

УДК 532.591.013.4

© 1992 г. В. А. КАЛМЫКОВ

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ОТНОСИТЕЛЬНО ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЕ

Хорошо известно, что гравитационные поверхностные волны на большой глубине (волны Стокса) неустойчивы относительно продольных модуляционных возмущений. Эта неустойчивость имеет двумерную структуру и изучена в большом количестве работ, подробный обзор и анализ которых содержится в [1]. Неустойчивость поверхностных волн на конечной глубине изучена меньше и имеет трехмерную структуру [2, 3]. Здесь изучается неустойчивость низшего порядка (неустойчивость типа I) [3], которая описывается уравнением Захарова в приближении квадрата крутизны для волн значительной нелинейности [4]. Неустойчивость высоких порядков (неустойчивость типа II) [3] описывается полными уравнениями движения для невязкой несжимаемой безвихревой жидкости. Эта неустойчивость возникает в приближении третьей степени крутизны волны и существенна для волн значительной крутизны.

Методика изучения неустойчивости гравитационных поверхностных волн на конечной глубине аналогична использованной в работе [1] методике изучения неустойчивости поверхностных волн на бесконечной глубине на основе уравнения Захарова. Области неустойчивости, полученные в работе [3] для поверхностных волн на конечной глубине, похожи на области неустойчивости для волн на бесконечной глубине для неустойчивости типа I. Неустойчивость поверхностных волн изучалась также в работе [5] в постановке, аналогичной [3]. Так как в уравнениях движения оставлены только квадратичные слагаемые, то была получена лишь неустойчивость низшего порядка типа I.

1. Далее здесь излагается методика расчетов неустойчивости по работе [1]. Уравнение Захарова для волновой компоненты $B(k, t)$ имеет вид

$$i \frac{\partial B(k, t)}{\partial t} = \sum_{k+k_1=k_2+k_3} T(k, k_1, k_2, k_3) \times e^{i(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)t} \bar{B}(k_1, t) B(k_2, t) B(k_3, t) \quad (1.1)$$

где k — волновой вектор, $\omega = (gk \operatorname{th} kh)^{1/2}$ — частота волн на глубине h , g — ускорение силы тяжести, t — время, $T(k, k_1, k_2, k_3)$ — функции взаимодействия на глубине h .

Пусть функция $B(k, t)$ является суммой M дискретных мод

$$B(k, t) = \sum_{m=1}^M B_m(t) \delta(k - k_m) \quad (1.2)$$

Подставим (1.2) в (1.1) и получим для каждой моды

$$i \frac{dB_p}{dt} = \sum_{p+i=j+m} T_{pilm} e^{i(\omega_p + \omega_i - \omega_j - \omega_m)t} B_i B_j B_m \quad (1.3)$$

где $\omega_p = (gk_p \operatorname{th} k_p h)^{1/2}$, $T_{pilm} = T(k_p, k_i, k_j, k_m)$, суммирование в (1.3) происходит по индексам i, j, m для векторов, удовлетворяющих соотношению

$$k_p + k_i = k_j + k_m \quad (1.4)$$

Решение уравнения (1.3) для однородного цуга волн с волновым вектором $k_0 = (k_0, 0)$ имеет вид

$$B_p(t) = B_0 \exp(-iT_0 B_0^2 t) \quad (1.5)$$

$$B_0 = B(k_0) = \pi a_0 (2\omega_0/k_0)^{1/2}$$

где $T_0 = T(k_0, k_0, k_0, k_0)$, a_0 — амплитуда несущей волны. На основную волну наложим возмущения с волновыми векторами $k_1 = k_0 + K$ и $k_2 = k_0 - K$ с малыми амплитудами $B_1(t)$ и $B_2(t)$. Подставим их в уравнения (1.3) и в линейном приближении получим два уравнения для B_1 и B_2

$$i \frac{dB_{1,2}}{dt} = T_{12,21} B_0^2 \bar{B}_{2,1} \exp(-i(\Delta\omega + 2T_0 B_0^2)t) + 2T_{11,22} B_0^2 B_{1,2} \quad (1.6)$$

$$T_{11,22} = T(k_0 \pm K, k_0, k_0, k_0 \pm K)$$

$$T_{12,21} = T(k_0 \pm K, k_0 \mp K, k_0, k_0) \quad (1.7)$$

$$\Delta\omega = 2\omega(k_0) - \omega(k_0 + K) - \omega(k_0 - K)$$

где индекс 1 относится к знаку плюс, 2 — к знаку минус.

Подставляя

$$B_1 = B_{11} \exp \left[-i \left(\frac{\Delta\omega}{2} + T_0 B_0^2 \right) t - i\Omega t \right] \quad (1.8)$$

$$B_2 = B_{22} \exp \left[i \left(\frac{\Delta\omega}{2} + T_0 B_0^2 \right) t - i\Omega t \right]$$

в (1.6) получим задачу на собственные значения относительно B_{11} и B_{22} , не зависящую явно от времени. Собственные значения Ω это корни уравнения

$$\begin{aligned} & \Omega^2 + 2B_0^2 (T_{22} - T_{11}) \Omega + T_{12} T_{21} B_0^4 + \left(-\frac{\Delta\omega}{2} - T_0 B_0^2 + 2T_{22} B_0^2 \right) \times \\ & \times \left(-\frac{\Delta\omega}{2} - T_0 B_0^2 + 2T_{11} B_0^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

решения которого

$$\Omega_{1,2} = (T_{11} - T_{22}) B_0^2 \pm \left\{ -T_{12} T_{21} + \left[-\frac{\Delta\omega}{2} + B_0^2 (T_{11} + T_{22} - T_0) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (1.10)$$

Формула (1.10) дает инкремент $\text{Im}\Omega_1$ с точностью до $k_0^2 a_0^2$ без ограничения малости $|K|$ по сравнению с k_0 , но чтобы описанный механизм был преобладающим, необходимо, чтобы $\Delta\omega \sim T_0 B_0^2$.

Введем новую функцию

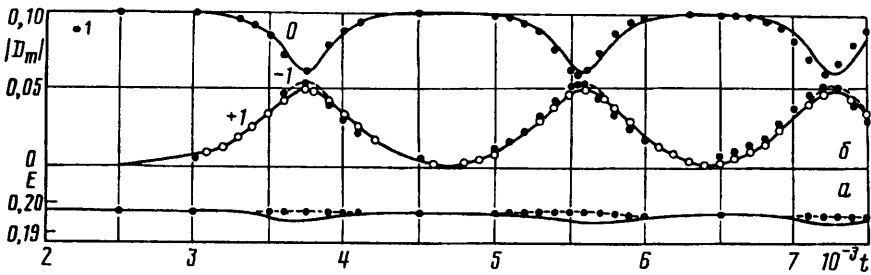
$$D(k, t) = B(k, t) \left(\frac{k}{2\omega} \right)^{1/2} e^{-i\omega t} \quad (1.11)$$

которую подставим в уравнение (1.1), и с учетом (1.2) получим систему из M уравнений Захарова для волновых компонент $D_m(t)$ ($m = (1, M)$)

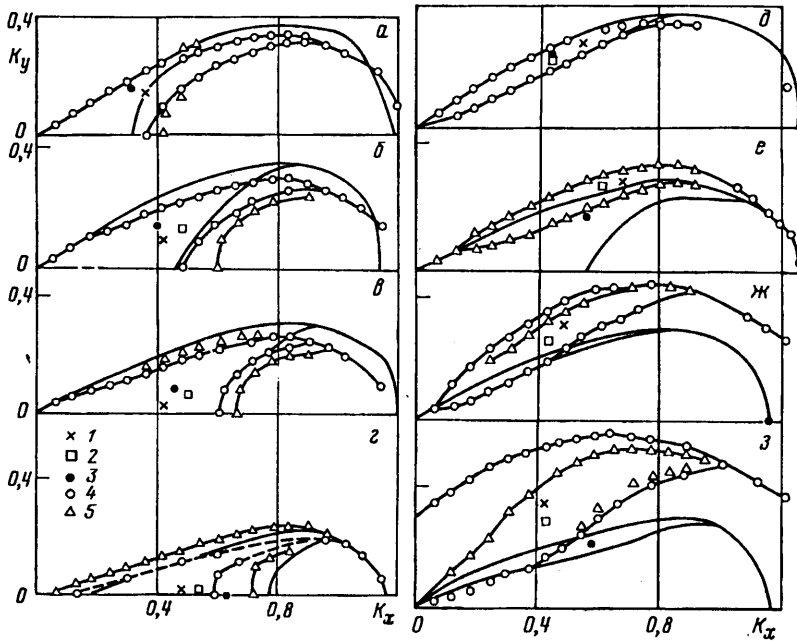
$$i \frac{dD_m}{dt} - \omega_m D_m = \sum_{k_m + k_n = k_l + k_j} T_l(k_m, k_n, k_l, k_j) \bar{D}_n D_l D_j \quad (1.12)$$

Функции взаимодействия T_l и T связаны следующим соотношением:

$$T_l = T \left(\frac{4k\omega_1\omega_2\omega_3}{\omega k_1 k_2 k_3} \right)^{1/2}$$



Фиг. 1



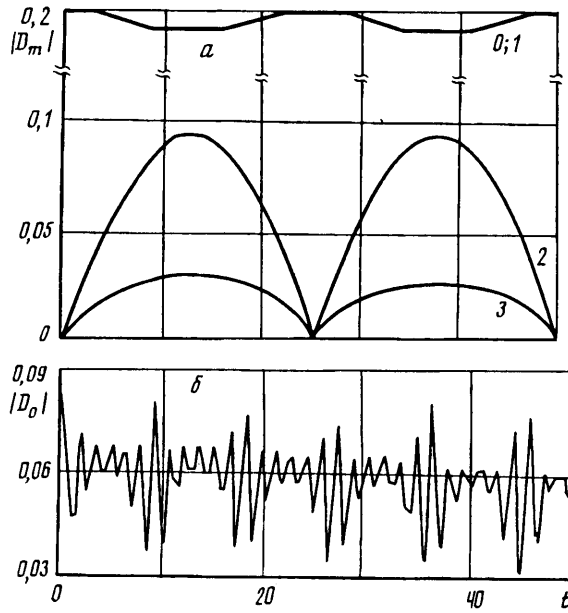
Фиг. 2

Энергия волновой системы определяется как [6]

$$E = \sum_{m=1}^M \omega_m |B(k_m, t)|^2 \quad (1.13)$$

Система уравнений (1.12) и выражение для энергии (1.13) будут использоваться далее для расчетов. Все расчеты будем вести в безразмерном виде (при $g = k_0 = 1$) [1]. Заметим, что в случае бесконечной глубины энергия волновой системы (1.13) не сохраняется [1] (сплошная линия на фиг. 1, а для крутизны волны $k_0 a_0 = 0,1$ [7]). Этот расчет (вариант 1) выполнен с использованием функций взаимодействия T_1 , полученных для глубокой воды [4]. Функции взаимодействия, сохраняющие энергию волн (1.13) (вариант 2), были получены в [6]: $T_2 = T_1 + \Delta\omega Z$, где $\Delta\omega = \omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$ — модуляционная расстройка частоты (1 на фиг. 1, а) [7]. Так как $\Delta\omega \sim k_0^2 a_0^2$, то для волн малой крутизны $T_2 = T_1$, для волн значительной крутизны $T_2 \neq T_1$. Расчеты инкрементов (1.10) и зависимостей волновых амплитуд по системе уравнений (1.12) рассчитывались для обоих вариантов — для функций T_1 — вариант 1 и T_2 — вариант 2.

2. На фиг. 2 представлены результаты расчетов инкрементов по формуле (1.10) и их сравнение с результатами работы [3]. Расчеты областей неустойчи-



Фиг. 3

ности приведены для тех же случаев, что и в [3]. Значения крутизн волн, глубин и инкрементов в безразмерном виде приведены в таблице. Из нее видно, что координаты максимальных инкрементов (K_x, K_y) и его величины наиболее близки лишь для первого случая большой глубины (см. фиг. 2, а 3 — [3], 1 — вариант 1, 2 — вариант 2). С уменьшением глубин и ростом крутизн волн

Вариант	Крутизна волн	Глубина	Координаты максимального инкремента (K_x, K_y) · 10 ²			Величина максимального инкремента 10 ² ImΩ ₁		
			по [3]	вариант 1	вариант 2	по [3]	вариант 1	вариант 2
<i>a</i>	0,2	2	31,17	36,14	36,14	1,13	0,88	0,94
<i>б</i>	0,3	2	40,14	42,08	48,12	2,39	1,35	1,63
<i>в</i>	0,35	2	46,08	42,02	48,06	3,31	1,36	1,90
<i>г</i>	0,39	2	62,0	48,02	54,02	4,60	0,96	2,02
<i>д</i>	0,2	1	42,24	54,28	42,22	0,95	0,53	0,69
<i>е</i>	0,29	1	55,19	66,30	60,28	3,07	0,43	1,02
<i>ж</i>	0,1	0,5	116,0	48,32	42,26	0,44	1,65	1,24
<i>з</i>	0,16	0,5	57,23	42,36	42,30	1,45	5,06	3,35

приведенные инкременты в соответствии с (1.10) примерно в 2 раза меньше инкрементов из [3] (кроме случая $h=0,5$), видимо, из-за неучета высоких приближений. То же относится к самим областям неустойчивости на фиг. 2 (сплошная линия — [3], 4 — вариант 1, 5 — вариант 2). Большим сходством обладают случаи на фиг. 2, а—д, а наименьшим — случаи на фиг. 2, е—з — это случаи малых глубин, когда волны сильно нелинейны и плохо описываются уравнением Захарова (1.1). Из фиг. 2 можно сделать вывод, что на больших, средних и малых глубинах, рассмотренных здесь, волны неустойчивы при $K_y > 0$, что совпадает с результатами работ [2, 3]. Таким образом, если на бесконечных глубинах неустойчивость поверхностных волн имеет двумерную структуру [1], то учет глубины приводит к трехмерной структуре неустойчивости. Расчеты в варианте 1 близки к расчетам в варианте 2, кроме последнего случая малой глубины на фиг. 2, з.

На фиг. 3 представлены результаты расчетов по системе уравнений (1.12) для волновых амплитуд $|D_m(t)|$ по функциям T_2 (вариант 2). Рассмотрим взаимодействие четырех векторов

$$\begin{aligned} 2k_0 &= k_2 + k_3 \\ 2\omega(k_0) &= \omega(k_2) + \omega(k_3) + \Delta\omega \\ \Delta\omega &= \frac{1}{2} \omega_0 (k_0 a_0)^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $k = k_1 = k_0$, $k_2 = k_0 + K$, $k_3 = k_0 - K$ (здесь k , k_1 , k_2 , k_3 взяты из уравнения (1.1)), координаты вектора K взяты из таблицы. Начальные условия $D_0(0) = D_1(0) = a_0$, $D_2(0) = 10^{-6} a_0$, $D_3(0) = iD_2(0)$. Индексы у волновых компонентов означают их номера m согласно волновым взаимодействиям из уравнения (1.1). Расчет проведен на ЭВМ ЕС-1060 по методу Рунге — Кутты с шагом по времени $\Delta t = 0,25$ для случаев a и $ж$ из таблицы. Номера возле кривых на фиг. 3, a , $б$ — номера амплитуд m . Из фиг. 3 видно, что взаимодействие волновых амплитуд носит характер биений, причем на большой глубине они менее заметны (фиг. 3, a), чем на малой (фиг. 3, $б$). Такое поведение амплитуд в случае трехмерной неустойчивости на конечной глубине значительно отличается от их поведения на бесконечной глубине, когда наблюдается явление рестабилизации (возврат Ферми — Пасты — Улама) (фиг. 1, $б$, сплошная линия — вариант 1, 1 — вариант 2) для крутизны волны $k_0 a_0 = 0,1$, $M = 7$ и волновые векторы коллинеарны [7]. Это различие видно и в масштабах времени взаимодействия. Такая зависимость $|D_m(t)|$, возможно, отражает изменение формы волны: синусоидальная форма волнового поля на глубокой воде, описываемая уравнением (1.1), сменяется кноидальной формой волны на мелкой воде, которая описывается уравнением Кортевега — де Вриза с квадратичной нелинейностью по амплитуде [8] в отличие от кубичной нелинейности по амплитуде в уравнении Захарова (1.1).

Таким образом, области неустойчивости низшего порядка для поверхностных гравитационных волн на конечной глубине, полученные с помощью уравнения Захарова, показывают трехмерную структуру неустойчивости в отличие от двумерной неустойчивости на бесконечной глубине. Этот метод удовлетворителен для волн любой крутизны на глубокой воде, для волн средней крутизны на средних глубинах и не удовлетворителен для волн на мелкой воде, где кубическая по амплитуде нелинейность заменяется квадратичной нелинейностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юэн Г., Лейк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987. 179 с.
2. Захаров В. Е., Харитонов В. Г. Неустойчивость монохроматических волн на поверхности жидкости произвольной глубины//ПМТФ. 1970. № 5. С. 45—49.
3. McLean J. W. Instabilities of finite-amplitude gravity waves on water of finite depth//J. Fluid Mech. 1982. V. 114. P. 331—341.
4. Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхность глубокой жидкости//ПМТФ. 1968. № 2. С. 86—94.
5. Bryant P. J. Oblique instability of periodic waves in shallow water//J. Fluid Mech. 1978. V. 86. P. 783—792.
6. Красицкий В. П. О каноническом преобразовании в теории слабонелинейных волн с нераспадным законом дисперсии//Журн. эксперим. и теорет. физики. 1990. Т. 98. Вып. 5(11). С. 1644—1655.
7. Калмыков В. А. Неустойчивость поверхностных волн относительно поперечных возмущений//Океанология. 1991. Т. 31. Вып. 6. С. 916—919.
8. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 1/Перев. под ред. В. А. Городцова, А. И. Леонтьева. М.: Мир, 1981. 480 с.