

УДК 533.6.011.72

© 1992 г. И. В. СОКОЛОВ

## О СЖАТИИ ГАЗА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СТАЦИОНАРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С КВАЗИКОНИЧЕСКИМ ОСТРИЕМ

Сходящиеся сферические и цилиндрические ударные волны в идеальном газе обладают свойством кумуляции — по мере уменьшения радиуса волны ее скорость неограниченно возрастает [1, 2]. Увеличение плотности среды, возникающее при сжатии таких волн, хотя и конечно, но превышает скачок плотности в сильной плоской ударной волне, поскольку каждый объем газа, испытав сжатие во фронте сходящейся волны, продолжает затем в течение некоторого времени двигаться к центру (оси) симметрии и плотность его в этом сходящемся течении возрастает. Так, за фронтом сильной плоской волны плотность  $\rho_{s1} = 4\rho_0$  для показателя политропы  $\gamma = 5/3$  (здесь и далее  $\rho_0$  — начальная плотность). В то же время сходящаяся сферическая волна увеличивает плотность до  $\rho_{s1}$ :  $\rho_{s1} \approx 10\rho_0$ . За отраженной сферической волной  $\rho_{s2} \approx 30\rho_0$ . Возможность такого сжатия имеет большое значение для приложений [3].

Однако использование сферических волн для достижения высоких плотностей связано и с недостатками: малым временем существования уплотнения, сложностью экспериментальной регистрации. Сходящиеся цилиндрические волны дают больше возможностей для экспериментальных исследований [4, 5], но уплотнение  $\rho_{s2}$  в таких волнах меньше, чем в сферических.

В настоящей работе рассматривается двумерное осесимметричное стационарное течение газа со сходящейся волной, взаимодействующей с коническим острием. Реализация подобного течения позволила бы создать область плотного газа (плотность  $\rho_2 \approx \rho_{s2}$ ), доступную для экспериментального исследования в течение длительного времени.

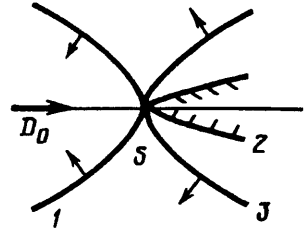
**1. Постановка задачи.** Исследуется осесимметричное течение идеального газа ( $\gamma = 5/3$ ), зависящее от двух цилиндрических координат  $r, z$ . Рассмотрим цилиндрический объем  $r \leq R_0$ . Будем считать, что в каждом сечении  $z = z_0$ ,  $r \leq R_0$  газ с плотностью  $\rho_0$  покоится до момента времени  $t = t_0 = -z_0/D_0$ , а при  $t = t_0$  линию  $z = z_0$ ,  $r = R_0$  пересекает участок фронта сходящейся в направлении к оси ударной волны, скорость фронта равна  $V_0$ . Предположим, что выполнены условия  $D_0 \gg V_0 \gg c_0$ , где  $c_0$  — скорость звука в невозмущенном газе.

Такая волна может возникать, например, при локальном выделении энергии в сечении  $z = z_0$ ,  $r \geq R_0$  в последовательные моменты времени  $t = t_0(z_0) = \text{const}$ . Более сложный способ создания волны предложен в [6]. Возможна также интерпретация течения как потока, входящего со скоростью  $D_0$  в конфузорную часть круглой трубы. Такая постановка задачи восходит к [7] и более ранним работам, но она не очень естественна при условии  $D_0 \gg V_0 \gg c_0$ .

Отражение волны от оси симметрии в отсутствие диссипации является нерегулярным [6, 8, 9], но при  $D_0 \gg V_0$  характерный размер маховской конфигурации мал по сравнению с  $R_0$  (конкретные оценки этого размера, определяющие область нарушения применимости используемой здесь модели, приведены ниже). В дальнейшем будем считать конфигурацию точкой, обозначим ее  $S$ . Высокая плотность за отраженной волной может быть достигнута, если в газе, сжатом сходящейся волной, со скоростью  $-D_0$  движется конус. Предполагается, что ось конуса совпадает с осью симметрии течения, а его вершина совпадает с точкой  $S$ . На

фиг. 1 линия 1 — сходящаяся волна, 2 — конус, 3 — отраженная волна. Для угла раствора конуса  $2\theta_0$  пусть выполнено условие  $\theta_0 \ll 1$ .

Основной целью настоящей работы является определение плотности за отраженной волной и давления на конусе. Для облегчения расчетов вместо конуса рассматривается «квазиконус» — тело специальной формы, близкой к притупленному конусу.



Фиг. 1

Необходимо подчеркнуть, что в очень малой окрестности точки  $S$  течение отличается от схемы фиг. 1, однако это несущественно, так как на интересующие автора параметры течения вне этой малой области процессы в окрестности точки  $S$  влияют пренебрежимо мало. Действительно, на большом расстоянии от точки  $S$  слой газа, прошедшего через маховскую конфигурацию (он непосредственно прилегает к поверхности тела), имеет малую толщину по сравнению с характерным поперечным масштабом течения. Следовательно, данный слой не может существенно влиять ни на давление на поверхности тела (так как перепад давления на тонком слое мал), ни тем более на параметры на фронте ударной волны. Лишь распределение энтропии (соответственно температуры и плотности) в этом самом пристеночном слое существенно зависит от картины течения в окрестности точки  $S$ , поскольку энтропия определяется конфигурацией ударных фронтов, через который прошел газ, а выравнивания энтропии (в отличие от давления) в поперечном по отношению к скорости направлении в идеальном газе происходит не может даже в очень узких слоях.

Для аналогии отметим, что при сверхзвуковом обтекании клина с присоединенной ударной волной кромка клина всегда имеет некоторый малый, но конечный радиус кривизны  $R_c$ , а значит, ударная волна отходит от кромки на расстояние порядка  $R_c$ . Однако это не препятствует использованию решения с присоединенной волной на больших по сравнению с  $R_c$  расстояниях от кромки для расчета давления на поверхности клина и параметров на фронте ударной волны.

**2. Поршневая аналогия и пределы ее применимости.** Перейдем в систему координат  $r, z'$ , движущуюся вдоль оси  $z$  со скоростью  $-D_0$  вместе с конусом, течение в ней стационарно. Введем угол  $\nu$  между фронтом сходящейся ударной волны и осью симметрии. В силу условия  $D_0 \gg V_0$  при  $r = R_0 \nu \ll 1$ , так как  $\sin \nu = V/D_0$ , где  $V$  — нормальная скорость фронта. Если  $\nu \ll 1$  на всем фронте, а не только при  $r = R_0$ , то во всем течении  $z$ -компонента скорости  $v_z$  равна  $D_0$  с относительной точностью  $\sim \nu^2$ , а для остальных величин получаются уравнения [1]

$$\frac{\partial v_r}{\partial \tau} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_r \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{P}{\rho^\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial v_r}{\partial r} + \rho \frac{v_r}{r} = 0 \quad (2.1)$$

$$\tau = t + \frac{z}{D_0} = \frac{z'}{D_0} + \text{const}$$

Здесь обозначения обычные. Система (2.1) совпадает с уравнениями цилиндрически-симметричного движения газа — «поршневая аналогия» [1].

При  $\tau = 0$  поверхность  $r = R_0$  пересекает ударная волна, сходящаяся к оси по неподвижному газу, следовательно, вблизи оси течение описывается автомодельным решением уравнений (2.1) для цилиндрической сходящейся ударной волны [1]. Будем считать, что решение справедливо при  $r \leq R_0$  — до сих пор выбор  $R_0$  ничем определен не был. Тем самым утверждается, что сильная сходящаяся к оси  $z$  осесимметричная стационарная ударная волна в некоторой окрестности  $r \leq R_0$  вблизи оси описывается автомодельным решением для цилиндрической

волны, зависящим от переменных  $\tau$  и  $r$ . В частности, для скорости  $V$  и радиальной координаты фронта  $r_f$  имеем [1]

$$r_f = R_0 \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right)^\alpha, \quad \tau_0 = \frac{\alpha R_0}{V_0} \quad (2.2)$$

$$V = V_0 \left( \frac{r_f}{R_0} \right)^{(\alpha-1)/\alpha}, \quad \alpha \approx 0,82 \quad (2.3)$$

Учет соотношений  $\sin \nu = V/D_0$  и (2.3) показывает, что условие  $\nu \ll 1$  нарушается при

$$r_f \sim r_* = R_0 (V_0/D_0)^{\alpha/(1-\alpha)} \quad (2.4)$$

В силу соотношений (2.4) и  $V_0/D_0 \ll 1$  имеем  $r_*/R_0 \ll 1$ . Именно при  $r_f \sim r_*$  происходит переход к маховскому отражению. В работе не рассматриваются столь малые масштабы и принимается условие  $r \gg r_*$ . На таких расстояниях выполнено неравенство  $\nu \ll 1$  и справедлив переход к (2.1).

Если отсчитывать координату  $z'$  от точки  $S$ , можно переписать (2.2) в виде

$$r_f = R_0 (-V_0 z' / \alpha D_0 R_0)^\alpha \quad (2.5)$$

В соответствии с (2.5) будем рассматривать вместо конического острия квазиконус, поверхность которого описывается уравнением

$$r = r_0 (\theta_0 z' / \alpha r_0)^\alpha, \quad \theta_0, r_0 = \text{const} \quad (2.6)$$

При этом действие квазиконуса на течение в рамках системы (2.1) моделируется цилиндрическим поршнем, расширяющимся по степенному временному закону, аналогичному (2.2) с тем же показателем степени.

Поскольку  $\alpha$  не слишком сильно отличается от единицы, поверхность (2.12) близка к конической. В сечении с радиусом  $r_0$  угол  $\theta$  между осью симметрии и образующей тела равен  $\theta_0$ , этот угол слабо зависит от  $r$  при  $r \sim r_0$ . Систему (2.1) можно применять к расчету течения за отраженной волной при условии  $\theta \ll 1$ , которое при  $\theta_0 \ll 1$  нарушается только в области  $r \sim r_{*1} = r_0 \theta_0^{\alpha/(1-\alpha)} \ll r_0$ .

Итак, условие применимости поршневой аналогии есть

$$r \gg r_*, r_{*1} \quad (2.7)$$

Поскольку ось  $r=0$  при  $z' < 0$  проходит через покоящийся газ, а при  $z' > 0$  — внутри квазиконуса, условие (2.7) выполнено во всей области течения, за исключением малой окрестности точки  $S$ .

3. Формулировка автомодельной задачи. Если форма квазиконуса описывается уравнением (2.7), решение задачи для уравнений (2.1) является автомодельным. Именно в этом была цель замены конического острия квазиконической поверхностью. Введем автомодельную переменную и безразмерные функции-представители

$$\xi = \frac{r}{R_0} \left| 1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right|^{-\alpha} \quad (3.1)$$

$$v_r = \frac{\alpha r}{\tau - \tau_0} U, \quad \rho = \rho_0 G, \quad \frac{\gamma P}{\rho} = \frac{\alpha^2 r^2}{(\tau - \tau_0)^2} Z \quad (3.2)$$

Уравнения для  $U, Z, G$  получаются подстановкой (3.2) в (2.1)

$$\frac{dU}{d \ln \xi} = \frac{U(1-U)(1/\alpha - U) - Z(2U - \kappa)}{Z - (1-U)^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{dZ}{d \ln \xi} = \frac{Z}{1-U} \left[ \left( -\frac{2}{\alpha} + 2\gamma U \right) + (\gamma - 1) \frac{U(1-U)(1/\alpha - U) - Z(2U - \kappa)}{Z - (1-U)^2} \right] \quad (3.4)$$

$$\frac{dG}{d \ln \xi} = \frac{G}{1-U} \left[ 2U + \frac{U(1-U)(1/\alpha - U) - Z(2U - \kappa)}{Z - (1-U)^2} \right] \quad (3.5)$$

$$\kappa = 2(1-\alpha)/(\gamma\alpha) \quad (3.6)$$

Соотношения на фронте сильной ударной волны дают для сходящейся волны

$$\xi = 1, \quad U(1) = \frac{2}{\gamma+1}, \quad Z(1) = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}, \quad G(1) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad (3.7)$$

На поверхности поршня согласно, (3.1), (2.6)

$$\xi = \xi_p = \left( \frac{r_0}{R_0} \right)^{1-\alpha} \left( \frac{\theta_0 D_0}{V_0} \right)^\alpha, \quad U(\xi_p) = 1 \quad (3.8)$$

Последнее условие выражает равенство скорости поршня и скорости газа на нем. Граничные условия на фронте отраженной волны, которые определяют значения функций-представителей за фронтом (обозначены индексом 2) через их значения перед фронтом, приведены в [10]

$$U_2 - 1 = (U_1 - 1) \left[ 1 + \frac{2}{\gamma+1} \frac{Z_1 - (1-U_1)^2}{(1-U_1)^2} \right] \quad (3.9)$$

$$Z_2 = \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^2 \frac{1}{(U_1 - 1)^2} \left[ (U_1 - 1)^2 + \frac{2Z_1}{\gamma-1} \right] \left[ \frac{2\gamma}{\gamma-1} (U_1 - 1)^2 - Z_1 \right] \quad (3.10)$$

$$G_2 = G_1 \frac{1-U_1}{1-U_2}, \quad \xi = \xi, \quad (3.11)$$

Вся автомодельная задача характеризуется одним безразмерным параметром  $\xi_p$ . Используя формулы (2.2), (2.3), (2.6) и определение  $\theta$ , можно представить (3.8) в виде  $\xi_p = [D_0 \theta(r)/V(r)]^\alpha$ .

Приведем выражения для плотности на фронте отраженной волны  $\rho_2$  и давления на поршень  $P_p$

$$\rho_2 = \rho_0 G(\xi), \quad P_p(r) = \frac{1}{\gamma} \rho_0 D_0^2 \theta^2(r) Z(\xi_p) G(\xi_p) \quad (3.12)$$

При любом заданном значении  $\xi_p$  необходимо найти решение системы (3.3)—(3.5), удовлетворяющее условиям на разрывах, и найти значения функций-представителей, входящие в (3.12).

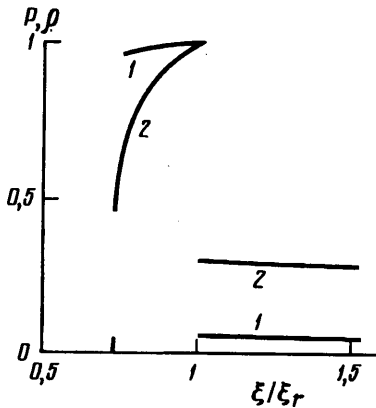
4. Интегрирование автомодельной системы. Решению уравнений (2.1) при  $\tau < \tau_0$  и  $\tau > \tau_0$  отвечают две различные интегральные кривые системы (3.3)—(3.5), причем кривая для  $\tau < \tau_0$  — единственная, а для  $\tau > \tau_0$  имеется семейство кривых, каждая из которых соответствует одному из значений  $\xi_p$ .

При  $\tau < \tau_0$  ход решения известен [1]. Интегральная кривая в точке  $\xi = 1$  имеет начальные значения (3.7). При  $\xi > 1$  осуществляется численное интегрирование системы (3.3)—(3.5), до некоторого очень большого значения  $\xi = \xi_\infty$ , причем выбор единственного значения  $\alpha = 0,82$  гарантирует существование решения без физически бессмысленных особенностей. Пусть в точке  $\xi = \xi_\infty$  достигаются значения  $U_\infty = U(\xi_\infty)$ ,  $Z_\infty = Z(\xi_\infty)$ ,  $G_\infty = G(\xi_\infty)$ .

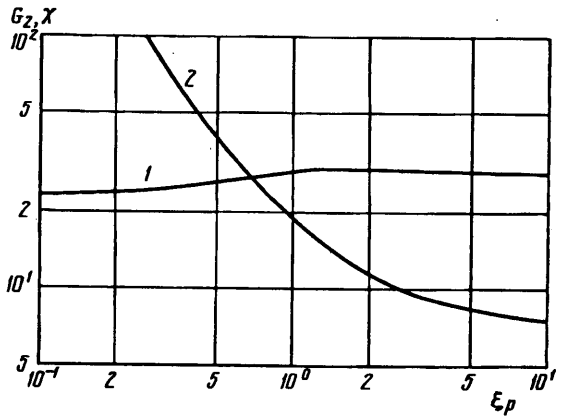
Асимптотика функций  $U$ ,  $Z$ ,  $G$  при  $\xi \rightarrow \infty$  для  $\tau < \tau_0$  такова, что функции  $v_r$ ,  $P$ ,  $\rho$  для любого  $r \neq 0$  имеют конечный предел при  $\tau \rightarrow \tau_0 - 0$ . Очевидно, такой же предел функции  $v_r$ ,  $P$ ,  $\rho$  должны иметь при  $\tau \rightarrow \tau_0 + 0$ . Отсюда легко получить, что интегральная кривая для  $\tau > \tau_0$  должна при  $\xi = \xi_\infty$  иметь начальные значения

$$U(\xi_\infty) = -U_\infty, \quad Z(\xi_\infty) = Z_\infty, \quad G(\xi_\infty) = G_\infty \quad (4.1)$$

С начальным условием (4.1) численно интегрируем уравнения (3.3)—(3.5) в области  $\xi < \xi_\infty$ . Получающаяся при этом интегральная кривая описывает течение



Фиг. 2



Фиг. 3

перед фронтом отраженной волны. Для любой точки  $\xi = \xi_r$  этой кривой можно построить с помощью (3.9)—(3.11) скачок параметров через фронт отраженной волны в состоянии  $U_2, Z_2, G_2$ . Выполняя численное интегрирование системы из этого состояния в области  $\xi < \xi_r$ , приходим в точку, где выполнено условие (3.8), и находим  $\xi_p$ . Таким образом, каждая кривая из семейства, соответствующего течениям за фронтом отраженной волны при различных фиксированных  $\xi_p$ , рассчитывается при некотором заданном  $\xi_r$ , а значение  $\xi_p$  определяется только после расчета всей кривой.

Для величины  $\xi_r$  существует минимальное значение  $\xi_{\min} \approx 0,67$ , такое, что при  $\xi_r = \xi_{\min} + 0$  параметр  $\xi_p$  стремится к нулю. Соответствующая интегральная кривая описывает решение для цилиндрической ударной волны, отраженной от оси (поршень имеет исчезающе малый радиус).

В другом предельном случае  $\xi_r \rightarrow \infty$  имеем  $\xi_p \rightarrow \infty$ , а предельная интегральная кривая после замены независимой переменной  $\lambda = \xi / \xi_r$ , не зависит от параметра  $\xi_p$ . В соответствии с определением  $\xi_p$  (3.7) предельная кривая описывает течение, созданное движением поршня, скорость которого велика по сравнению со скоростью сходящейся ударной волны. В этом случае влияние сходящейся при  $\tau < \tau_0$  волны на течение при  $\tau > \tau_0$  сводится к формированию в момент времени  $\tau = \tau_0$  состояния с плотностью  $G_\infty$ , функции  $Z$  и  $U$  в этом состоянии малы по сравнению с их значениями за отраженной волной. Отраженная волна в данном пределе возникает исключительно из-за движения поршня, ее интенсивность велика по сравнению с амплитудой сходящейся волны.

Для  $\xi_p = 1,08, \gamma = 5/3$  зависимости от  $\xi / \xi_r$  гидродинамических величин — давления (1) и плотности (2), отнесенных к их значениям на фронте отраженной волны, представлены на фиг. 2. Температура на поршне обращается в бесконечность, давление — конечно. В неидеализированной постановке задачи температура на поверхности конуса была бы конечна, но выше уже подчеркивалось, что в непосредственной близости от тела полученные здесь результаты для энтропии, плотности и температуры (но не давления) неприменимы. Отметим еще во избежание недоразумения, что искомые максимальные значения уплотнения достигаются на фронте отраженной волны, а не вблизи тела, где плотность стремится к нулю.

Для дальнейшего представляет интерес еще одна интегральная кривая системы (3.3)—(3.5), хотя она и не принадлежит рассмотренному выше семейству. Кривая начинается в точке (3.7), как и решение для  $\tau < \tau_0$ , но в отличие от последнего продолжается в область  $\xi < 1$  вплоть до выполнения условия (3.8). Нетрудно видеть, что это решение описывает (с точностью до перенормировки  $\xi$ ) течение,

созданное поршнем в покоящемся при  $\tau = \tau_0$  холодном газе с плотностью  $G = 1$ . Расчет показывает, что давление  $\Pi_0 = ZG/\gamma$  на поршень в этом случае  $\approx 0,6$ .

5. Результаты и вывод. Наличие автомодельного решения и применение поршневой аналогии позволяет найти зависимость гидродинамических параметров от  $r$  и  $z' = D_0(\tau - \tau_0)$  и, в частности, найти значение плотности  $\rho_2$  на фронте отраженной волны. Зависимость  $\rho_2/\rho_0 = G_2$  от параметра  $\xi_p$  в логарифмическом масштабе (кривая 1) приведена на фиг. 3. Предельные соотношения

$$\frac{\rho_2}{\rho_0} \rightarrow \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\rho_{c1}}{\rho_0}, \quad \xi_p \rightarrow \infty, \quad \frac{\rho_2}{\rho_0} \rightarrow \frac{\rho_{c2}}{\rho_0}, \quad \xi_p \rightarrow 0$$

где  $\rho_{c1}/\rho_0$  и  $\rho_{c2}/\rho_0$  — изменение плотности, создаваемое соответственно сходящейся и отраженной цилиндрическими автомодельными ударными волнами.

Интересно, что максимальное (в зависимости от  $\xi_p$ ) значение уплотнения  $G_2$  достигается при конечном  $\xi_p$ . Это свойство является следствием осесимметричного характера задачи и связано с ростом плотности в сходящемся течении перед фронтом отраженной ударной волны.

Далее определение  $\Pi_0$  совместно с формулой (3.12) позволяет найти давление  $P_0$  на квазиконус, движущийся со скоростью  $D_0$  в холодном газе с плотностью  $\rho_0$ , т. е. в отсутствие сходящейся волны

$$P_0(r) = \rho_0 D_0^2 \theta^2(r) \Pi_0, \quad \Pi_0 \approx 0,6 \quad (5.1)$$

При наличии сходящейся волны, характеризующейся параметром  $\xi_p$ , давление на поверхность квазиконуса  $P_p(r)$  выражается через зависящий только от  $\xi_p$  коэффициент  $\chi = P_p(r)/P_0(r)$ , который показывает, во сколько раз наличие сходящейся волны увеличивает давление на поверхности движущегося квазиконуса.

Из (3.12); (5.1) имеем  $\chi = Z(\xi_p)G(\xi_p)/(\gamma\Pi_0)$ . Для расчета  $\chi$  и  $G_2$  при заданном  $\xi_p$  искалась интегральная кривая, соответствующая этому  $\xi_p$ , а затем определялись  $G(\xi_p)$  и  $Z(\xi_p)G(\xi_p)$ . Зависимость  $\chi(\xi_p)$  представлена на фиг. 3 (кривая 2). Предельное соотношение:  $\chi \rightarrow \rho_{c1}/\rho_0$  при  $\xi_p \rightarrow \infty$ .

Главный вывод работы заключается в доказательстве возможности создания высоких значений уплотнения среды в рассмотренном течении специального вида. Эти значения сравнимы с теми уплотнениями, которые могут быть получены с помощью сферических ударных волн — сходящихся и отраженных.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Брушлинский К. В., Каждан Я. М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики//Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. № 2. С. 3—23.
3. Компанец А. С. Законы физической статистики. Ударные волны. Сверхплотное вещество. М.: Наука, 1976. 288 с.
4. Кантровиц А. Одномерные неустановившиеся течения//Основы газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 325—385.
5. Matsuo H., Nakamura Y. Cylindrically converging blast waves in air//J. Appl. Phys. 1981. V. 52. № 7. P. 4503—4507.
6. Соколов И. В. Высокоскоростные кумулятивные газовые струи//Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 148—152.
7. Мейер Р. Е. Метод характеристик в задачах о течениях сжимаемой жидкости, зависящих от двух переменных//Газовая динамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. С. 7—57.
8. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 427 с.
9. Соколов И. В. Коническая ударная волна//Теплофиз. высоких температур. 1988. Т. 26. № 3. С. 560—566.
10. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.