

УДК 533.6.011.5

© 1992 г. В. Н. ГОЛУБКИН

## ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОБТЕКАНИЕ КРЫЛЬЕВ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА<sup>1</sup>

Дан обзор результатов теории гиперзвукового пространственного обтекания крыла, основанной на использовании метода тонкого ударного слоя.

Обтекание крыльев гиперзвуковым потоком под углом атаки характеризуется формированием сжатого ударного слоя газа вблизи наветренной поверхности и интенсивным разрежением с пренебрежимо малым давлением на подветренной стороне. Несмотря на то что подветренные течения весьма сложны и, как правило, содержат отрывные зоны, в местах присоединения которых возникают пики теплового потока, наветренный ударный слой играет главную роль в образовании аэродинамических сил и теплопередачи к поверхности несущего крыла.

Изучение течения в ударном слое осложняется развитием ряда специфических для гиперзвукового полета явлений. Во-первых, вследствие сильного и неравномерного роста энтропии происходит интенсивное вихреобразование, играющее, как оказалось, определяющую роль в формировании структуры течения. Во-вторых, течения за интенсивными скачками уплотнения весьма неоднородны и содержат резкие градиенты завихренности, давления, энтропии и т. п. Это приводит к необходимости выделения и асимптотического рассмотрения ряда подобластей (особые сечения, энтропийные и вихревые слои), взаимодействие которых с вязким пограничным слоем заметно влияет на теплопередачу. В-третьих, при больших скоростях и высотах полета воздух в ударном слое уже нельзя считать совершенным газом, а нужно учитывать его реальные свойства.

В то же время ударный слой оказывается сильно сжатым вследствие интенсивных физико-химических реакций (в основном диссоциации молекул при высоких температурах), приводящих к уменьшению эффективного показателя адиабаты. Поэтому концепция тонкого ударного слоя [1, 2] как предел, соответствующий стремлению показателя адиабаты  $k$  к единице, оказалась весьма плодотворной как для построения достаточно полной теории обтекания, так и для расчетов с приемлемой на практике точностью. В асимптотическом методе тонкого ударного слоя используется предельный переход  $k \rightarrow 1$ ,  $M_\infty \rightarrow \infty$  и решение задачи обтекания ищется в виде разложений по малому параметру  $\varepsilon$ , характеризующему отношение плотностей на сильном головном скачке уплотнения. Нулевым приближением, соответствующим бесконечно тонкому сжатому слою ( $\varepsilon = 0$ ), является ньютоновская схема обтекания и известная формула Ньютона для давления. Используя следующее приближение по  $\varepsilon$ , можно решить обширный круг проблем, связанных с исследованием и объяснением структуры пространственных трехмерных и конических течений, уточнением ньютоновских значений аэродинамических характеристик, учетом реальных свойств воздуха и ряда других факторов, что невозможно в рамках предельной ньютоновской схемы.

Указанный подход позволил на основе приближенных формулировок задачи получить законы подобия, аналитические и численно-аналитические решения, дающие явные, хотя подчас и сложные связи между аэродинамическими характеристиками и определяющими параметрами задачи. Эти результаты можно использовать для предварительных оценок и расчетов, ибо точные численные расчеты пространственных течений реального газа связаны с серьезными трудностями и затратами ресурсов ЭВМ. Они также служат основой для формулировки и решения вариационных задач о выборе оптимальных форм несущих поверхностей при гиперзвуковых скоростях.

Кроме того, на протяжении ряда лет большое внимание уделяется исследованию гиперзвукового

<sup>1</sup> По материалам доклада, прочитанного на VII съезде по теоретической и прикладной механике, Москва, август 1991 г. Представлено В. Я. Нейландом.

обтекания тел вязким газом с использованием уравнений Навье — Стокса и гиперзвукового турбулентного пограничного слоя. Для построения рациональных асимптотических теорий вязких и отрывных течений (например, [3]) необходимо иметь аналитические решения задач невязкого обтекания, используемые в качестве внешних решений.

1. При гиперзвуковом обтекании тонкого крыла с заостренной передней кромкой под конечным углом атаки  $\alpha$  ( $\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha \sim 1, \varepsilon \rightarrow 0$ ) головной скачок уплотнения присоединен к вершине и в ударном слое реализуется гиперзвуковое течение. Если удлинение крыла  $\lambda$  также конечно и передняя кромка имеет гладкую форму в плане, то применим правило полос, сводящее задачу к расчету двумерного обтекания профиля крыла в каждой плоскости  $z = \operatorname{const}$  вдоль хорды. В случае обтекания плоского треугольного крыла с конечным углом при вершине  $2\varphi$  [4] присоединенные к кромкам плоские скачки уплотнения должны сопрягаться в узкой окрестности плоскости симметрии (с угловым размером порядка внутреннего угла Маха), где течение коническое и правило полос неприменимо.

Поэтому наибольший интерес представляет существенно пространственное обтекание крыла малого удлинения  $\lambda, \varphi \rightarrow 0$ , которое по порядку величины совпадает с углом Маха в сжатом слое [5]. Это определяет масштаб изменения боковой координаты  $\Delta z^\circ \sim \varepsilon^{1/2} \operatorname{tg} \alpha$ . Закон плоских сечений для тонких тел при больших углах атаки [6] с дополнительным предельным переходом  $\varepsilon \rightarrow 0, \lambda, \varphi \sim \varepsilon^{1/2} \operatorname{tg} \alpha \rightarrow 0$  в этом случае приводит к закону подобия по параметру  $\Omega = \lambda/4\varepsilon^{1/2} \operatorname{tg} \alpha$ . В зависимости от его величины, а также формы передней кромки в плане головной скачок может быть присоединенным или отсоединенным от нее, что является принципиальной отличительной чертой по сравнению со случаем  $\lambda \sim 1$ .

Для телесного крыла считается также, что толщина его, отсчитываемая от базовой плоскости, по отношению к которой измеряется и угол атаки, по порядку величины совпадает с толщиной сжатого слоя (масштаб вертикальной координаты  $\Delta y^\circ \sim \varepsilon \operatorname{tg} \alpha$ ). Это придает дополнительную специфику, ибо главный (нетривиальный) член разложения формы головного скачка заранее неизвестен и условия Ранкина — Гюгоinia ставятся на поверхности этого скачка, которая сама должна определяться из решения задачи.

Декартовы координаты и компоненты вектора скорости в связанной с крылом системе, давление и плотность представляются в виде [5]

$$x^\circ = Lx, \quad y^\circ = L\varepsilon y \operatorname{tg} \alpha, \quad z^\circ = L\varepsilon^{1/2} z \operatorname{tg} \alpha$$

$$u^\circ/V_\infty = \cos \alpha + \varepsilon u \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \dots \quad (1.1)$$

$$\frac{v^\circ}{V_\infty} = \varepsilon v \sin \alpha + \dots, \quad \frac{w^\circ}{V_\infty} = \varepsilon^{1/2} w \sin \alpha + \dots$$

$$p^\circ - p_\infty = \rho_\infty V_\infty^2 (1 + \varepsilon p) \sin^2 \alpha + \dots, \quad \frac{\rho^\circ}{\rho_\infty} = \varepsilon^{-1} + \dots$$

$$\varepsilon = \frac{\kappa - 1}{-\kappa + 1} (1 + m), \quad m = \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \sin^2 \alpha \sim 1$$

В следующем приближении к ньютоновскому течению совершенного газа (с  $\kappa \rightarrow 1$ ) в ударном слое описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений с граничными условиями на головном скачке и на поверхности крыла

$$Du = 0, \quad Dv = -p_y, \quad Dw = 0 \quad (1.2)$$

$$v_y + w_z = 0, \quad D = \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$$u_x = -S_x, \quad w_x = -S_z, \quad v_x = S_x - S_z^2 - 1 \quad (1.3)$$

$$p_x = 2S_x - S_z^2 - 1, \quad y = S(x, z)$$

$$v_b = B_x + w_b B_z, \quad y = B(x, z) \quad (1.4)$$

Приближенная система (1.2) в качестве характеристических поверхностей  $F(x, y, z) = 0$  имеет цилиндрические поверхности, перпендикулярные плоскости  $y = 0$ :  $F(x, z) = 0$ , и поверхности тока  $DF = 0$ .

Фундаментальным свойством рассматриваемого течения, открытие которого [7] положило начало целому направлению исследований, является сохранение поточной (вдоль вектора скорости потока) составляющей завихренности вдоль линий тока  $D(w_y) = 0$ .

Математически это уравнение получается дифференцированием уравнения  $Dw = 0$  по  $y$  с учетом уравнения неразрывности. Физический же смысл его состоит в том, что пространственное гиперзвуковое течение газа в ударном слое, как видно из (1.2), эквивалентно двумерному нестационарному течению несжимаемой жидкости в поперечной плоскости  $x = \text{const}$ . В этом течении, согласно уравнению Гельмгольца, единственная перпендикулярная его плоскости компонента завихренности сохраняется постоянной вдоль траекторий и именно она представляет собой поточную составляющую завихренности по отношению к исходному течению газа.

Вместе с уже известными интегралами уравнений (1.2), выражающими постоянство вдоль линий тока продольной и боковой компонент скорости, наличие нового интеграла движения  $w_y = \text{const}$  оказывается достаточным для получения общего аналитического решения задачи (1.2)–(1.4). Действительно, переходя от координат  $x, y, z$  к характеристическим независимым переменным  $w, z$  и используя вместо уравнения неразрывности эквивалентное интегрируемое уравнение  $D(w_y) = 0$ , получим из (1.2)

$$u_x + wu_z = 0, \quad (y_w)_x + w(y_w)_z = 0$$

$$v = y_x + wy_z, \quad p_w = -(v_x + wv_z)y_w$$

Эти уравнения допускают последовательное интегрирование, в результате чего с учетом условий (1.3), (1.4) находим

$$u = U(w, z - wx), \quad y = B(x, z) + \int_{w_b}^w \Gamma(w', z - w'x) dw' \quad (1.5)$$

$$v = B_x + wB_z + \int_{w_b}^w (w - w') \Gamma_{\theta'}(w', z - w'x) dw' - [(w_b)_x + w(w_b)_z] \Gamma_b$$

$$p = 2S_x - S_z^2 - 1 + \int_w^{-S_z} (v_x + w'v_z) \Gamma(w', z - w'x) dw'$$

Величина  $\theta = z - wx$  наряду с  $w$  сохраняется вдоль линий тока. Следовательно, линии тока рассматриваемого течения представляют собой плоские кривые (без кручения), лежащие в плоскостях, перпендикулярных плоскости  $y = 0$ , и имеют прямолинейные проекции на эту плоскость. Физически это непосредственно связано с тем, что градиент давления по размаху является внепорядковым и не входит в систему (1.2). Далее, в формулах (1.5) функция  $\Gamma = 1/w$ , характеризует обратную величину поточной составляющей завихренности, которая постоянна вдоль линий тока и, согласно условию (1.3), для  $v$ , выражается через форму скачка

$$\Gamma_x(x, z) = (S_x S_{zz} - S_{zx})^{-1}$$

Такой же результат получается после подстановки разложений (1.1) в точную формулу [8] для вихря за ударной волной. Граничное условие (1.4) подчиняет функции  $\Gamma = \Gamma_b$ ,  $w = w_b$  на поверхности крыла одному из условий

$$\Gamma_b = 0, \quad (w_b)_x + w_b(w_b)_z = 0$$

Обозначим через  $\xi(w, \theta)$ ,  $\zeta(w, \theta)$  абсциссу и аппликату точки входа линии тока в ударный слой, где она пересекается со скачком уплотнения. Они находятся из уравнений

$$w = -S_x(\xi, \zeta), \quad \zeta = z - (x - \xi)w$$

Тогда функции  $U$ ,  $\Gamma$  в поле течения суть

$$U(w, z - wx) = -S_x(\xi, \zeta), \quad \Gamma(w, z - wx) = \Gamma_s(\xi, \zeta) \quad (1.6)$$

Таким образом, все искомые газодинамические функции представлены в виде квадратур и функциональных зависимостей, которые в принципе можно разрешить, если известна форма скачка уплотнения. Описывающая ее основная для данной класса задач функция  $S(x, z)$  должна определяться из (1.5) при  $w = -S_z$

$$S(x, z) = B(x, z) + \int_{w_b} \Gamma(w, z - wx) dw \quad (1.7)$$

Как видно отсюда и из (1.5), завихренность играет определяющую роль в формировании структуры течения в сжатом слое.

Вследствие прямолинейности проекций линий тока на плоскость  $y = 0$  функции  $\Gamma_b(x, z)$ ,  $w_b(x, z)$  имеют прямые линии уровня и определяются условиями обтекания передней кромки  $z = z_e(x)$ , которые для рассматриваемого класса крыльев малого удлинения существенным образом зависят от ее конфигурации. Если скачок присоединен к кромке гладкой формы в плане, то

$$w_b(x, z) = w_e(\xi_b), \quad \Gamma_b(x, z) = \Gamma_e(\xi_b)$$

где  $\xi_b(x, z)$  — абсцисса точки пересечения линии тока на крыле с передней кромкой, определяемая как корень функционального уравнения

$$z_e(\xi_b) = z - w_e(\xi_b)(x - \xi_b)$$

На основе решения локальной задачи обтекания передней кромки с присоединенным скачком в виде рядов [9] для боковой скорости и поточной составляющей вихря  $\omega_e = 1/\Gamma_e$  на плоском крыле имеем ( $R = z_e'(x)$ )

$$w_e = \frac{1}{2}(R - \sqrt{R^2 - 4}), \quad \omega_e = \frac{2w_e R'}{R^2 - 4} \quad (1.8)$$

Аналогичные, но гораздо более громоздкие формулы имеют место и для крыла с толщиной. Если же скачок отсоединен от кромки и присоединен только к острой вершине крыла  $x = z = 0$ , то аналогично треугольному крылу с  $\Omega < 2$  кривизна скачка имеет особенность при  $z = z_e(x)$  [5], все линии тока на крыле проходят через вершину и вдоль них

$$\theta_b = z - w_b x = 0, \quad w_b = \frac{z}{x}, \quad \Gamma_b = 0, \quad \xi_b = 0$$

Эти равенства выполняются также в центральной части крыла с заостренной вершиной и присоединенным к кромке скачком, которая занята линиями тока, прошедшими через вершину  $|z/x| \leq -S_{z_e}(x = 0)$ . На консольных частях такого крыла остаются в силе формулы (1.8).

Таким образом, исходная трехмерная система дифференциальных уравнений в частных производных (1.2) сведена к двумерному функциональному интегродифференциальному уравнению (1.7) для формы скачка и последующему нахождению поля скоростей и распределения давления путем квадратур (1.5).

Полученные формулы для распределения завихренности по крылу имеют интересные следствия. Во-первых, сильно искривленные участки передней кромки (в пределе изломы), а также резкие отгибы носков профилей крыла оказываются источниками больших значений вихря, ориентированного по потоку. Так, теория дает бесконечную величину завихренности вдоль пучка линий тока, выходящих из заостренной вершины крыла, что объясняется большими градиентами энтропии на скачке вблизи излома кромки. Во-вторых, значительное вихреобразование происходит и вблизи точки отсоединения скачка от передней кромки, где  $|R| = 2$  (1.8). Тем самым дано теоретическое обоснование экспериментально

наблюдавшихся фактов, ибо возникшая на кромке завихренность в силу сохранения вдоль линий тока приводит к образованию узких зон сильно завихренного течения, аналогичных по своему воздействию изолированным вихрям [8].

В некоторых приложениях оказалось удобным использовать вместо независимой переменной  $w$  координату  $\xi$ . Тогда основные уравнения для формы будут иметь вид

$$S(x, z) = B(x, z) + \int_{\xi_b}^x \frac{d\xi}{1 + (x - \xi) S_{zz}(\xi, \zeta)} \quad (1.9)$$

$$\zeta = z + (x - \xi) S_z(\xi, \zeta)$$

Прежде чем приступить к численному решению уравнений такого типа, что представляет весьма непростую задачу, рассмотрим некоторые частные формы крыльев, допускающие дальнейшие упрощения и аналитические подходы.

2. В автомодельной задаче о треугольном крыле течение в сжатом слое будет коническим. Основное уравнение (1.7) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с функциональными связями. Когда параметр подобия  $\Omega < 2$ , скачок уплотнения присоединен только к вершине и отсоединен от передних кромок. Для этого случая в [10] дана методика уточненного расчета формы скачка, реализовавшая различные алгоритмы, отслеживающие топологию течения. Путем численного решения обратной задачи с заданной кривизной скачка в плоскости симметрии  $b$  и определения соответствующей величины приведенного полуразмаха  $\Omega$  из условия на передней кромке получена фундаментальная зависимость  $b(\Omega)$ , являющаяся непрерывной и однозначной. Это существенно упростило решение краевой задачи для крыла с заданным  $\Omega$ , сведя ее к задаче Коши с начальными данными в плоскости симметрии. Проведены систематические расчеты формы скачка уплотнения и распределения давления по крылу. Найдено также уточненное значение параметра  $\Omega_* = 0,5648$ , при котором происходит качественное изменение топологической структуры течения в сжатом слое: в диапазоне  $0 < \Omega < \Omega_*$  имеется линия растекания в плоскости симметрии и при  $\Omega_* < \Omega < 2$  здесь расположена линия стекания и возникает дополнительная линия растекания вблизи передней кромки.

При обтекании треугольного крыла с присоединенным к передней кромке скачком уплотнения в ударном слое имеют место одновременно конически дозвуковые, трансзвуковые и сверхзвуковые течения, сильно взаимодействующие между собой не только через волны давления, но и через разрывы завихренности. Это, с одной стороны, затрудняет решение глобальной задачи, а с другой — приводит к интересным закономерностям. Так, оказалось возможным решить обратную задачу обтекания крыла с толщиной и присоединенным скачком гладкой формы [11]. В то же время скачок, присоединенный к кромке плоского треугольного крыла, в рассматриваемом случае должен иметь ряд точек излома (в поперечном сечении) [2]. Непротиворечивое решение на основе схемы [2] совместно с указанной в [11] возможностью сосуществования областей с постоянной и распределенной функцией тока на крыле впервые получено в [12]. Если ударный слой за отсоединенным скачком рассчитывается численно, то большая часть скачка, присоединенного к кромке плоского треугольного крыла, описывается простыми аналитическими решениями уравнения

$$\eta_s'' [1 - (\eta_s' + \zeta)^{-2}] = 0$$

имеющими вид  $\eta_s' = \text{const}$ ,  $\eta_s' = \pm 1 - \zeta$  ( $\eta = y/x$ ,  $\zeta = z/x$  — автомодельные конические переменные). В данном случае форма скачка определяется, начиная от передней кромки, и состоит из двух плоских участков разного наклона, сопрягающихся гладким образом посредством искривленного параболического скачка. Для крыльев разной стреловидности эти скачки эквидистантны, а число  $M$  поперечного потока за ними равно единице. Это явление, названное стаби-

лизацией формы скачка в конически-трансзвуковой зоне было обнаружено затем и в точных численных решениях и оказывает определяющее влияние на поле течения в центральной части. Оно оказалось весьма неоднородным, так как содержит ряд узких областей с большой кривизной скачка и пикообразным распределением давления, обнаруженным и в точных численных расчетах при близких к единице значениях показателя адиабаты. В пределе при  $\epsilon \rightarrow 0$  эти области вырождаются в так называемые особые сечения  $\zeta = \text{const}$  с изломами скачка и  $\delta$ -функциями в давлении, рассмотренные методом сращиваемых асимптотических разложений в [13].

На основе упомянутых выше решений проведен расчет функций из установленных в [5] законов подобия. Получены также простые, аппроксимационные аналитические выражения для этих функций. Обработка большого количества численных и экспериментальных данных, полученных различными авторами, показала, что имеется корреляция как интегральных, так и локальных аэродинамических характеристик по параметру подобия  $\Omega$  в широком диапазоне его изменения, охватывающем оба характерных режима обтекания. Хотя первоначально асимптотическая теория строилась в предположении  $\epsilon < 1$ , оказалось что на самом деле она применима в более широком интервале изменения определяющих параметров и учет первого приближения уточняет ньютоновские значения аэродинамических характеристик уже начиная с величин  $\epsilon < 1$ . Об этом свидетельствует данное на фиг. 1 сопоставление коэффициентов подъемной силы  $c_y$ , сопротивления  $c_x$  (без учета трения) и продольного момента  $m_z$  треугольного плоского крыла по настоящей теории для  $\varphi = 30^\circ$  (сплошные линии) и ньютоновских зависимостей (штриховые линии) с численным расчетом (точки 1 —  $M_\infty = 8$  [14], точки 2 —  $M_\infty = 10$  [15]) и показанное на фиг. 2 сравнение безразмерного давления  $p = p^0/p_\infty$  в плоскости симметрии при  $\varphi = 30^\circ$ ,  $M_\infty = 11,8$  с экспериментом [16] (вертикальные штрихи). Наряду с этим определяется форма головного скачка уплотнения, поле скоростей и форма поверхностей тока в ударном слое и т. п.

Для важного класса крыльев, близких по форме к плоскому треугольному крылу, путем линеаризации около присоединенного плоского скачка уплотнения уравнение (1.7) сводится к линейному дифференциальному уравнению гиперболического типа для возмущения поверхности скачка  $s$  [17]

$$s_{xx} + 2Ts_{xz} - (1 - T^2)s_{zz} = K_b(x, z)$$

$$T = 1/2 (\Omega - \sqrt{\Omega^2 - 4})$$

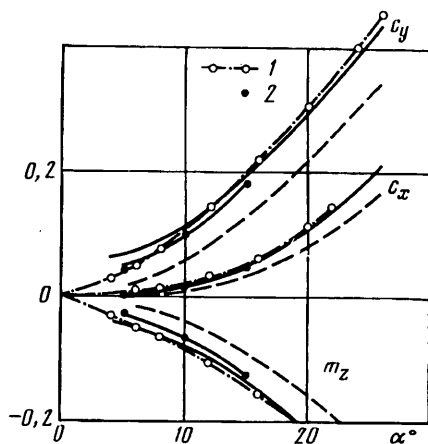
где  $K_b$  — кривизна крыла вдоль линий тока базового течения. Это уравнение имеет два семейства акустических характеристик

$$z = \mp k_{1,2}x + \text{const}, \quad k_{1,2} = 1 \mp T$$

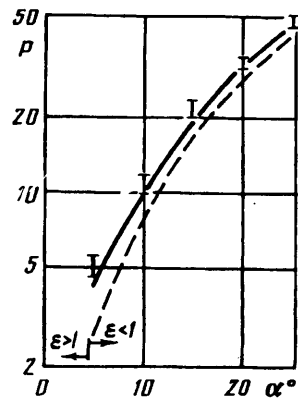
Еще одно семейство характеристик, появлявшееся в решении [18] методом интегральных соотношений за счет приближенной постановки задачи, здесь не возникает. В линеаризованной постановке исследовано влияние скругления вершины треугольного крыла; показано также, что изгиб кромки в плане с уменьшением стреловидности приводит к появлению на крыле области повышенного давления (и теплопередачи), которую можно ликвидировать путем поперечного искривления поверхности. Позднее в [19] дана процедура построения возмущенного решения в виде степенных рядов и оценка радиуса сходимости.

Для решения задачи в общем случае обтекания крыла произвольной формы с присоединенным скачком в [20] разработан эффективный численный метод, основанный на сведении (1.7) к некоторому вариационному уравнению. Численные решения нелинейной задачи подтвердили основные тенденции, обнаруженные при линеаризованном подходе.

3. Вследствие значительного повышения температуры за сильным скачком



Фиг. 1



Фиг. 2

уплотнения в ударном слое нужно учитывать реальные свойства воздуха. Если протекающие в нем физико-химические процессы являются равновесными (при умеренных высотах полета), то по сравнению со случаем совершенного газа возникают отличия в основном количественного характера, поскольку малый параметр теории ударного слоя  $\epsilon$  будет вычисляться по эффективному показателю адиабаты. Появляются также дополнительные параметры подобия, связанные с конкретным видом уравнения состояния [21], что, однако, не влияет на решение газодинамической части задачи, описанное выше для совершенного газа. По этой причине оно может использоваться и в случае равновесно реагирующего воздуха в сжатом слое.

В то же время с ростом высоты полета длины релаксации увеличиваются и появляется необходимость учета неравновесного характера физико-химических процессов. Для этого главный член разложения плотности в (1.1) нужно считать переменным. В результате возникают качественные отличия рассматриваемого течения от случаев обтекания совершенным газом или равновесно реагирующим воздухом. Например, обтекание плоского треугольного крыла теряет свойство коничности.

Система уравнений неравновесного ударного слоя в следующем приближении к ньютоновскому разделяется на газодинамическую часть относительно компонент вектора скорости и давления с некоторым распределением плотности и химико-кинетическую часть, состоящую из одномерных (вдоль линий тока) уравнений для набора параметров, характеризующих состав и состояние газа, и плотности  $\rho(x - \xi)$ , которую нужно использовать в первой части [22, 23]. Уравнения газодинамической части при произвольном распределении плотности могут быть проинтегрированы аналогично разд. 1 с использованием установленного свойства сохранения поточной составляющей завихренности, отнесенной к плотности газа, вдоль линий тока  $D(w_y/\rho) = 0$ . В итоге основное уравнение в форме (1.9) обобщается следующим образом:

$$S(x, z) = B(x, z) + \int_{\xi_b}^x \frac{\zeta_z(x, \xi, z)}{\rho(x - \xi)} d\xi \quad (3.1)$$

Поскольку при обтекании крыла малого удлинения линии тока близки к прямолинейным, плотность вполне можно определять из численного решения одномерной задачи о неравновесном течении газа за ударной волной при соответствующих параметрах набегающего потока и постоянных давления и энтальпии. Для использования в (3.1) и других формулах, обобщающих (1.5), полученная расчетом функция  $\rho$  аппроксимировалась простыми аналитическими формулами, причем в зоне существенно неравновесного течения она оказалась почти линейной

по логарифмической координате, содержащей параметр бинарного подобия  $\Lambda = \rho_\infty L / V_\infty \cos \alpha$

$$\rho(x - \xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x - \xi \leq \sigma_f \\ 1 + K_n \ln \frac{x - \xi}{\sigma_f}, & \sigma_f \leq x - \xi \leq \sigma_{eq} \\ 1 + \Delta\rho, & x - \xi \geq \sigma_{eq} \end{cases}$$

$$\sigma_f = \frac{10^f}{\Lambda}, \quad \sigma_{eq} = \frac{10^{eq}}{\Lambda}, \quad K_n = \frac{\Delta\rho}{\ln(\sigma_{eq}/\sigma_f)}$$

где величины  $l_f, l_{eq}, \Delta\rho$  берутся из расчета. При этом вся информация о неравновесности передается через три аппроксимационные постоянные  $\sigma_f, \sigma_{eq}, K_n$ , характеризующие длину зоны замороженного течения за скачком, длину релаксации и градиент плотности существенно неравновесного течения.

По сравнению с совершенным газом влияние неравновесности состоит в уменьшении толщины ударного слоя за счет продольного искривления скачка. Изменение давления по хорде становится немонотонным: неравновесное давление всегда меньше замороженного значения, но может быть и меньше равновесного предела и стремиться к нему снизу. В ряде случаев такой неравновесный заброс сопровождается даже изменением знака поправки к ньютоновскому значению давления. Соответствующая немонотонность между предельными замороженным и равновесным пределами обнаружена и для поведения интегральных аэродинамических характеристик крыльев сложной формы в плане.

При скоростях входа в атмосферу порядка второй космической необходимо учитывать тепловое излучение газа в ударном слое, которое также вызывает существенное понижение температуры и повышение плотности. Газодинамическая часть этой задачи та же, что и в предыдущем случае, а распределение плотности вдоль линий тока в оптически тонком слое (приближение объемного высвечивания) определяется в аналитическом виде из уравнения энергии и содержит основной параметр подобия  $K_n$ , характеризующий влияние излучения [24]

$$\rho(x - \xi) = [1 + K_n(x - \xi)]^{1/(n+4)}$$

где  $n$  — показатель степенной зависимости планковского среднего коэффициента поглощения от температуры. Обусловленное излучением охлаждение газа также уменьшает толщину сжатого слоя, но давление при этом уменьшается вдоль хорды крыла монотонно [24].

Если ударный слой не является оптически тонким, то распределение плотности может быть найдено из других приближенных моделей или путем аппроксимации данных численного расчета одномерных течений излучающего газа. Интересно, что, согласно установленному свойству сохранения, возрастанием плотности в процессе релаксации или охлаждения газа излучением влияет на кинематику течения и ведет к росту завихренности вниз по потоку.

4. Все результаты, о которых шла речь выше, получены для случая обтекания крыла малого удлинения  $\lambda \sim \epsilon^{1/2}$  под конечным углом атаки ( $\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha \sim 1, \epsilon \rightarrow 0$ ). В [25] исследовано гиперзвуковое обтекание плоской пластины, перпендикулярной потоку ( $\alpha = \pi/2$ ), и приведены оценки, согласно которым этот анализ применим и в более общем случае обтекания плоского крыла малого удлинения  $\lambda \sim \epsilon^{1/2}$  при очень близких к  $\pi/2$  углах атаки ( $\cos \alpha \sim \epsilon$ ), когда выполняется правило полос вдоль размаха и в каждом поперечном сечении  $x = \text{const}$  имеем двумерное течение. Казалось бы, результаты [25] при  $\alpha \approx \pi/2$  ( $\Omega = 0$ ), по крайней мере интегральные характеристики, можно получить, переходя к пределу  $\Omega \rightarrow 0$  в теории для конечных  $\alpha$  [5]. Однако, как указано еще в [5], это не так. Дело в том, что разложения (1.1) и вместе с ними вся эта теория становятся непригодными при  $\cos \alpha \sim \epsilon^{1/2}$ , т. е. раньше, чем вступают в силу закономерности [25].



Асимптотическая теория обтекания крыла малого удлинения  $x^\circ/L_1 = \varepsilon^{1/2}x$ ,  $z^\circ/L_1 = z$  в промежуточном диапазоне углов атаки, близких к  $\pi/2$  [26], в качестве основного параметра подобия использует величину

$$A = (\pi/2 - \alpha)/\varepsilon^{1/2} \sim 1 \quad (4.1)$$

В отличие от теории при конечных углах атаки здесь в ударном слое оказались необходимыми выделять две характерные области, причем в обеих разложения для давления и плотности сохраняют вид (1.1) с учетом (4.1). Наряду с этим в первой из них, внешней, примыкающей к головному скачку  $u = [\Delta(x, z) - y^\circ/L_1]/\varepsilon^{1/2} \sim 1$ , имеем следующие разложения компонент скорости и уравнения первого приближения:

$$\frac{u^\circ}{V_\infty} = \varepsilon^{1/2}u + \dots, \quad \frac{v^\circ}{V_\infty} = -\varepsilon v + \dots, \quad \frac{w^\circ}{V_\infty} = \varepsilon^{1/2}w + \dots \quad (4.2)$$

$$v v_y + w v_z = -p_y, \quad v w_y + w w_z = 0, \quad v_y + w_z = 0, \quad u = A$$

Здесь аналогично [25] в каждой плоскости  $x \approx \text{const}$  имеем двумерное течение (правило полос вдоль размаха). Однако в примыкающей к поверхности крыла внутренней области  $Y = y^\circ/\varepsilon^{1/2}L_1 \sim 1$ , где сосредоточены линии тока, входящие в ударный слой вблизи плоскости симметрии, поперечное течение более медленное

$$u^\circ/V_\infty = \varepsilon^{1/2}A + \dots, \quad v^\circ/V_\infty = \varepsilon^{3/2}V + \dots, \quad w^\circ/V_\infty = \varepsilon W + \dots$$

вследствие чего становится существенной его пространственность и влияние бокового градиента давления  $\Pi = -p_z$ , причем последний ввиду постоянства давления поперек внутренней области определяется внешним течением. В результате получим

$$A W_x + V W_y + W W_z = \Pi(x, z), \quad V_y + W_z = 0 \quad (4.3)$$

Поэтому боковая составляющая скорости  $W$  уже не сохраняется вдоль линий тока, но по-прежнему сохраняется поточная составляющая завихренности  $\Gamma^{-1} = W_y$ , и тогда нелинейная система (4.3) сводится к линейному уравнению

$$A \Gamma_x + W \Gamma_z + \Pi(x, z) \Gamma_w = 0$$

В результате асимптотического сращивания внешнего и внутреннего решений установлено, что толщина ударного слоя больше, чем при  $\alpha \sim 1$  и, как и в [25], имеет порядок  $\Delta \sim \varepsilon^{1/2} \ln \varepsilon^{-1/2}$ .

Форма скачка связана с формой крыла  $Y = B(x, z)$  сложным образом

$$S(x, z) = a(x) \ln [a W_b(x, z)] - B(x, z) + \\ + \int_{z_c(x)}^z \frac{dz_1}{S_z(x, z_1)} + \int_{w_b}^\infty \left[ \frac{a(x)}{W} - \Gamma(x, W, z) \right] dW$$

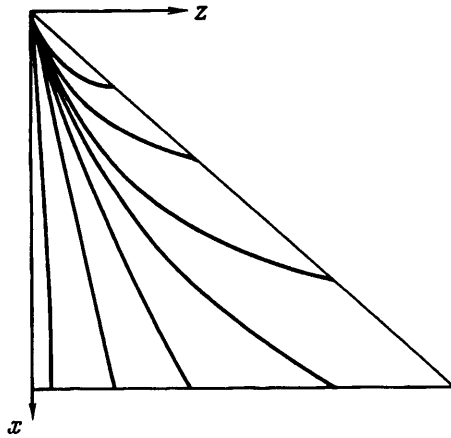
$$A (W_b)_x + W_b (W_b)_z = \Pi(x, z), \quad a(x) = [S_{zz}(x, 0)]^{-1}$$

поскольку асимптотические значения функции  $\Gamma_w = a(x)/W$ , приходящие из внешней области во внутреннюю, распространяются там вдоль линий тока, определяемых характеристической системой дифференциальных уравнений

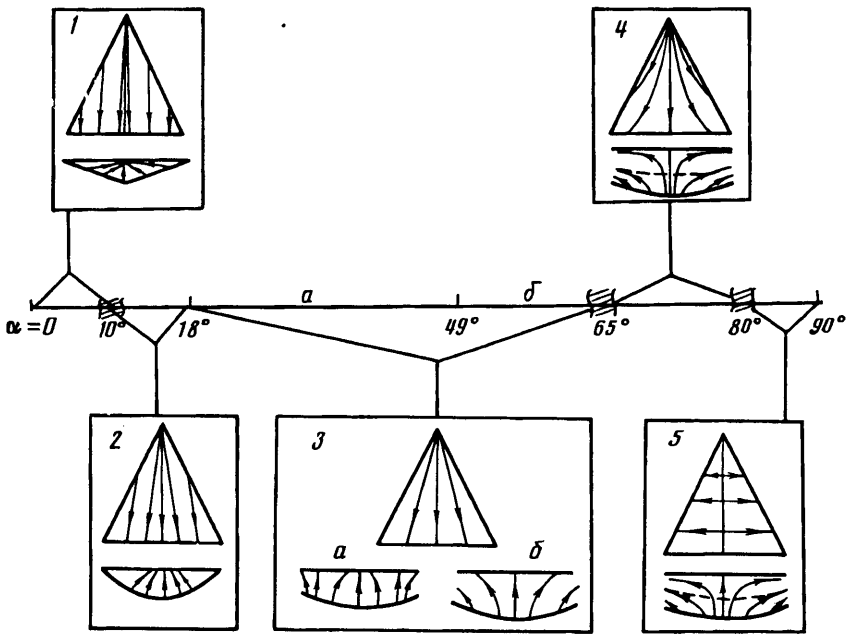
$$\frac{dx}{A} = \frac{dz}{W} = \frac{dW}{\Pi(x, z)}$$

$$\Pi = -G_z, \quad G = (1 - S_z^2) S S_z^{-2} S_{zz} - (1 + A^2 + S_z^2)$$

Скачок уплотнения остается присоединенным к вершине и при обтекании узкого треугольного крыла под большими углами атаки (4.1) реализуется коническое течение. Соответствующая картина линий тока, полученная при решении

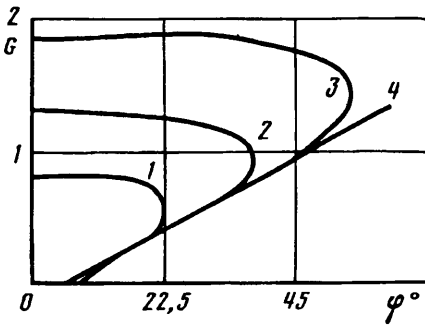


Фиг. 3

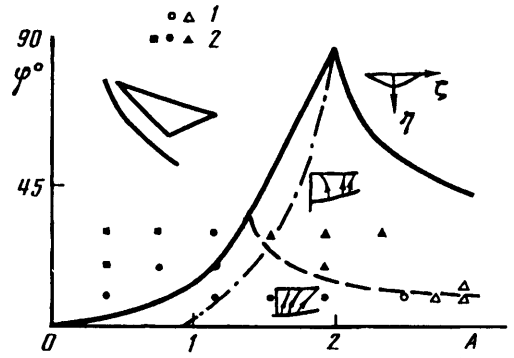


Фиг. 4

обратной задачи со скачком конической формы, показана на фиг. 3. Данный режим обтекания занимает промежуточное положение и является «мостом» между случаем конечных углов атаки, с одной стороны, а с другой — случаем очень близких к  $\pi/2$  углов атаки. В первом случае согласование результатов осуществляется путем предельных переходов  $A \rightarrow \infty$  и  $\Omega \rightarrow 0$  в соответствующих решениях. При  $A \rightarrow \infty$  и во внешней области имеем пространственное течение, но без бокового градиента давления (1.1), (1.2). При  $\Omega \rightarrow 0$  отход скачка имеет логарифмическую особенность и для  $\alpha$  из (4.1), т. е.  $\Omega \sim \varepsilon^{1/2}$ , получаем нужный порядок толщины ударного слоя. Во втором случае предельный переход  $A \rightarrow 0$  дает и во внутренней области двумерное течение, подчиняющееся правилу полос [25]. Рассмотрение этого режима позволяет дать полную классификацию режимов обтекания треугольного крыла малого удлинения при  $0 < \alpha \leq \pi/2$ . Фигура 4 показывает картину линий тока на крыле и в поперечной плоскости  $x = \text{const}$  для характерных режимов: 1 — малых углов атаки ( $\Omega \rightarrow \infty$ ), конечных  $\alpha (\Omega \sim 1)$



Фиг. 5



Фиг. 6

2 —  $\Omega \geq 2$ , 3 —  $\Omega < 2$  (3, а —  $\Omega_* < \Omega < 2$ , 3, б —  $\Omega < \Omega_*$ ), 4 — близких к  $\pi/2$  углов  $\alpha$  (4.1) и 5 — очень близких к  $\pi/2$  углов атаки, цифры снизу от оси  $\alpha$  соответствуют случаю  $M_\infty = \infty$ ,  $\kappa = 1,4$ ,  $\varphi = 15^\circ$ ).

На нижней поверхности тонкого крыла, имеющего конечный размах (или угол при вершине)  $\lambda$ ,  $\varphi \sim 1$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ударный слой ограничен скачком уплотнения, который присоединен к передней кромке при любом конечном угле атаки. Наиболее общий вариант теории ударного слоя для таких крыльев соответствует как раз большим углам атаки (4.1) [27, 28]. Подобно теории [5] здесь угол Маха в сжатом слое одного порядка с углом при вершине. Но поскольку наряду с этим скорость газа оказывается порядка скорости звука, указанная теория описывает все три качественно различных режима обтекания: со скачком, присоединенным к передней кромке, присоединенным только к вершине и полностью отсоединенным. К тому же наклоны скачков уплотнения, описываемых слабой и сильной ветвями решения, имеют одинаковый порядок по  $\varepsilon$ , что делает гораздо более вероятным возникновение сильных скачков, отмечавшееся в [18]. Асимптотические разложения компонент скорости при этом аналогичны (4.2), толщина ударного слоя  $\Delta y^* / L \sim \varepsilon^{1/2}$  и течение описывается уравнениями

$$Du = 0, \quad Dv = -p_y, \quad Dw = 0$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad D = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Эти уравнения проинтегрированы в аналитическом виде как для конического [27], так и общего трехмерного [28] случаев обтекания, когда вдоль линий тока постоянна поточная составляющая завихренности [29]

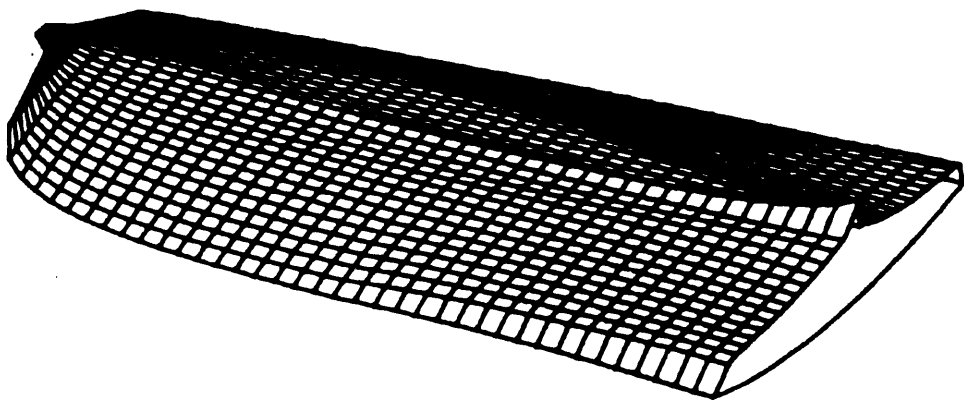
$$D(\omega_w) = 0, \quad \omega_w = \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + w^2}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{w}{u} \right)$$

В новом законе подобия для коэффициента нормальной силы плоского треугольного крыла при больших углах атаки [30]

$$\frac{c_n - 2 \sin^2 \alpha - 2/\kappa M_\infty^2}{2\varepsilon \sin^2 \alpha} = G(A, \varphi)$$

функция  $G$  зависит в основном от  $\varphi$  для слабого скачка и в основном от  $A$  для сильного (соответственно части кривых снизу и сверху от точки с вертикальной касательной на фиг. 5,  $A = 1,2; \sqrt{2}; 1,6; 1,8-2$  для кривых 1, 2, 3, 4). Этот факт можно, видимо, использовать для идентификации той или иной ветви скачка, располагая данными о нагрузке на крыло.

Поскольку зависимость от числа  $M_\infty$ , показателя адиабаты и угла атаки учитывается одним параметром подобия  $A$  (4.1), то оказалось возможным провести



Фиг. 7

классификацию режимов обтекания плоского треугольного крыла в плоскости  $A, \varphi$  (фиг. 6), удовлетворительно согласующуюся с численными ([14], точки 1) и экспериментальными ([31], точки 2) данными. Наибольшие расхождения возникают в определении границы между режимами обтекания со скачком, присоединенным к вершине, и полностью отошедшим скачком. Отсоединению скачка уплотнения от вершины предшествует возникновение существенно пространственного обтекания с присоединенным к вершине и продольно искривленным скачком [31], которое не описывается в коническом приближении и требует учета влияния задней кромки вверх по потоку в местных дозвуковых зонах слева от штрихпунктирной линии. Приведенные на фиг. 4, 6 классификации дополняют данные из [18, 32], так как позволяют через изменение параметра  $\varepsilon$  учесть влияние реальных свойств воздуха.

5. Развитый аналитический аппарат гиперзвуковой теории крыла позволил в обозримом виде сформулировать вариационную задачу определения облика крыла, имеющего максимальное аэродинамическое качество, и получить решение при различного рода дополнительных условиях. Используя интегральные законы сохранения массы и импульса, выразим компоненты аэродинамической силы на нижнюю поверхность крыла с присоединенным к передней кромке  $x = x_\varepsilon(z)$  скачком через интегралы по площади кормового сечения ударного слоя. Далее с помощью аналитического решения (1.5), (1.6) эти двойные интегралы сводятся к однократным, что принципиально упрощает проблему. Аэродинамическое качество в следующем приближении к ньютоновскому [33]

$$K = \operatorname{ctg} \alpha + \frac{2\varepsilon}{\sin 2\alpha} (1 - Q), \quad \beta = \frac{L_1}{2L\varepsilon^{1/2} \operatorname{tg} \alpha} \quad (5.1)$$

$$Q = \left[ \int_0^\beta \{S(1, z) - S[x_\varepsilon(z), z]\} dz \right] \left[ \int_0^\beta [1 - x_\varepsilon(z)] dz \right]^{-1} \quad (5.2)$$

будет превосходить ньютоновское значение  $K_N = \operatorname{ctg} \alpha$ , если  $Q < 1$ . Задача нахождения максимального качества  $K_{\max}$  таким образом формулируется как вариационная задача поиска минимума функционала  $Q$ . Считаются заданными траекторные параметры, длина крыла  $L$ , размах  $L_1$ , а в качестве изопериметрических условий — площадь в плане, подъемная сила, объем и т. д.

Согласно формуле (5.1), для  $Q$  можно сначала найти  $K_{\max}$ , если оптимальным образом подобрать конфигурацию головного скачка уплотнения и передней кромки в плане. Форма поверхности оптимального крыла  $B(x, z)$  определяется в результате решения обратной задачи (1.9). Условие ее разрешимости также накладывает дополнительные связи при постановке вариационной задачи. Наибольшие приращения к  $K_N$  следует ожидать при  $Q < 0$ , т. е. (5.2) когда проекция передней кромки на плоскость  $x = 1$  лежит ниже сечения скачка этой плоскостью. Поиск формы скачка и передней кромки, дающих  $Q_{\min}$ , проводился в определенном классе функций, удовлетворяющих этому условию, с набором свободных параметров, определявшихся из условия минимума  $Q$ . Форма скачка взята в виде

$$S(x, z) = kz^n \ln(\delta + x) \quad (5.3)$$

с параметрами  $k$ ,  $n$ ,  $\delta$ . В результате численно-аналитического решения вариационной задачи получается оптимальная форма крыла с отогнутой вниз передней частью вблизи кромок, вогнутой нижней поверхностью и характерной резкой впадиной в кормовой части, которую можно объяснить проявляющимися и в рассматриваемом классе тонких крыльев оптимальными свойствами пирамидальных и лепестковых тел со звездообразным сечением [34, 35].

Если в задаче считается фиксированной площадь крыла в плане, то при ее значениях, приближающихся к площади описанного прямоугольника, оптимальное крыло имеет носовой срез (фиг. 7). В этом примере, относящемся к случаю  $M_\infty = 20$ ,  $\alpha = 30^\circ$ , имеем  $K_{\max} = 2,34$ , что на 35% превышает  $K_N$  или ту же величину для плоского крыла с присоединенным скачком при прочих равных условиях ( $Q = 1$ ). При уменьшении площади в плане носовой срез исчезает, а выигрыш в качестве несколько снижается. Учет высокотемпературных реальных свойств воздуха приводит к изменению конфигурации нижней поверхности оптимального крыла и уменьшению  $K_{\max}$ , тогда как форма оптимального обвода крыла в плане остается практически без изменений.

При задании функционального вида скачка параметрической зависимостью (5.3) обнаружены основные особенности геометрии крыла, увеличивающие качество. Однако величина  $K_{\max}$  крыльев, обладающих этими особенностями в иной пропорции и генерирующих функционально отличающийся от (5.3) скачок, может оказаться несколько больше.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
2. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic flow theory. V. 1. Inviscid flows. N. Y.; L.: Acad. Press, 1966. 602 p.
3. Нейланд В. Я. Асимптотическая теория взаимодействия и отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке газа // Механика и научно-технический прогресс. Т. 2. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. С. 128—145.
4. Гонор А. Л. Обтекание треугольного крыла гиперзвуковым потоком // ПММ. 1970. Т. 34. № 3. С. 481—490.
5. Messiter A. F. Lift of slender delta wings according to Newtonian theory // AIAA Journal. 1963. V. 1. № 4. P. 794—802.
6. Сычев В. В. О гиперзвуковом обтекании тонких тел при больших углах атаки // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131. № 4. С. 776—779.
7. Голубинский А. И., Голубкин В. Н. О пространственном обтекании тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 5. С. 1032—1034.
8. Майкапар Г. И. Вихри за головной ударной волной // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 4. С. 162—165.
9. Голубкин В. Н. Об определении завихренности на крыле малого удлинения при гиперзвуковом обтекании // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 5. С. 175—178.
10. Голубкин В. Н., Негода В. В. К расчету обтекания треугольных крыльев в приближении тонкого ударного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 10. С. 1530—1537.
11. Голубинский А. И. Обтекание гиперзвуковым потоком треугольных крыльев определенного класса, установленных под углом атаки, с присоединенным скачком уплотнения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 5. С. 73—78.
12. Голубкин В. Н. Обтекание плоского треугольного крыла гиперзвуковым потоком газа // Уч. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 6. С. 1—10.
13. Голубинский А. И., Голубкин В. Н. Анализ особенностей в решении задачи гиперзвукового обтекания треугольного крыла малого удлинения // Уч. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18. № 2. С. 20—29.
14. Косых А. П., Минайлос А. Н. Аэродинамические характеристики крыльев простейших форм на сверхзвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1891. 35 с.
15. Воскресенский Г. П., Ильина А. С., Татаренчик В. С. Сверхзвуковом обтекании крыльев с присоединенной ударной волной // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1590. 138 с.
16. Barber E. A. Some experiments on delta wings in hypersonic flow // AIAA Journal. 1966. V. 4. № 1. P. 72—83.
17. Голубкин В. Н. К теории крыла малого удлинения в гиперзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 112—117.
18. Черный Г. Г. Крылья в гиперзвуковом потоке // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 616—634.
19. Голубинский А. И., Негода В. В. Гиперзвуковое пространственное обтекание крыла малого удлинения // Уч. зап. ЦАГИ. 1983. Т. 14. № 1. С. 9—17.
20. Голубкин В. Н., Негода В. В. Численный расчет неравновесного обтекания крыла в приближении тонкого ударного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25. № 4. С. 599—608.
21. Голубинский А. И., Негода В. В. Закон подобия при обтекании крыла малого удлинения гиперзвуковым потоком равновесно реагирующего воздуха // Уч. зап. ЦАГИ. 1983. Т. 14. № 3. С. 21—29.
22. Голубинский А. И., Голубкин В. Н. О гиперзвуковом обтекании крыла малого удлинения неравновесным потоком газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 125—128.

23. Кузнецов М. М. О нестационарном пространственном обтекании тонкого крыла гиперзвуковым потоком релаксирующего газа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 5. С. 1090—1093.
24. Голубинский А. И., Голубкин В. Н. Гиперзвуковое пространственное обтекание крыла потоком излучающего газа // ПМТФ. 1983. № 6. С. 71—78.
25. Коул Ж., Брайнерд Ж. Обтекание тонких крыльев гиперзвуковыми потоками при больших углах атаки // Исследование гиперзвуковых течений / Под ред. Ф. Риддела. М.: Мир, 1964. С. 233—247.
26. Голубкин В. Н., Негода В. В. Расчет гиперзвукового обтекания наветренной стороны крыла малого удлинения при больших углах атаки // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 10. С. 1586—1594.
27. Голубкин В. Н. Обтекание треугольного крыла гиперзвуковым потоком газа при больших углах атаки // ПММ. 1984. Т. 48. № 3. С. 376—382.
28. Голубкин В. Н. Гиперзвуковое обтекание крыла при больших углах атаки // ПМТФ. 1984. № 4. С. 65—70.
29. Голубинский А. И., Голубкин В. Н. О некоторых свойствах сохранения в газовой динамике // ПММ. 1985. Т. 49. № 1. С. 115—119.
30. Голубкин В. Н., Негода В. В. Аэродинамические характеристики треугольного крыла в гиперзвуковом потоке при больших углах атаки // Уч. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 1. С. 26—32.
31. Башкин В. А. Экспериментальное исследование обтекания плоских крыльев при числах  $M_\infty = 3$  и 5 в диапазоне углов атаки от нуля до  $90^\circ$  // Тр. ЦАГИ. 1970. Вып. 1175. С. 124—169.
32. Башкин В. А. Треугольные крылья в гиперзвуковом потоке. М.: Машиностроение, 1984. 136 с.
33. Голубкин В. Н., Негода В. В. Оптимизация пространственной формы несущих тел малого удлинения при гиперзвуковых скоростях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 12. С. 1858—1870.
34. Майкапар Г. И. О волновом сопротивлении неосесимметричных тел в сверхзвуковом потоке // ПММ. 1959. Т. 23. № 2. С. 376—383.
35. Гонор А. Л. Точное решение задачи обтекания некоторых пространственных тел сверхзвуковым потоком газа // ПММ. 1964. Т. 28. № 5. С. 974—976.

Москва

Поступила в редакцию  
6.II.1992