t +$$
$$+ 0{,}5\,\mathrm{sh}\,2t(C_3 - \mathrm{ch}^2 t)\,\mathrm{sh}\,(1 + \beta)t\,]\mathrm{ch}^{-(3 + \beta)}t$$
$$y_2 = [(\mathrm{ch}^4 t + C_1 \mathrm{ch}^2 t + C_2)\,\mathrm{sh}\,(1 + \beta)t +$$
$$+ 0{,}5\,\mathrm{sh}\,2t(C_3 - \mathrm{ch}^2 t)\,\mathrm{ch}\,(1 + \beta)t\,]\mathrm{ch}^{-(3 + \beta)}t$$
$$C_1 + C_2 + C_3 + \beta(1 + C_1 + C_2) = 0$$

где C_i — параметры, подлежащие определению.



Фиг. 5

В данном случае параметры λ, μ, e_1 и e_2 уравнения (11) связаны с параметрами C_i следующим образом:

$$\lambda = \frac{2C_1 + [(e_1 + e_2)\beta(3+\beta) - 10 - 2\beta]\,C_2 + 2(1+\beta)\,C_3}{C_2}$$

$$\mu = \frac{(1+\beta)\,e_1e_2\,[2C_2 - (2+\beta)\,C_3 + \beta]}{C_3 - 1}$$

$$e_2 - e_1 = \frac{(1+\beta)(2C_1C_2 + 3C_2^2 + C_3^2) + (C_1 - C_2)\,C_3 + 3C_2}{C_2\,[C_3 - (1+\beta)\,C_2]}$$

$$e_1e_2 = \frac{(1+\beta)(2C_1C_2 + 2C_2^2 + C_3^2) - \beta(2C_1 + 2C_3 + 1) + C_1C_3 + 3C_2}{C_2\,[C_3 - (1+\beta)\,C_2]}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
2. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. *Кочина П. Я.* (Полубаринова-Кочина П. Я.). Гидродинамика и теория фильтрации: Избр. тр. М.: Наука, 1991. 351 с.
4. *Полубаринова-Кочина П. Я.* О круговых многоугольниках в теории фильтрации//Пробл. математики и механики. Новосибирск: Наука, 1983. С. 166—177.
5. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений в теории фильтрации//Математика и пробл. водного хоз-ва. Киев: Наук. думка, 1986. С. 19—36.
6. *Полубаринова-Кочина П. Я.* О дополнительных параметрах на примерах круговых четырехугольников//ПММ. 1991. Т. 55. № 2. С. 222—227.
7. *Береславский Э. Н.* Об интегрировании в замкнутой форме одного класса фуксовых уравнений и его приложении//Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1048—1050.
8. *Береславский Э. Н.* О некоторых уравнениях класса Фукса, встречающихся в задачах математической физики//Докл. АН УССР. Сер. А. 1990. № 1. С. 7—10.

Москва

Поступила в редакцию
14.XI.1991