

УДК 533.6.011:519.63

© 1992 г. А. А. МАРКОВ

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВЯЗКИХ ПОТОКОВ МАРШЕВЫМ МЕТОДОМ С ГЛОБАЛЬНЫМИ ИТЕРАЦИЯМИ ДАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

В последних исследованиях по численному моделированию высокоскоростных стационарных течений вязкого газа отмечалась возможность повышения эффективности алгоритмов численного решения уравнений Навье — Стокса путем использования методов пошагового (маршевого) интегрирования в доминирующем направлении [1—5]. Учет распространения возмущений вверх по потоку в дозвуковых слоях достигается глобальными итерациями, которые основаны на уточнении всего поля потока последовательными маршевыми расчетами от начального сечения  $x = c_1$  до конечного сечения  $x = c_2$  вдоль доминирующего направления  $x$  [5, 6]. Преимущества маршевых методов проявляются в наибольшей мере при численном моделировании трехмерных течений в областях большой протяженности по маршевому направлению. Ограничением к применению маршевого метода является наличие развитых зон продольного отрыва [7, 8]. Отмеченные подходы нашли применения во многих практических приложениях: при расчете потоков около элементов летательных аппаратов, в воздухозаборниках, в каналах, диффузорах, струях и др. [6—14].

Главная трудность решения стационарных уравнений Навье — Стокса для дозвуковых потоков состоит в эллиптическом характере уравнений. Эллиптичность уравнений в дозвуковых слоях обусловлена градиентом давления и диффузионными членами в направлении потока, отдельные черты эллиптичности проявляются при выделении головной ударной волны в задачах расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с учетом вязкости маршевыми методами [6, 8]. Диффузионные члены в направлении потока дают, однако, незначительный вклад для широкого класса течений и могут не учитываться. Градиент давления вдоль потока весьма важен и развиты различные приближенные методы его учета, делающие возможным пошаговое интегрирование стационарных уравнений Навье — Стокса без диффузионных членов вдоль потока [8].

Алгоритмы маршевого интегрирования существенно более экономичны, чем алгоритмы итерирования всего поля течения. Маршевые методы первоначально применялись для расчета внутренних течений. Их главная трудность — в обеспечении сохранения массы при решении различных уравнений Пуассона для давления. Другая трудность этих подходов в том, что система определяющих уравнений не решалась совместно в каждом сечении  $x = c$  и вопрос о совместимости откладывался до проведения итераций [12]. Все эти методы были развиты для расчета дозвуковых течений. Расчет сверхзвуковых потоков сравнительно проще, чем дозвуковых потоков, так как  $\partial p / \partial x$  не вносит эллиптичность в уравнения Навье — Стокса с отброшенными вторыми производными (диффузионными членами) вдоль направления потока  $x$  в области,  $M < 1$ , где  $M$  — локальное число Маха для продольной составляющей скорости. Однако поток тормозится около твердой стенки и имеется сравнительно тонкая дозвуковая область около стенки, в которой  $\partial p / \partial x$  обуславливает эллиптичность. Различные способы параболлизации для расчета сверхзвуковых вязких течений предложены в работах [1—14].

В настоящей работе излагается метод расчета стационарных трехмерных сжимаемых и несжимаемых потоков на основе упрощенных уравнений Навье — Стокса, которые записываются в инвариантной консервативной форме в произвольной криволинейной системе координат для контрвариантных компонент вектора скорости и тензоров конвективного переноса и вязких напряжений. В определяющих уравнениях продольный градиент давления определяется в ходе глобальных итераций поля

<sup>1</sup> По материалам доклада, прочитанного на VII съезде по теоретической и прикладной механике, Москва, август 1991 г. Представлено В. И. Полежаевым.

давления, что позволяет учесть распространение возмущений вверх по потоку в дозвуковых слоях и при расчете несжимаемых течений. Рассмотрено обобщение способов параболизации [8], исследованы процедуры релаксации давления в ходе глобальных итераций. Данный метод не требует решения уравнений Пуассона для давления, сохраняет поток массы.

Представлены некоторые результаты расчетов упрощенных уравнений Навье — Стокса, обсуждаемых ниже, для задач сверхзвукового обтекания затупленных тел с биеллиптическим поперечным сечением в окрестности лобовой части и около боковой поверхности на значительном удалении от лобового затупления. Расчеты проводятся от критической линии тока с использованием глобальных итераций в области лобового затупления с превалирующей дозвуковой зоной. Приведены результаты расчета на траектории воздушно-космического самолета и результаты моделирования нестационарных процессов управления вязким ударным слоем в окрестности критической линии тока. Изложены результаты аналитического обоснования модели трехмерного вязкого ударного слоя малой и конечной толщины с учетом сильного дозвукового вдува с поверхности тела [15, 16].

Приведены результаты численного моделирования несжимаемых потоков в каналах с вращающимися стенками, потоков в искривленных каналах с биеллиптическим поперечным сечением. Данные расчетов указывают на развитие трехмерных структур потока с сильным вторичным полем скорости [14].

**1. Модели упрощенных уравнений Навье — Стокса для численного исследования трехмерных течений в ударных слоях.** Приведем упрощенные уравнения Навье — Стокса, используемые ниже: уравнения вязкого слоя (ВС), уравнения вязкого слоя с учетом азимутальной диффузии (ВСАД). Область применимости различных упрощенных уравнений Навье — Стокса обсуждается в [5—11]. Ниже термин «уравнения вязкого ударного слоя» (ВУС) используется для уравнений ВС, дополненных граничными соотношениями за головной ударной волной.

Применяются различные формы уравнений ВУС [6—11, 13—19], различающиеся точностью учета вязких эффектов и трактовкой уравнения для составляющей импульса по нормали  $z$  к обтекаемой поверхности. Впервые в [19] предложена модель ВУС, в которой учитываются вязкие члены по координате  $z$  в уравнении для нормальной составляющей импульса. Аналогичный подход используется в настоящей работе. Сравнительный анализ различных моделей ВУС [11] показывает наилучшую точность модели [19] для ряда тестовых примеров.

Используем сокращенную запись уравнений Навье — Стокса, ВС, ВСАД в виде

$$L_{NS}(f) = 0, L_{VL}(f) = 0, L_{VLAD}(f) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь уравнения (1.1) записаны в криволинейных координатах  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , причем  $x^3$  ортогональны поверхности  $\Gamma_w$  обтекаемого тела, координатное направление  $x^1$  предполагается далее маршевым. Дальнейшая конкретизация системы координат определяется спецификой решаемой задачи,  $f = (u^1, u^2, u^3, p, h)^T$ ,  $x^1 \equiv x$ ,  $x^2 \equiv y$ ,  $x^3 \equiv z$

$$L_{NS}(f) \equiv L_0(f) - \frac{1}{Re} \left\{ \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \Phi^{ij}(f) \frac{\partial f}{\partial x^j} + \Psi(f) \right\} \quad (1.2)$$

$$L_0(f) \equiv \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} A^j(f) + D(f) \quad (1.3)$$

$$L_{VL}(f) \equiv L_0(f) - \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \Phi^{33}(f) \frac{\partial f}{\partial z} + \Psi(f) \right\} \quad (1.4)$$

В случае уравнений ВСАД в формулах (1.2) — суммирование по  $i, j$  от 1 до 3 с ограничением  $j \neq 1$  при  $i = 1$ .

Запишем уравнение ВС и ВСАД в инвариантной, консервативной форме, удобной для расчета потоков с внутренними ударными волнами, сдвиговыми слоями и при разрывных данных на границе, например в случае разрывных параметров вдува и др. Пусть  $y_1, y_2, y_3$  — декартовы координаты  $u^1, u^2, u^3$  —

контравариантные компоненты скорости в некоторой точке  $M_0$  пространства. Введем ковариантный и контравариантный базисы

$$a' = \left\{ \frac{\partial x^i}{\partial y_1}, \frac{\partial x^i}{\partial y_2}, \frac{\partial x^i}{\partial y_3} \right\}, \quad a_i = \left\{ \frac{\partial y_1}{\partial x^i}, \frac{\partial y_2}{\partial x^i}, \frac{\partial y_3}{\partial x^i} \right\}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$g^{ij} = a^i a^j, \quad g_{ij} = a_i a_j, \quad g^i_i = a_i a^i$$

Компоненты векторов  $A', \psi, D$  и матрицы  $\Phi^{ij}$  в уравнениях ВС и ВСАД, записанных для точки  $M_0$ , имеют следующий вид (индекс ноль опущен):

$$A' = \{A'_1, \dots, A'_5\}^T, \quad \Phi^{ij} = \|\Phi^{ij}_{mn}\|, \quad m, n = 1, \dots, 5$$

$$A'_k = \sqrt{g} (\rho u^i u^k + g^{kj} p), \quad j, k = 1, 2, 3, \quad g = \det \|g_{jk}\|$$

$$A'_4 = \sqrt{g} \rho u^i, \quad A'_5 = \sqrt{g} \rho u^i (h + e), \quad e = \frac{1}{2} g_{ij} u^i u^j \quad (1.5)$$

$$D_m = \Gamma_{ik}^m \sqrt{g} (\rho u^i u^k + g^{kj} p), \quad m = 1, 2, 3$$

$$D_4 = D_5 = 0, \quad \frac{\partial a_j}{\partial x^i} = \Gamma_{jk}^i a_k$$

$$(\Phi^{ij})_{kl} = \sqrt{g} (\mu_1 g^{ki} \delta_l^j + \mu g^{kj} \delta_l^i + \mu g^{ij} \delta_l^k), \quad k, l = 1, 2, 3$$

$$(\Phi^{ij})_{mn} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \quad n = 4, 5 \text{ или } m = 4, n = 1, \dots, 5$$

$$(\Phi^{ij})_{5n} = \sqrt{g} (\mu_1 u^i \delta_n^j + \mu g_{ns} g^{ij} u^s + \mu u^i \delta_n^j), \quad n = 1, 2, 3$$

$$(\Phi^{ij})_{54} = 0, \quad (\Phi^{ij})_{55} = \frac{\sqrt{g} \mu g^{ij}}{\text{Pr}}, \quad \mu_1 = \mu' - \frac{2}{3} \mu, \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$$

$$\Psi_m = \sqrt{g} \Gamma_{ij}^m \tau^{ij} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \sqrt{g} \mu_1 g^{mi} u^j \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^j} + \sqrt{g} \mu (g^{mj} \Gamma_{js}^i + g^{ij} \Gamma_{js}^m) u^s \right\}, \quad m = 1, 2, 3$$

$$\Psi_4 = \Psi_5 = 0$$

$$\tau^{ij} = \frac{\mu_1 g^{ij}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} u^s}{\partial x^s} + \mu g^{jk} \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \Gamma_{ks}^i u^s \right) + \mu g^{ik} \left( \frac{\partial u^j}{\partial x^k} + \Gamma_{ks}^j u^s \right)$$

$$v = u^i a_i = u_i a^i \quad (1.6)$$

Здесь  $\mu'$  — второй коэффициент вязкости ( $\mu' \ll 1$ ). Предполагается суммирование по повторяющимся латинским индексам от 1 до 3, по греческим индексам — от 1 до 2, если не оговорено особо.

Уравнения (1.1), (1.2), (1.3) записаны в безразмерных переменных (штрих относится к размерным переменным)

$$y_j' = R_0' y_j(x^1, x^2, x^3), \quad u'^i \sqrt{g_{jj}'} = V_\infty' \sqrt{g_{jj}'} u^i$$

$$g_{ii}' = (R_0')^2 g_{ii}$$

$$\rho' = \rho' \rho, \quad p' = \rho_\infty' (V_\infty')^2 p, \quad h' = (V_\infty')^2 h$$

$$\mu' = \mu'_0 \mu, \quad \mu'_0 = \mu'(T_0')$$

$$c_p T_0' = c_p T_\infty' + \frac{1}{2} (V_\infty')^2, \quad \text{Re} = \frac{R_0' \rho_\infty' V_\infty'}{\mu'_0} \quad (1.7)$$

Система уравнений ВС либо ВСАД дополняется граничными условиями на поверхности  $\Gamma_w$  обтекаемого тела либо на стенках канала

$$x^3 = \gamma_w(x^1, x^2)$$

$$h = h_w, u^j = u_w^j \text{ либо } \rho u^j = m_w^j \quad (1.8)$$

где  $h_w$  — безразмерная температура стенки,  $u_w^j, m_w^j$  — составляющие скорости вдува и потока вдуваемой массы соответственно. В дальнейшем вдув предполагается дозвуковым. В набегающем потоке ставятся условия

$$f|_{\Gamma_\infty} = f_\infty$$

$$f_\infty = \left( u_\infty^1, u_\infty^2, u_\infty^3, \frac{1}{\gamma M_\infty^2}, \frac{1}{(\gamma - 1) M_\infty^2} \right)^T$$

$$g_{ij} u_\infty^i u_\infty^j = 1 \quad (1.9)$$

Здесь  $\Gamma_\infty$  — некоторая поверхность в области невозмущенного потока. Предполагаются также заданными начальными значения искомого вектора  $f$  в сечении  $x^1 = x_0^1$ , найденные в результате расчета в окрестности критической линии тока либо известные априори (данные на входе в канал). Кроме того, в замыкающем сечении  $x^1 = x_1^1$  ставятся «мягкие граничные соотношения» для давления [3, 5, 7]. В расчете сверхзвуковых течений головная ударная волна выделяется и расчет величин на ней проводится по методу [4, 20].

Уравнения ВСАД и ВС, рассмотренные ранее, позволяют точно рассчитать невязкое ядро потока и вязкие эффекты по крайней мере с точностью теории пограничного слоя во втором приближении [22].

Результаты расчетов [10] на основе полных уравнений Навье — Стокса и уравнений ВС практически совпадают при моделировании течения около угла и хорошо соответствуют экспериментальным данным, если расчетная сетка сгущается должным образом не только по нормали к стенке, но и по продольному направлению. В случае грубых сеток по маршевому направлению результаты как полных, так и упрощенных уравнений Навье — Стокса не соответствуют данным эксперимента. Естественно заключить, что результаты расчетов уравнений Навье — Стокса, полученные на грубых сетках по маршевому направлению, вряд ли лучше соответствующих результатов для уравнений ВСАД. Использование достаточно подробных сеток по всем направлениям, включая маршевое при больших числах Рейнольдса, является в настоящее время трудной проблемой и для супер ЭВМ.

2. Об аналитическом обосновании моделей вязкого ударного слоя. Асимптотическая теория [22, 23] потоков при больших числах Рейнольдса позволяет оценить масштабы и механизмы взаимодействия между сдвиговыми слоями и внешним локально-маловязким потоком, а также обосновать используемые при численном моделировании упрощенные постановки задач на основе композитных уравнений. Обзор работ по асимптотическому анализу потоков вязкой жидкости и газа опубликован в [6, 21–24]. В [15, 16] дано обоснование композитной системы уравнений ТВУС для трехмерных течений при различных режимах течения, когда толщина  $\Delta$  ударного слоя мала:  $O(\alpha^D)$ , где  $D$  — параметр

$$\alpha^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{Re_0}, \quad \delta = \frac{1}{(\gamma - 1) M_\infty^2}$$

$$M_\infty \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

Толщина ударного слоя около летательных аппаратов зависит от геометрии тела, отношения плотностей и скоростей в набегающем потоке и в ударном слое (см. [16]). При больших числах Маха ударный слой тонкий в лобовой части и

около наветренной части поверхности тела под большим углом атаки. Приведем результаты асимптотического анализа величин в трехмерном ударном слое толщины  $\Delta = O(\alpha^D)$  около гладкой поверхности в случае предельного перехода (2.1).

Воспользуемся системой уравнений Навье — Стокса в криволинейных координатах  $x^i$ , которые связаны с поверхностью тела  $\Gamma_w$ . Предполагаем, что координатные линии  $x^3$  ортогональны поверхности  $\Gamma_w$  и координатным линиям  $x^1, x^2$ .

Градиенты давления  $\partial p / \partial x^\beta, \beta = 1, 2$ , существенны в подслое  $\Delta_p \geq x^3 \geq 0$ , толщина  $\Delta_p$  которого удовлетворяет оценке  $\Delta_p = O(\alpha^{D+1})$ . Рассмотрим различные режимы, обобщающие результаты [16] для ударного слоя толщины  $\Delta = O(\alpha^2)$ .

1. Режим  $\varepsilon^2 = O(\alpha^{2D-2})$ . Уравнения для главных членов в разложении вектора  $f = (u^1, u^2, u^3, \rho, h)^T$  по параметру  $\alpha$  аналогичны уравнениям пограничного слоя, но для данного режима можно пренебречь продольными градиентами давления  $\partial p / \partial x^\beta, \beta = 1, 2$ . Уравнение для нормальной компоненты скорости сводится к виду

$$\frac{\partial p}{\partial x^3} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^3} \rho u^l u^m$$

Для данного режима ударный слой является вязким, т. е.  $\Delta_v = \Delta$  ( $\Delta_v$  — толщина слоя, в котором существенна вязкость), причем на внешней границе уравнения замыкаются соотношениями за головной ударной волной, которые содержат члены с вязкими напряжениями и тепловым потоком [6, 16, 17].

2. Промежуточные режимы  $\varepsilon^2 = O(\alpha^{2D-2+L}), 1 \leq L \leq 3$ . Для данного семейства режимов  $L$  является параметром.

Ударный слой подразделяется на невязкую часть  $\Delta_v \leq x^3 \leq \Delta$  и вязкий подслой  $0 \leq x^3 \leq \Delta_v$  толщины  $\Delta_v = O(\alpha^{D+L3})$ . На внешней границе ставятся условия Рэнкина — Гюгонио. Градиенты давления  $\partial p / \partial x^\beta, \beta = 1, 2$ , имеют относительный порядок  $O(\alpha^{2-2L3})$  и могут не учитываться для  $L < 3$ , но становятся существенными при  $L = 3$ , когда  $\Delta_v = O(\alpha^{1+D}) = \Delta_p$ .

3. Режим  $\varepsilon^2 = O(\alpha^{2D-2+L}), L > 3$ . Для данного предельного перехода  $\Delta_v = O(\varepsilon \sqrt{\alpha})$  и  $\Delta_v \ll \Delta_p$ .

Ударный слой подразделяется на невязкую внешнюю часть  $G_1: \Delta_p \leq x^3 \leq \Delta$  толщины  $O(\alpha^D)$ , невязкую переходную часть  $G_2: \Delta_v \leq x^3 \leq \Delta_p$  толщины  $O(\alpha^{D+1})$  и вязкий подслой  $G_3: 0 \leq x^3 \leq \Delta_v$  толщины  $O(\varepsilon \sqrt{\alpha})$ .

В области  $G_1$  градиенты давления  $\partial p / \partial x^\beta, \beta = 1, 2$ , могут не учитываться в первом приближении, а изменение давления поперек  $G_1$  зависит от всех членов в уравнении движения для нормальной составляющей скорости без учета вязкости. В области  $G_2$  необходимо учитывать  $\partial p / \partial x^\beta, \beta = 1, 2$ , но вязкими эффектами можно пренебречь. В первом приближении давление не меняется поперек слоя  $G_2, G_3$  для режимов 2, 3.

Асимптотический анализ позволяет обосновать модели ВУС для тонких ударных слоев, так как уравнения последних содержат все члены, существенные для рассмотренных выше режимов течения. В тонком ударном слое толщины  $O(\alpha)$  около поверхности с малыми кривизнами (например, на наветренной стороне ВКС под большим углом атаки) необходимо наряду с центробежными силами в уравнении для составляющей импульса по нормали к поверхности учитывать и силы инерции [18].

Изложим результаты асимптотического обоснования модели ВУС для нетонких ударных слоев с учетом дозвукового вдува газа в поток [13]. Используем сокращенную запись уравнений Навье — Стокса для контравариантных компонент векторов и тензоров в криволинейных координатах  $x^1, x^2, x^3$ , предполагая, что  $x^1 \equiv x, x^2 \equiv y, x^3 \equiv z$ , линии  $x^3$  ортогональны поверхности тела  $\Gamma_w$

$$L_{Ns}(f) \equiv L_\varepsilon(f_\varepsilon) = 0, f = f_\varepsilon, \varepsilon^2 = 1/\text{Re}_0$$

$$L_\varepsilon(f) = L_0(f) + \varepsilon^2 M(f)$$

В набегающем потоке  $f_\varepsilon|_{\Gamma_\infty} = f_\infty$ , на поверхности  $\Gamma_w$   $L_w(f_\varepsilon) = \varphi$  (см. (1.8), (1.9)).

Для приближенного описания решения  $f_\varepsilon$  применим метод погранслойных поправок [24, 25]

$$f_\varepsilon = f^{(N)} + O(\varepsilon^{N+1})$$

$$f^{(N)} = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k (F_k(x, y, z) + S_k^\pm(x, y, \xi) + q_k^\pm(x, y, \eta))$$

$$\xi = \frac{z - \gamma_s(x, y, \varepsilon)}{\varepsilon^2}, \quad \eta = \frac{z - \gamma_c(x, y, \varepsilon)}{\varepsilon}$$

Здесь  $F_k$ ,  $k \geq 1$ , — члены внешнего решения — поправки к решению  $F_0$  невязкой ( $\varepsilon = 0$ ) задачи. Функции  $F_k$ ,  $k \geq 1$ , удовлетворяют линеаризованным уравнениям Эйлера и гладкие вне поверхностей  $\Gamma_0: z = \gamma_0(x, y)$ , и  $\Gamma_1: z = \gamma_1(x, y)$ , где  $\Gamma_0$  — головная ударная волна,  $\Gamma_1$  — контактная поверхность, отесненная от  $\Gamma_w$  вдувом.

Функции  $z = \gamma_s(x, y, \varepsilon)$ ,  $z = \gamma_c(x, y, \varepsilon)$  задают поверхности ударной волны и контактной границы соответственно с учетом эффекта вытеснения и находятся в процессе решения задачи. Функции  $S_k^\pm(q_k^\pm)$  — погранслойные поправки к внешнему решению в окрестности  $\Gamma_0(\Gamma_1)$ , стремящиеся к нулю при удалении от  $\Gamma_0(\Gamma_1)$ .

Функции  $S_k^\pm$ ,  $q_k^\pm$  строятся перед(за) соответствующей поверхностью, что отмечено индексом плюс(минус).

Для приближенного решения  $f^{(N)}$  с точностью  $O(\varepsilon^{N+1})$  обеспечивается выполнение интегральных законов сохранения импульса, массы, энергии

$$R_\Gamma(f^{(N)}) = \oint_\Gamma \cos(n, x') L'_\varepsilon(f^{(N)}) d\Gamma + \int_K (D(f^{(N)}) - \varepsilon^2 \psi(f^{(N)})) dK$$

$$L'_\varepsilon(f) \equiv A'(f) - \varepsilon^2 \sum_{i=1}^3 \Phi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \Gamma = \partial K$$

Для приближенного решения  $f^{(N)}$  имеет место

$$|R_\Gamma(f^{(N)})| \leq \text{const } \varepsilon^{N+1}$$

Пусть

$$f' = F_0 + \varepsilon F_1 + q_0^\pm + \varepsilon q_1^\pm$$

Можно показать [13], что решение  $f_{vs}$  композитных уравнений вязкого ударного слоя эквивалентно приближенному решению  $f'$ , так что  $f'$  удовлетворяет композитным уравнениям ВУС с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$  и является непрерывно дифференцируемой функцией на  $\Gamma_1$ , а на  $\Gamma_0$  удовлетворяет соотношениям Ренкина — Гюгонио.

**3. Параболизация уравнений рассматриваемых моделей.** Эллиптичность стационарных уравнений обусловлена градиентом давления вдоль маршевого направления [8] в дозвуковой области потока. В конкретной задаче величина  $\partial p / \partial x$  в дозвуковой области ударного слоя априори неизвестна и может находиться только приближенно. В зависимости от способа приближенного учета  $\partial p / \partial x$  производится та или иная параболизация уравнений ВУС.

Если дозвуковые подслои около тела достаточно тонки, то подобная параболизация не вносит заметной погрешности в решение, как показали сравнения с экспериментом и с эталонными расчетами методом установления [5—10]. Дело здесь в том, что в тонких слоях возмущения вверх по потоку достаточно быстро затухают и запирающие эти возмущения при заданном  $\partial p / \partial x$  не вносят существенных погрешностей.

В настоящей работе параболизация проводится по методу, предложенному в [13]. В коэффициенты  $A_1^1, A_3^1$  вводятся вспомогательные функции и давление  $P_s$ , известное с предыдущей глобальной итерации либо полученное на основе расчета ударного слоя в сверхзвуковой его части. Приближенные формулы для коэффициентов  $A_1^1, A_3^1$  принимают вид

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \sqrt{g} \{ \rho u^1 u^1 + g^{k1} \chi_1 p + g^{k1} (1 - \chi_1) P_s \} \\ A_3^1 &= \sqrt{g} \{ \rho u^1 (\chi_2 h + E) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} u^1 (1 - \chi_2) P_s \} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если  $\chi_1 = \chi_2 = 1$  либо  $p = P_s$ , то формулы (3.1) становятся точными. Для корректности маршевого метода коэффициенты  $\chi_1, \chi_2$  выбираются в соответствии со следующими ограничениями в случаях сжимаемых (3.2) и несжимаемых (3.3) течений:

$$\chi_1 = \omega_1 F_1(M_1, M_2, \chi_2), \quad \omega_1 < 1, \chi_2 > 0 \quad (3.2)$$

$$F_1 = 1, M_1 > 1 + \varepsilon_0$$

$$F_1 = \frac{\gamma \chi_2 M_1^2 + (\gamma - 1) b_1(M_1, M_2)}{\chi_2 + (\gamma - 1)(M_1^2 + b_1)}, \quad M_1 \leq 1 + \varepsilon_0, \quad 0 < \varepsilon_0 \ll 1$$

$$b_j = g_{12} M_1 M_2 + g_{j3} M_j M_3 \sqrt{g^{33} g^{jj}}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$M_j = \sqrt{u^j u^j / (c^2 g^{jj})}, \quad c^2 = \gamma p / \rho$$

$$u^1 > 0, \chi_1 < 0 \quad (3.3)$$

**4. Численный метод решения уравнений ВУС и ВСАД.** Различные методы маршевого интегрирования уравнений ВС и ВСАД имеют свои ограничения. Методы, основанные на уравнениях с учетом сжимаемости, требуют специального рассмотрения при малых числах Маха, когда уравнение сохранения энергии выпадает из системы остальных уравнений и как результат недостаточно точно проводится расчет поля давления и, следовательно, происходит потеря точности расчета поля скоростей. Методы, использующие уравнения без учета сжимаемости, сталкиваются с трудностями неявной трактовки градиента давления, обусловленными эллиптичностью уравнений.

В данной работе для расчета применен алгоритм, обобщающий результаты, изложенные в [12, 13]. Проводится регуляризация уравнений ВС и ВСАД, маршевое интегрирование при совместном решении всех уравнений для расчета маршевого сечения. Правильный учет эллиптических эффектов решения стационарных уравнений ВС и ВСАД достигается глобальными итерациями поля давления. Изучены процедуры релаксации давления в ходе глобальных итераций. Проведены тестовые расчеты течений в широком диапазоне чисел Рейнольдса, показавшие достаточную эффективность предложенного метода для расчетов трехмерных потоков.

Численное решение уравнений ВС и ВСАД, дополненных граничными соотношениями, проводится на каждой глобальной итерации маршевым методом [13] от начального сечения  $x = x^0$  до конечного сечения  $x = x^k$ . В начальном сечении задается  $f = f(x^0, y, z)$  на основе расчета в окрестности критической линии тока [16] либо вектор  $f$  предполагается заданным (данные на входе в канал) постановкой задачи. В конечном сечении ставятся «мягкие» граничные условия для давления либо давление предполагается заданным. В расчете сверхзвуковых течений головная волна выделяется и расчет на ней проводится по методу [20]. В ходе проведения глобальных итераций применялись различные процедуры релаксации части давления, трактуемой глобально

$$(P_R)_{in}^{m, (s), N} = \omega_p P_{in}^{m, (s), N} + (1 - \omega_p) (P_R)_{in}^{m, N-1}$$

$$f_{R, in}^{m, (s), N} = (u, v, w, P_R, h)_{in}^{m, (s), N}$$

Приведем систему конечно-разностных аппроксимаций

$$L^h (f_{in}^{m, (s), N}) = 0, \quad L^h = L_x^h + L_y^h + L_z^h + \text{Re}^{-1} F^h$$

Здесь  $L^h$  — разностная аппроксимация оператора  $L_{VLAD}$  на неравномерной сетке  $\{x^m, y_n, z_e\}$

$$\begin{aligned} L_x^h(f_{ln}^m(s), N) &\equiv (A_{ln}^m(s), N - (A_R)_{ln}^{m-1, N}) / \Delta x \\ L_y^h(f_{ln}^m(s), N) &\equiv \left( \frac{\partial B}{\partial y} \right)_{ln}^{m, (s), N} - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial y} \Phi^{22} \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ln}^{m, (s), N} \\ L_z^h(f_{ln}^m(s), N) &\equiv \left( \frac{\partial C}{\partial z} \right)_{ln}^{m, (s), N} - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial z} \Phi^{33} \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{ln}^{m, (s), N} \\ F^h(f_{ln}^m(s), N) &= \sum_{j, k=2, j \neq k}^3 \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Phi^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)_{ln}^{m, (s), N} \\ (A_R)_{ln}^{m-1, N} &= A((f_R)_{ln}^{m-1, N}) \\ f_{ln}^{m, (0), N} &= f_{ln}^{m-1, N}, \quad f_{ln}^{m, N} = \lim_s f_{ln}^m(s), N \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $f_{ln}^{m, (s), N}$  — значение вектора  $f$  на внутренней итерации с номером  $s$  при расчете текущего маршевого сечения,  $x^m, N$  — номер глобальной итерации,  $D_{2y}, D_{2z}, D_{4y}, D_{4z}$  — сглаживающие операторы, не нарушающие порядок аппроксимации [7, 13]. Приращение  $f$  искомого вектора на итерации  $s$  находится из системы уравнений

$$\begin{aligned} &\left( A_f + \Delta x_t \left( \frac{\partial}{\partial z} C_f - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \Phi^{33} \frac{\partial}{\partial z} + D_{2z} \right) + \right. \\ &\left. + \Delta x_t \left( \frac{\partial}{\partial y} B_f - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \Phi^{22} \frac{\partial}{\partial y} + D_{2y} \right) \right)_{ln}^{m, (s), N} f = \\ &= -\Delta x (L^h(f_{ln}^m(s), N) + (D_{4y} + D_{4z}) f_{ln}^m(s), N) \\ &f_{ln}^{m, (s+1), N} = f_{ln}^m(s), N + f \\ &\Delta x_t = \Delta x \Delta t / (\Delta x + \Delta t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Система (4.2) решается методом приближенной факторизации [7, 9]. Здесь  $\Delta t$  — итерационный параметр. Если  $\Delta t = \Delta x$  и итерации на слое  $x = x^m$  не производятся, то формула (4.2) соответствует схеме Бима — Уорминга [7].

5. Анализ скорости сходимости глобальных итераций давления. Первый маршевый пробег от начального сечения  $x = x^0$  до конечного сечения  $x = x^k$  требует задания начальных значений искомого вектора  $f$  и предварительного распределения давления  $P_g(x, y, z)$ . Вектор  $f$  предполагается заданным, а предварительное поле давления выбирается в соответствии со спецификой решаемой задачи, например при расчете потока в каналах удобно использовать постоянное распределение  $P_g$ , в задачах расчета обтекания тела потоком вязкой жидкости хорошим начальным распределением давления могут служить данные расчета потенциального невязкого обтекания. На выходной границе расчетной области используется граничное соотношение для давления

$$x = x^k, \quad \partial^2 p / \partial x^2 = 0$$

либо  $p = p^k$ ,  $p^k$  — задано. После расчета вектора  $f$  на глобальной итерации с номером  $N$  определяется поле давления  $p^N(x, y, z)$ . Величина давления  $P_g$ , которая трактуется глобально при проведении следующей итерации, находится с использованием формулы релаксации

$$P_g(x^m, y_n, z_l) = (P_R)_{ln}^{m, (s+1), N} = \omega_p p_{ln}^{m, (s+1), N} + (1 - \omega_p) (P_R)_{ln}^{m, N-1}$$

В расчетах реализовались два случая:  $j=0$  и  $j=1$ . При  $j=1$  скорость сходимости глобальных итераций возрастает. Преимущества задания  $j=0$  проявляются при расчете несжимаемых потоков с небольшими градиентами давления по нормальной координате.

Использовались следующие формулы аппроксимации продольного градиента давления:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{ln}^{m, (s+1), N} = \frac{\chi_l}{\Delta x} (p_{ln}^{m, (s+1), N} - p_{ln}^{m-1, N}) + (1 - \chi_l) \left( \frac{dP_g}{dx} \right)_{ln}^m \quad (5.1)$$

Конкретный вид аппроксимации величины градиента давления  $(dP_g/dx)_{ln}^m$ , трактуемой глобально, обсуждается ниже.

Оценим влияние параметров регуляризации и релаксации на сходимость глобальных итераций.

Далее для простоты ограничимся аппроксимациями пространственных производных на равномерной сетке центральными разностями. Положим

$$M^h = L_y^h + L_z^h + \frac{1}{\text{Re}} F^h$$

$$f_R = (u, v, w, P_R, h)^T$$

$$(f_R)_{ln}^{m, (s), N} = \omega_p f_{ln}^{m, (s), N} + (1 - \omega_p) (f_R)_{ln}^{m, N-1} \quad (5.2)$$

$$(f_R)_{ln}^{m, (s+1), N} - (f_R)_{ln}^{m, (s), N} = \omega_p f^h + (1 - \omega_p) ((f_R)_{ln}^{m, (s+1), N-1} - (f_R)_{ln}^{m, (s), N-1})$$

Предполагаем, что на предыдущей глобальной итерации сходимость локальных итераций уже достигнута, поэтому приращение равно нулю, т. е.

$$(f_R)_{ln}^{m, (s+1), N-1} - (f_R)_{ln}^{m, (s), N-1} = 0$$

Используя обозначения  $L_l^h, L^h$  для линейной и нелинейной частей аппроксимации оператора ВСАД, получим

$$L_l^h f = A_f f / \Delta x + M_l^h f$$

$$M_l^h f \equiv \left( \frac{\partial}{\partial y} B_f + \frac{\partial}{\partial z} C_f - \frac{1}{\text{Re}} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \Phi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{ln}^{m, (s), N} f$$

В этой строке выписана линеаризация оператора без смешанных производных, примененная к приращению  $f$ . Из формулы (5.1), (5.2) следует

$$\frac{A_f}{\Delta x} (f_{ln}^{m, (s+1), N} - (f_R)_{ln}^{m-1, N}) + (1 - \chi_1) \left( \frac{dP_g}{dx} \right)_{ln}^m E_p + M^h (f_{ln}^{m, (s+1), N}) = 0 \quad (5.3)$$

$$E_p = (1, 0, 0, 0, 0)^T$$

Пусть  $f_{ln}^{m, (s+1), N}$  — ошибка (погрешность) решения, тогда, линеаризуя (5.3), получим для вектора  $(f_R)_{ln}^{m, (s), N}$

$$\begin{aligned} & \frac{A_f}{\Delta x \omega_p} ((f_R)_{ln}^{m, (s+1), N} - (f_R)_{ln}^{m, N-1} + \omega_p ((f_R)_{ln}^{m, N-1} - (f_R)_{ln}^{m-1, N})) + \\ & + (1 - \chi_1) \left( \frac{dP_g}{dx} \right)_{ln}^m + \frac{1}{\omega_p} M_l^h ((f_R)_{ln}^{m, (s+1), N} - (1 - \omega_p) (f_R)_{ln}^{m, N-1}) = 0 \end{aligned}$$

Применим для оценки роста погрешности  $(f_R)_{ln}^{m, (s), N}$  анализ Фурье. Пусть

$$(f_R)_{ln}^{m, (s), N} = \lambda_1^s \lambda_2^N C \psi(\omega), \quad \psi(\omega) = \exp i(m\omega_1 \Delta x + n\omega_2 \Delta y + l\omega_3 \Delta z)$$

где  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_3)$  — волновые числа,  $C = (C_1, \dots, C_5)^T$  — постоянный вектор.

Обозначим

$$a = \frac{1}{\Delta x}, \quad b = \frac{\sin \omega_2 \Delta y}{\Delta y}, \quad c = \frac{\sin \omega_3 \Delta z}{\Delta z}$$

$$\varphi = \omega_1 \Delta x, \quad \alpha_1 = \frac{4 \sin^2(\omega_2 \Delta y / 2)}{\Delta y^2}, \quad \alpha_2 = \frac{4 \sin^2(\omega_3 \Delta z / 2)}{\Delta z^2}, \quad q_1 = \lambda_1^{s+1}, \quad \mu_0 = 1 - \frac{1}{\omega_p}$$

$$\mu' = \mu_0 + \frac{q_1}{\omega_p} \lambda_2, \quad \lambda = \mu_0 + \lambda_2 \beta_2, \quad \beta_2 = -e^{-i\varphi} + \frac{q_1}{\omega_p}$$

Величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — коэффициенты усиления величины погрешности на локальной и глобальной итерациях соответственно. Приведем дисперсионное соотношение для коэффициентов усиления величины погрешности в случае декартовой метрики.

Введем обозначения

$$Q_0 = \lambda a u + i \mu' (b v + c w)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu}{\text{Re}} (\alpha_1 + \alpha_2), \quad \varepsilon_2 = \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \frac{4}{3} \alpha_1 + \alpha_2 \right)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \alpha_1 + \frac{4}{3} \alpha_2 \right), \quad \varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_1}{\text{Pr}}$$

$$Q_1 = \left(Q_0 + \frac{\varepsilon_2}{\rho} \mu'\right) \left(Q_0 + \frac{\varepsilon_3}{\rho} \mu'\right) (u Q_0^2 \rho_h - a \rho Q_0 - a \mu' \varepsilon_4)$$

$$\Delta = \rho^4 Q(\lambda_1, \lambda_2)$$

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \left(Q_0 + \frac{\varepsilon_1}{\rho} \mu'\right) \left[ \left(Q_0 + \frac{\varepsilon_2}{\rho} \mu'\right) \left(Q_0 + \frac{\varepsilon_3}{\rho} \mu'\right) (-\rho_p Q_0^2 + \varepsilon_4 \mu' Q_0) - \right. \\ \left. - \mu' \frac{ib}{\rho} \left(Q_0 + \frac{\varepsilon_3}{\rho} \mu'\right) (v Q_0^2 \rho_h - ib \mu' (\rho Q_0 + \mu' \varepsilon_4)) - \right. \\ \left. - \mu' \frac{ic}{\rho} \left(Q_0 + \frac{\varepsilon_2}{\rho} \mu'\right) (v Q_0^2 \rho_h - ic \mu' (\rho Q_0 + \mu' \varepsilon_4)) \right] - \frac{1}{\rho} (\chi \lambda a + \nu) Q_1$$

Величина  $\nu = \nu_1 + \lambda_2 \nu_2$  зависит от способа аппроксимации части  $(dP_g/dx)_{ln}^m$  градиента давления, трактуемой глобально (5.1).

Равенство нулю определителя  $Q(\lambda_1, \lambda_2)$  дает необходимое дисперсионное уравнение относительно коэффициентов усиления величины погрешности  $(f_R)_{ln}^{m(s), N}$ . Соотношение  $|\lambda_2| \leq 1$  достаточно для сходимости глобальных итераций. Соотношение  $q_1 \rightarrow 0$  при любом  $\lambda_2$  необходимо для сходимости внутренних итераций на слое  $x^n$ .

Проанализируем корни  $Q(\lambda_1, \lambda_2) = 0$  в случае  $q_1 < 1$ ,  $\omega_p = 1 + \Omega_1 q_1$ ,  $\mu' = O(q_1)$ . Для декартовой метрики имеют место следующие соотношения:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = Q_0^3 D(\lambda_2) + O(q_1), \quad D(\lambda_2) = \lambda_2 (A_0 \lambda_2 + B_0) + O(q_1) \\ A_0 = -\delta_2^2 \rho_p + \chi_1 a e^{-\kappa p} \left( \frac{u \rho_h \delta_2}{\rho} + a e^{-\kappa p} \right), \quad B_0 = -\nu \left( \frac{u \rho_h \delta_2}{\rho} + a e^{-\kappa p} \right) \\ \delta_2 = -u a e^{-\kappa p}$$

С точностью порядка  $O(q_1)$  корни  $Q(\lambda_1, \lambda_2) = 0$  определяются из соотношений  $Q_0 = 0$ ,  $D_2 = 0$ :

$$(\beta_2 \lambda_2 + \mu_0) a u + i(\mu_0 + q_1 \lambda_2 / \omega_p)(b v + c w) = 0 \quad (5.4)$$

Если  $u \geq u_0 > 0$ , то корень (5.4) имеет вид  $\lambda_0 = O(q_1)$ , что соответствует сходимости глобальных итераций.

Если  $u = 0$ , но  $|v|^2 + |w|^2 \neq 0$ , то корень (5.4) может быть записан в виде  $\lambda_2 = (1 - \omega_p) / q_1 = -\Omega_1$  и для сходимости глобальных итераций достаточно выполнимости неравенства  $|\Omega_1| \leq 1$ .

Пусть  $D(\lambda_2) = 0$ , тогда

$$\lambda_2^{-1} = -\frac{\nu_2}{\nu_1} + a f e^{-\kappa p}, \quad f = \frac{[\chi_1 - u^2 (\rho_p + \chi_1 \rho_h / \rho)]}{\nu_1 (u^2 / h + 1)}$$

$$\rho_p = \frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad \rho_h = \frac{\partial \rho}{\partial h}, \quad \nu = \nu_1 + \lambda_2 \nu_2$$

Для совершенного газа справедливо соотношение

$$\rho_p + \frac{\chi_1 \rho_h}{\rho} = \frac{1}{h} \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} - \chi_1 \right)$$

Для несжимаемого потока  $\rho_p = \rho_h = 0$ .

Рассмотрим следующие аппроксимации градиента давления:

$$\left( \frac{dP_g}{dx} \right)_{ln}^m = \frac{(P_R)_{ln}^{m+1, N-1} - (P_R)_{ln}^{m, N-1}}{\Delta x}$$

$$\nu_1 = (e^{\kappa p} - 1) / \Delta x, \quad \nu_2 = 0 \quad (5.5)$$

$$\left( \frac{dP_g}{dx} \right)_{ln}^m = \frac{(P_R)_{ln}^{m+1, N-1} - (P_R)_{ln}^{m, (s+j), N}}{\Delta x} \quad (5.6)$$

$$\nu_1 = \frac{e^{\kappa p}}{\Delta x}, \quad \nu_2 = \frac{\lambda_1^{s+j}}{\Delta x}, \quad \nu_2 < 1, \quad j = 0, 1$$

$$\left( \frac{dP_g}{dx} \right)_{ln}^m = \frac{1}{2 \Delta x} (3 (P_R)_{ln}^{m+1, N-1} - 4 (P_R)_{ln}^{m, N-1} + (P_R)_{ln}^{m-1, N})$$

$$\nu_1 = \frac{3}{2 \Delta x} e^{\kappa p} - \frac{2}{\Delta x}, \quad \nu_2 = \frac{e^{\kappa p}}{2 \Delta x} \quad (5.7)$$

$$\left(\frac{dP_g}{dx}\right)_{in}^m = \frac{1}{2\Delta x} (3(P_R)_{in}^{m, N-1} - 4(P_R)_{in}^{m-1, N} + (P_R)_{in}^{m-2, N})$$

$$v_1 = \frac{3}{2\Delta x}$$

$$v_2 = \frac{1}{\Delta x} \left( -2e^{-kp} + \frac{1}{2}e^{-2kp} \right) \quad (5.8)$$

Проведенный анализ сходимости глобальных итераций показывает, что для сходимости глобальных итераций достаточно выполнимости неравенства

$$\chi \leq \beta \frac{\gamma M^2}{1 + (\gamma - 1) M^2} - \alpha$$

для несжимаемых потоков полагается  $\beta = 0$ , для сжимаемых  $\beta = 1$ , параметр  $\alpha$  принимает значения 1, 2, 3, 4 в случаях аппроксимаций (5.5), (5.6), (5.7), (5.8) соответственно.

Аналогичный анализ проводился и для других способов аппроксимации градиента давления вдоль маршевого направления (ср. [5, 6]). Численные эксперименты позволяют оценить оптимальный выбор параметра релаксации давления  $\omega_p$  при конечных величинах  $q_1$ .

**6. Примеры расчетов.** Изложенные выше алгоритмы расчета сжимаемых и несжимаемых потоков тестировались на примерах расчетов сверхзвукового обтекания затупленного конуса (см. [13]) и формирования развитого течения в каналах [14].

На фиг. 1, 2 показаны результаты расчетов потоков несжимаемой жидкости при  $Re = 1$  в кольцевых зазорах с вращающимися стенками, в которых поток на входе в канал предполагается равномерным

$$r_T(x) \leq r \leq r_T(x) + 1$$

$$u(x_0, y, z) = 1; \quad v(x_0, y, z) = 0, \quad w(x_0, y, z) = 0$$

На фиг. 1 приведены профили  $u(x_1, y, z)$ ,  $v(x_1, y, z)$  (линии 1, 2) — продольной и угловой скорости в сечении  $x_1 = 3,1$ . Данные расчетов совпадают с аналитическим решением  $u_T(z)$ ,  $v_T(z)$  (точки 3), которое для развитого течения в кольцевом зазоре может быть записано в виде.

$$u_T(z) = \beta_1(1 - (1 + z)^2 + \beta_2 \ln(1 + z)), \quad 0 \leq z \leq 1$$

$$v_T(z) = \Omega_1(1 - \ln(1 + z)/\ln 2)$$

$$\beta_1 = 2/(5 - \beta_2), \quad \beta_2 = 3/\ln 2$$

Линии 1—3, 5 на фиг. 2 относятся к результатам расчетов потока в кольцевом зазоре с волнистой внутренней стенкой

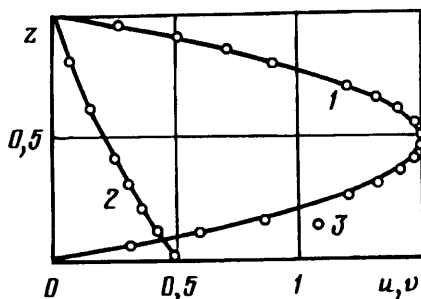
$$r_T(x) = r_0 + \varepsilon_B \cos \alpha_B (x - x_0)$$

Приведены распределения вдоль канала продольного  $C_{F1}$  и азимутального  $C_{F2}$  коэффициентов трения

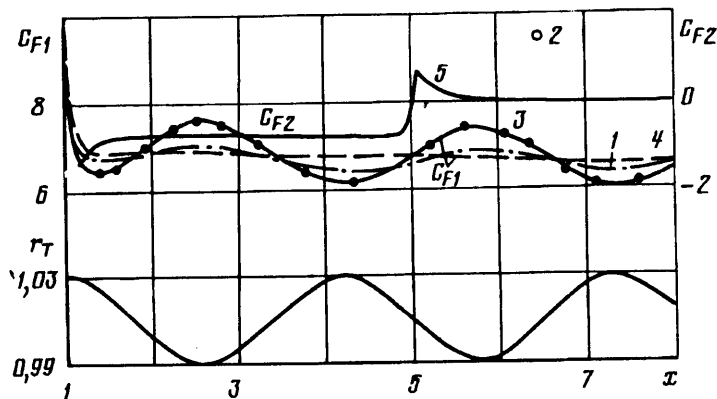
$$C_{F1} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad C_{F2} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad z = 0$$

Линия 4 показывает изменение  $C_{F1}$  в случае ровной стенки  $r_T(x) = r_0$ . Линии 1—3 относятся к течению около волнистой стенки:  $\varepsilon_B = 0,02$ ,  $\alpha_B = 2$ .

Результаты расчетов  $C_{F1}$  на 1, 4 и 6 глобальных итерациях изображены линиями 1, 2 (точки), 3 соответственно. Данные расчетов продольного коэффициента трения на 4 и 6 глобальных итерациях различаются не более чем на 0,01%. Линия 5 показывает распределение азимутального трения  $C_{F2}$  в случае вращающейся внутренней стенки с угловой скоростью  $\Omega_1 = 0$  при  $1 \leq x \leq 1,1$ ;



Фиг. 1



Фиг. 2

$5 < x$ ,  $\Omega_1 = 0,5$  при  $1,1 \leq x \leq 5$ . Результаты расчетов  $C_{F2}$  на глобальных итерациях 6 и 10 различаются не более чем на 0,001%.

Ниже представлены результаты расчетов потоков вязкой несжимаемой жидкости в зазоре с биеллиптическим поперечным сечением

$$r_T \leq r \leq r_T + 1$$

$$r_T(x, y) = \sqrt{A^2 \sin^2 y + B^2 \cos^2 y}, \quad x \geq x_0$$

$$x_0 = 1 - \sin \alpha, \quad A = \cos \alpha + (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha \quad (6.1)$$

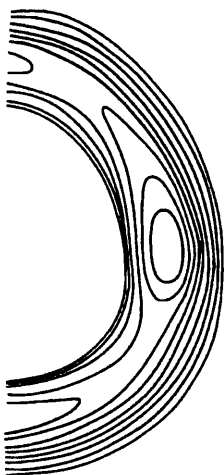
$$B = \cos \alpha + (x - x_0) \operatorname{tg} \beta l(y)$$

$$l(y) = 1, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad l(y) = \lambda, \quad \frac{\pi}{2} < y \leq \pi$$

Расчеты проводились, начиная от кольцевого сечения  $x = x_0$ , в котором задавались профили развитого течения

$$u = u_T(z), \quad v = v_T(z), \quad w = 0$$

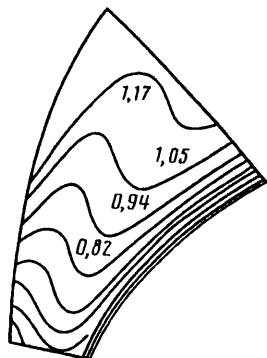
На фиг. 3, 4 приведены изолинии продольной составляющей скорости  $u$  в сечениях  $x = 2,78$  и  $x = 10,82$  соответственно для  $\Omega_1 = 0$ ,  $\operatorname{Re} = 1$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\lambda = 0,1$ . С ростом  $x$  можно отметить формирование трехмерных структур с зонами локальных экстремумов продольной составляющей скорости. Фигура 5 иллюстрирует результаты расчета обтекания крыла бесконечного размаха под углом скольжения  $\beta$  с уравнением профиля  $y = r_T(x)$  в декартовых координатах, представлены линии постоянных значений числа Маха  $M = \sqrt{u^2 + v^2}/c$  при обтекании крыла  $r_T = \sqrt{x}$  в случае  $\beta = 30^\circ$ ,  $M_\infty = 10$ ,  $\operatorname{Re}_0 = 50$ ,  $h_w = 0,1$ . Требовалось около 10 глобальных итераций для достижения точности 0,1% на сетках с 51



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

узлом поперек ударного слоя, при этом использовалось 4—5 внутренних итераций на каждом сечении  $x' = \text{const}$  и величина погрешности на внутренних итерациях не превышала 0,001%.

Данные на фиг. 6—8 относятся к результатам расчета обтекания затупленного по сфере тела с биэллиптическим поперечным сечением и с углами полураствора  $\alpha$  и  $\beta$  в горизонтальной и вертикальной плоскости соответственно, при следующих значениях внешних параметров:  $M_\infty = 6$ ,  $Re_\infty = 3500$ ,  $h_w = 0,35$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $\gamma = 1,4$ .

Уравнение поверхности тела в цилиндрических координатах задавалось в виде  $r = r_T(x, y)$  см. (6.1). На фиг. 6 приведены распределения по азимутальной координате  $y$  теплового потока  $C_H$  и коэффициента трения  $C_{f2}$  в сечениях  $x = 0,58$ ,  $1,56$  (линии 1, 2 соответственно) в случае  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 20^\circ$ ,  $\lambda = 1$  и 0,1 (штриховая).

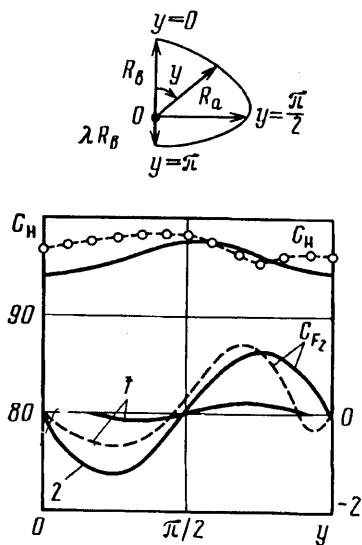
Фигура 7 иллюстрирует распределения по  $y$  коэффициентов трения, давления на теле и теплового потока для случаев  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\beta = 10^\circ$ ,  $\lambda = 1$ ,  $x = 3,73$  и  $\alpha = 10^\circ$ ,  $\beta = 10^\circ$ ,  $\lambda = 1$ ,  $x = 3,81$  (пунктир).

На фиг. 8 приведены изобары в сечении  $x = 0,98$  для тела с параметрами  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 10^\circ$ ,  $\lambda = 1$ . Данные на фиг. 6 позволяют отметить неравномерность нагревания ударных слоев около тел с биэллиптическим поперечным сечением, а также заметное перетекание газа в азимутальном направлении.

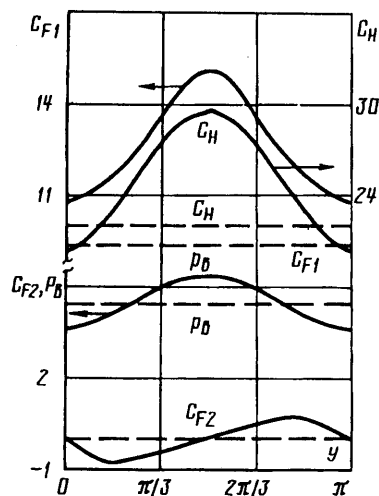
Существенное влияние различия в радиусах кривизны обтекаемой поверхности на структуру ударного слоя прослеживается также на фиг. 7, где штриховые линии показывают результаты расчетов ударного слоя около осесимметричного тела. Отметим также формирование зоны сжатия на фиг. 8, обусловленной разрывом кривизны в области сопряжения сферического затупления с поверхностью (6.1).

На фиг. 9 показано изменение в трехмерной критической точке безразмерного теплового потока и отхода ударной волны  $\Delta$  в зависимости от высоты над поверхностью Земли. Энтальпия на теле предполагалась заданной 0,1. Линии 1, 2 — данные расчета для отношения кривизн  $k = 0,25$  и  $0,75$  соответственно. Видно заметное влияние кривизны на тепловой поток в верхних точках траектории спуска до 30%.

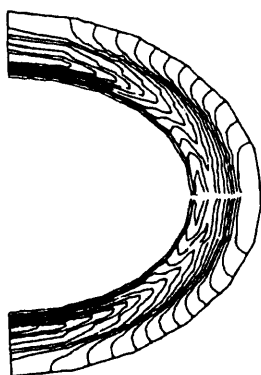
Штриховая линия на фиг. 9 показывает изменение числа Маха вдоль траектории. В данной работе для расчета используется модель совершенного газа, хотя примененный метод обобщается и на случай учета неравновесных физико-химических процессов. На малых высотах обтекание характеризуется весьма



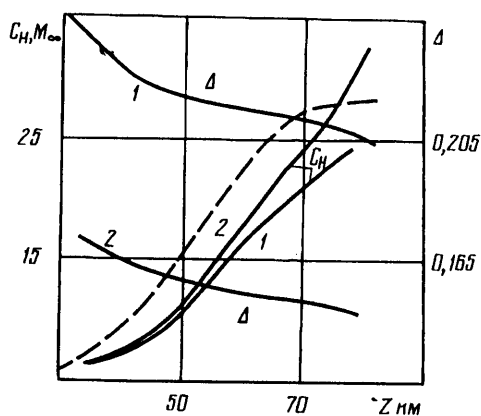
Фиг. 6



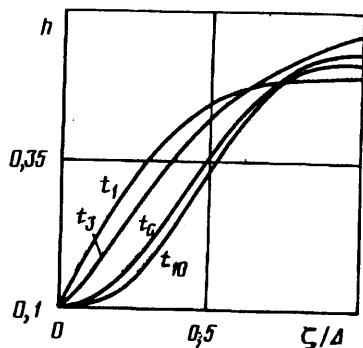
Фиг. 7



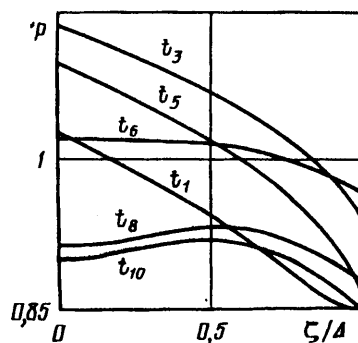
Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11

большими значениями чисел Рейнольдса, но в окрестности передней критической точки течение остается ламинарным.

Фигуры 10, 11 иллюстрируют результаты расчетов [15] влияния нестационарного вдува на структуру ударного слоя около критической линии тока. Рассмотрено нарастание интенсивности вдува  $w_w = 0$ :

$$u_w = w_w = 0,03t \text{ при } 0 \leq t \leq 1 \text{ и } u_w = w_w = 0,03 \text{ при } t > 1.$$

Приведены данные расчетов при  $Re_0 = 50$ ,  $h = 0,1$ ,  $M_\infty = 10$  в моменты времени  $t_{j+1} = t_j + 0,2$ ,  $j = 1, \dots, 9$ ,  $t_1 = 0,66$ . На фиг. 10 прослеживается деформация профиля энтальпии  $h$  от погранслоного в момент  $t_1$  до характерного профиля для ударного слоя со слоем смещения в момент  $t_{10}$ .

Распределение давления поперек ударного слоя, как видно из фиг. 11, претерпевает заметную эволюцию и отличается от постоянного в фиксированный момент времени, что указывает на отличия данных результатов от теории пограничного слоя. Данные расчетов нестационарного вдува иллюстрируют возможность управления вязким ударным слоем с целью снижения тепловых воздействий на летательный аппарат.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковеня В. М., Черный С. Г., Яненко Н. Н. Упрощенные уравнения для описания течений вязкого газа//Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 6. С. 1322—1324.
2. Войнович П. А., Фурсенко А. А. Метод глобальных итераций для расчета смешанных течений вязкого газа//Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 7. С. 1151—1156.
3. Белова О. Н., Кокошинская Н. С., Пасконов В. М. Расчет сверхзвукового осесимметричного обтекания тел на основе уравнений Навье — Стокса полумаршевым методом: Препринт № 46. М.: Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша АН СССР, 1986. 23 с.
4. Васильевский С. А., Тирский Г. А., Утюжников С. В. Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 5. С. 741—750.
5. Головачев Ю. П., Тимофеев Е. В. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом с помощью метода глобальных итераций: Препринт № 1254. Л.: Физ.-техн. ин-та им. А. Ф. Иоффе, 1988. 28 с.
6. Пейгин С. В., Тирский Г. А. Трехмерные задачи сверх- и гиперзвукового обтекания тел потоком вязкого газа//Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1988. Т. 22. С. 62—117.
7. Шенг Д. С. Обзор численных методов решения уравнений Навье — Стокса для течений сжимаемого газа//Аэрокосмическая техника. 1986. № 2. С. 65—92.
8. Rubin S. G. A review of marching procedures for parabolized Navier-Stokes equations//Proc. Sympos. Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows. N.-Y.: Springer-Verlag, 1982. P. 171—186.
9. Ковеня В. М., Тарнавский Г. А., Черный С. Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, 1990. 185 с.
10. Degani D., Steger J. L. Comparison between Navier-Stokes and thin-layer computations for separated supersonic flow//AIAA Journal. 1983. V. 21. № 11. P. 1604—1606.
11. Gao Zhi. Simplified Navier-Stokes equations//Scientia Sinica. SER A. 1988. V. 31. № 3. P. 322—339.
12. Pouagraré M., Lakshminarayana B. A space-marching method for incompressible Navier-Stokes equations//AIAA Pap. 1985. № 170. 13 p.
13. Марков А. А. Расчет трехмерного вязкого ударного слоя: Препринт № 428. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР, 1989. 29 с.
14. Марков А. А. Численное моделирование трехмерных вязких потоков: Препринт № 478. М.: Ин-т пробл. механики ИММ АН СССР. 1990. 24 с.
15. Markov A. A. Unsteady viscous shock layer near permeable surface//Arch. Mech. 1989. V. 41. № 6. P. 795—810.
16. Марков А. А. Асимптотический анализ уравнений Навье — Стокса для трехмерных течений в тонком ударном слое: Препринт № 124. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР, 1979. 75 с.
17. Кокошинская Н. С., Павлов Б. М., Пасконов В. М. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом. М.: Изд-во МГУ, 1980. 247 с.
18. Марков А. А. Режимы течения вязкого газа в тонком трехмерном ударном слое около поверхности с малыми кривизнами//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 3. С. 161—164.
19. Гориславский В. С., Толстых А. И. Численный расчет течения в области сферического затупления при малых числах Рейнольдса//Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 5. С. 93—97.
20. Сахаров В. И., Швецев Ю. Д. О расчете стационарного невязкого обтекания пространственных тел//Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 172—175.
21. Тимошенко В. И. Сверхзвуковые течения вязкого газа. Киев: Наук. думка, 1987. 183 с.

22. Ван-Дайк М. Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении с применением к обтеканию затупленных тел гиперзвуковым потоком//Исследование гиперзвуковых течений. М.: Мир, 1964. С. 35—58.
23. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений//Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 125 с.
24. Стулов В. П. Пограничные слои в химически реагирующих и изучающих средах//Аэромеханика и газовая динамика. М.: Наука, 1976. С. 150—159.
25. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений//Докл. АН СССР. 1958. Т. 121. № 5. С. 778—781.
26. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Москва

Поступила в редакцию  
1.XI.1991