

УДК 532.582.2

© 1992 г. Н. А. ВЕКЛИЧ

УДАР ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ О ЖИДКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Рассмотрено потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей полупространство, при ударе прямоугольной пластины по ее поверхности. Вне пластины поверхность жидкости свободная. Для импульсивного давления под гибкой пластиной получено интегральное уравнение первого рода. Оно решалось для частного случая удара жесткой недеформируемой пластины на ЭВМ методом степенных рядов. Дана оценка точности метода. Построены теоретические зависимости коэффициентов присоединенной массы и присоединенных моментов инерции жесткой недеформируемой пластины от геометрии пластины, которые сопоставлялись с экспериментальными данными и с эмпирическими формулами [1—3], не связанными непосредственно с решением уравнения Лапласа.

1. Потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости, вызванное ударом прямоугольной пластины, описываем в неподвижной прямоугольной системе координат x, y, z , начало которой помещено в центре пластины, оси x, y параллельны ее сторонам, ось z направлена наружу жидкости (фиг. 1). Длина пластины $2a$, ширина $2b$ ($a \geq b$), плотность жидкости ρ .

Пусть при ударе пластина придает частицам жидкости на поверхности полупространства заданную скорость $v_0 v(x, y)$, где v_0 — характерная размерная скорость. Вне пластины поверхность жидкости остается свободной, на ней импульсивное давление равно нулю.

Потенциал скоростей обозначим $bv_0\varphi(x, y, z)$, где $\varphi(x, y, z)$ — безразмерный потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа и граничным условиям

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\varphi(x, y, 0) = 0, \quad |x| > a, \quad |y| > b$$

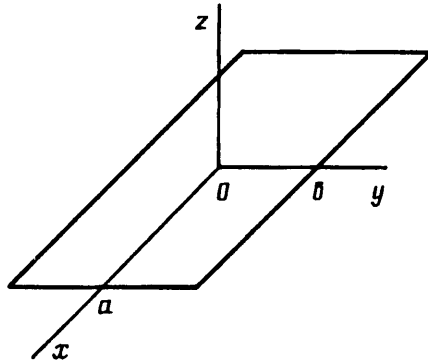
$$\frac{\partial \varphi(x, y, 0)}{\partial z} = -\frac{1}{b} v(x, y), \quad |x| \leq a, \quad |y| \leq b \quad (1.2)$$

На бесконечности жидкость покоится, так что там частные производные $\varphi(x, y, z)$ по x, y и z равны нулю.

Для нахождения $\varphi(x, y, z)$ удобно ввести импульсивное давление непосредственно под пластиной, которое обозначим $2\pi\rho bv_0 p(x, y)$, где $p(x, y)$ — безразмерное импульсивное давление, $|x| \leq a, |y| \leq b$.

Применим к уравнению (1.1) интегральное преобразование Фурье по x и y и выразим $\varphi(x, y, z)$ через $p(x, y)$ в виде интеграла [4]. После этого подставим потенциал $\varphi(x, y, z)$ в кинематическое граничное условие (1.2) под пластиной. Получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода для $p(x, y)$. Проинтегрируем по x и y его левую и правую части и запишем получившееся уравнение для $p(x, y)$ в безразмерных переменных $x^* = x/a, y^* = y/b$ (звездочки у x^* и y^* для простоты в дальнейшем не пишем)

$$\int_0^x \int_0^y v(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p(\xi, \eta) \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 K(mx - \xi, ny - \eta) d\xi d\eta \quad (1.3)$$



Фиг. 1

$$-1 \leq x, y \leq 1, \quad K(s, t) = \frac{1}{st} \sqrt{s^2 + \gamma^2 t^2}$$

$$\gamma = \frac{b}{a}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1$$

Сингулярное ядро уравнения (1.3) имеет вид суммы четырех слагаемых, а интеграл понимается в смысле главного значения.

2. Решение уравнения (1.3) получим для трех частных случаев удара жесткой недеформируемой прямоугольной пластины, когда распределение скорости $v(x, y)$ и импульсивного давления $p(x, y)$ обладают определенной симметрией относительно координатных осей.

Пусть $v(x, y) = 1$. Так будет при нормальном ударе жесткой прямоугольной пластины, придающей одинаковую скорость v_0 частицам жидкости на поверхности.

Импульсивное давление $p(x, y)$ будет четной функцией по x и y . Ищем его в виде степенного ряда

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n p_n^k x^{2(n-k)} y^{2k} \quad (2.1)$$

коэффициенты p_n^k которого подлежат определению.

Динамическое взаимодействие пластины с жидкостью характеризуется присоединенной массой λm_0 , где λ — коэффициент присоединенной массы

$$\lambda = 8 \int_0^1 \int_0^1 p(x, y) dx dy = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{8p_n^k}{(2k+1)[2(n-k)+1]} \quad (2.2)$$

а $m_0 = \pi a b^2 \rho$ — присоединенная масса пластины бесконечного размаха и ширины $2b$, рассчитанная на участок этой пластины длиной $2a$.

Подставим ряд (2.1) в правую часть уравнения (1.3). Выполняя интегрирование, придадим этому уравнению следующий вид:

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n p_n^k \int_{x-1}^{x+1} \frac{(x-\xi)^{2(n-k)}}{\xi} d\xi \int_{y-1}^{y+1} \frac{(y-\eta)^{2k}}{\eta} \sqrt{\xi^2 + \gamma^2 \eta^2} d\eta \quad (2.3)$$

Далее разложим все двойные интегралы в (2.3) в ряды по степеням x и y , поменяем порядок суммирования и приведем подобные члены. В результате после сокращения слева и справа множителей xy вместо (2.3) получим уравнение, не содержащее двойных интегралов

$$1 = 4\alpha \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{l,m} p_n^k x^{2(l-m)} y^{2m} \quad (2.4)$$

$$\alpha = \sqrt{1 + \gamma^2}, \quad i = \frac{1}{2} l(l + 1) + m + 1, \quad j = \frac{1}{2} n(n + 1) + k + 1$$

Коэффициенты a_{ij} в степенном ряде (2.4) выражаются в виде суммы четырех функций S_M , $M = 1, 2, 3, 4$

$$a_{ij} = \sum_{M=1}^4 S_M(l - m, m, n, k) \quad (2.5)$$

$$S_1(R, Q, n, k) = \sum_{r=0}^{2R} \sum_{q=0}^{2Q} F(r, q) b_q(2Q + 1, 2k) b_r(2R + 1, 2(n - k)) \quad (2.6)$$

$$S_2(R, Q, n, k) = \frac{C_{2(n-k)}^{2R+1} C_{2k}^{2Q+1}}{2(n - R - Q) - 1} [F_1^{2(k-Q-1)}(0) + F_2^{2(n-k-R-1)}(0)]$$

$$S_3(R, Q, n, k) = C_{2(n-k)}^{2R+1} \sum_{q=0}^{2Q} F_2^{2(n-k-R-1)}(q) b_q(2Q + 1, 2k)$$

$$S_4(R, Q, n, k) = C_{2k}^{2Q+1} \sum_{r=0}^{2R} F_1^{2(k-Q-1)}(r) b_r(2R + 1, 2(n - k))$$

Функции S_M выражаются через биномиальные коэффициенты $C_n^m = n! / m!(n - m)!$ и через сложные комбинации этих коэффициентов, обозначенные $b_k(m, n)$

$$b_k(m, n) = \sum_{t=k_1}^m \frac{C_{2n}^{2(m-t)+1} C_{2(n-m+t-1)}^{2t-k-1}}{2t} - \sum_{t=k_2}^m \frac{C_{2n}^{2(m-t)} C_{2(n-m+t)-1}^{2t-k}}{2t + 1}$$

$$k_1 = 1 + \text{Ent} \left(\frac{k}{2} \right), \quad k_2 = \text{Ent} \left(\frac{k + 1}{2} \right) \quad (2.7)$$

где $\text{Ent}(x)$ — целая часть x .

В (2.6) входят коэффициенты $F(r, q)$, $F_1^s(r)$ и $F_2^s(r)$ следующих трех степенных рядов:

$$\sqrt{(1 + x)^2 + \gamma^2 (1 + y)^2} = \alpha \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} F(r, q) x^r y^q \quad (2.8)$$

$$\int_0^1 \xi^s \sqrt{(1 + x)^2 + \gamma^2 \xi^2} d\xi = \alpha \sum_{r=0}^{\infty} F_1^s(r) x^r$$

$$\int_0^1 \xi^s \sqrt{\xi^2 + \gamma^2 (1 + y)^2} d\xi = \alpha \sum_{r=0}^{\infty} F_2^s(r) y^r$$

Суммы биномиальных коэффициентов (2.7), по-видимому, не встречаются в справочной математической литературе. К тому же они неудобны для вычислений. Однако их удалось значительно упростить, причем оказалось

$$b_k(m, n) = \frac{(-1)^k}{n - m} \left(1 - \frac{C_n^{m-k}}{C_m^k} \right) \quad (2.9)$$

Для вычислений $F(r, q)$, $F_1^s(r)$ и $F_2^s(r)$ можно использовать рекуррентные формулы

$$F(r, q) = \sum_{s=0}^r \sum_{t=0}^q \frac{\gamma^{2(q-t)}}{2^{s+t}} D_N C_{q-t}^s C_{r-s}^t C_N^{q-t} \quad (2.10)$$

$$N = r + q - s - t, \quad N \geq 0$$

$$D_N = \frac{(-1)^{N-1} (2N - 3)!!}{N! \alpha^{2N}}, \quad (-3)!! = -1$$

$$(-1)!! = 1, \quad (2N - 3)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2N - 3)$$

$$r^* = \text{Ent} \left(\frac{r}{2} \right), \quad q^* = \text{Ent} \left(\frac{q}{2} \right)$$

$$F_{1,2}^s(T) = \sum_{R=M}^T C_R^{T-R} 2^{R-T} D_R J_{1,2}(R)$$

$$M = \text{Ent} \left(\frac{T+1}{2} \right)$$

$$J_1(R) = \alpha^2 \frac{(4-2R+s) J_1(R-1) - 1}{3-2R}, \quad R = 1, 2, 3, \dots$$

$$J_1(0) = I_1(s) = \frac{\alpha^2 - (s-1) I_1(s-2)}{(s+2) \gamma^2}, \quad s = 2, 4, \dots$$

$$I_1(0) = \frac{1}{2\alpha\gamma} \ln(\alpha + \gamma) + \frac{1}{2}$$

$$J_2(R) = \alpha^2 \frac{(4-2R+s) J_2(R-1) - \gamma^{2(R-1)}}{3-2R}, \quad R = 1, 2, 3, \dots$$

$$J_2(0) = I_2(s) = \frac{\alpha^2 - (s-1) \gamma^2 I_2(s-2)}{s+2}, \quad s = 2, 4, \dots$$

$$I_2(0) = \frac{\gamma^2}{2\alpha} \ln \frac{1+\alpha}{\gamma} + \frac{1}{2}$$

Располагая эффективными формулами (2.5)—(2.10) для коэффициентов a_{ij} , выпишем систему уравнений для p_n^k как следствие из уравнения (2.4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{ij} p_n^k = \frac{1}{4\alpha} \quad (2.11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{ij} p_n^k = 0, \quad i \geq 2$$

$$i = \frac{1}{2} l(l+1) + m + 1, \quad j = \frac{1}{2} n(n+1) + k + 1$$

$$l \geq 1, \quad n \geq 0, \quad 0 \leq m \leq l, \quad 0 \leq k \leq n$$

Метод решения этой бесконечной системы уравнений будет дан ниже.

Пусть теперь $v(x, y) = x$. При ударе пластина вращается относительно «малой» поперечной оси симметрии y , причем края пластины, параллельные этой оси, имеют скорость $\pm v_0$.

Импульсивное давление $p(x, y)$ ищем в виде ряда

$$p(x, y) = x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n p_n^k x^{2(n-k)} y^{2k} \quad (2.12)$$

Динамическое взаимодействие пластины с жидкостью в этом случае характеризуется присоединенным моментом инерции $\mu_1 \rho a^2 b^2$, где μ_1 — коэффициент присоединенного момента инерции

$$\mu_1 = 8 \int_0^1 \int_0^1 x p(x, y) dx dy = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{8 p_n^k}{(2k+1) [2(n-k)+3]} \quad (2.13)$$

Выполняя выкладки, аналогичные предыдущим, получим бесконечную систему уравнений для p_n^k , которая отличается от (2.11) только первым уравнением

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{ij} p_n^k = \frac{1}{8\alpha} \quad (2.14)$$

Остальные уравнения, в том числе и соотношения для индексов i, j, l, m, n, k по-прежнему совпадают с соотношениями (2.11). Изменяется только формула для a_{ij} , так как вместо (2.5) имеем

$$a_{ij} = \sum_{M=1}^4 S_M \left(l - m + \frac{1}{2}, m, n + \frac{1}{2}, k \right) \quad (2.15)$$

Формулы (2.6), (2.9)—(2.10) остаются по-прежнему справедливыми.

Рассмотрим еще распределение скорости при ударе: $v(x, y) = y$ (вращение пластины относительно «большой» продольной оси симметрии x , причем соответствующие края пластины имеют скорости $\pm v_0$).

Импульсивное давление $p(x, y)$ будет нечетной функцией по y

$$p(x, y) = y \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n p_n^k x^{2(n-k)} y^{2k} \quad (2.16)$$

Присоединенный момент инерции пластины равен $\lambda r a b^3 \mu_2$, где μ_2 — коэффициент присоединенного момента инерции

$$\mu_2 = 8 \int_0^1 \int_0^1 y p(x, y) dx dy = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{8 p_n^k}{(2k+3) [2(n-k)+1]} \quad (2.17)$$

Бесконечная система уравнений для p_n^k также имеет в данном случае вид (2.11) с поправкой (2.14), но ее коэффициенты a_{ij} следует вычислять по формуле

$$a_{ij} = \sum_{M=1}^4 S_M \left(l - m, m + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \quad (2.18)$$

применяя при этом, как и в двух предыдущих задачах, равенства (2.6), (2.9)—(2.10).

3. При расчете коэффициента присоединенной массы λ бесконечная система уравнений (2.11) укорачивалась. Для этого ряд (2.1) заменялся частичной суммой, т. е. импульсивное давление $p(x, y)$ аппроксимировалось полиномом степени $2n$ по x и по y , состоящем из первых N членов ряда (2.1), $N = (n+1)(n+2)/2$. Обычно в расчетах принималось ограничение $0 \leq n \leq 16$. Полиномы более высоких степеней ($n \geq 17$) в вычислениях λ не применялись.

Коэффициенты a_{ij} системы (2.11) вычислялись для индексов i и j , удовлетворяющих условию $1 \leq i, j \leq N$.

Укороченная система (2.11) из первых N ее уравнений для N неизвестных p_n^k решалась методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

Аналогично рассчитывались и коэффициенты присоединенных моментов инерции μ_1 и μ_2 , но в рядах (2.12) и (2.16) индекс суммирования n изменялся в пределах $0 \leq n \leq 15$.

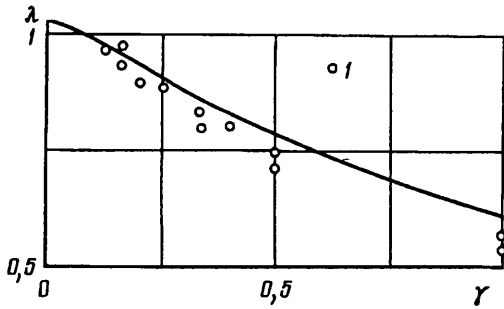
О достоверности и точности численного решения можно было судить по двум признакам.

Для квадратных пластин ($\gamma = 1$) проверялось выполнение равенства коэффициентов $p_n^{n-k} - p_n^k$ ряда (2.11) и коэффициентов присоединенных моментов инерции $\mu_1 = \mu_2$ как необходимых условий достоверности решения. Расчеты показали, что когда для вычисления коэффициентов a_{ij} применялись аналитически легко получаемые, но громоздкие формулы (для экономии места они здесь не приводятся, кроме одной формулы (2.7)), то условия достоверности выполнялись не все. Все необходимые условия достоверности стали выполняться только после того, как для a_{ij} были получены эффективные расчетные формулы (2.5), (2.6), (2.9), (2.10).

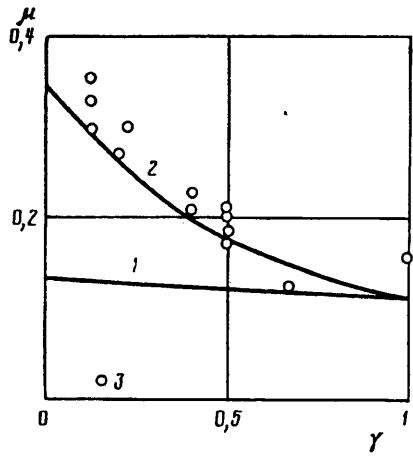
Для бесконечно длинных пластин ($\gamma = 0$) точное решение уравнения (1.3) дает $\lambda = 1$, $\mu_1 = 1/3$, $\mu_2 = 1/8$. Численное решение немного превышает эти значения (λ — на 3% при $n = 16$, μ_1 — на 3% и μ_2 — на 6% при $n = 15$).

Чтобы полнее решить вопрос о точности и сходимости метода, рассмотрим влияние показателя n на другие результаты вычислений.

Сохраняя в системе (2.11) одно уравнение с одним неизвестным p_0 , т. е. полагая $n = 0$, получим $\lambda = 2/\alpha$. Для других n приведем таблицу значений λ квадратной ($\gamma = 1$) и достаточно длинной ($\gamma = 0,1$) пластин. Там, где целая часть λ равна нулю, в таблице указаны только цифры после десятичной запятой



Фиг. 2



Фиг. 3

| n | 5 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|----------------|--------|--------|------|------|------|------|------|------|
| $\lambda(1)$ | 6566 | 6199 | 6164 | 6134 | 6109 | 6087 | 6068 | 6052 |
| $\lambda(0,1)$ | 1,0682 | 1,0137 | | | 9993 | 9958 | 9927 | 9900 |

Из аналитической формулы для нулевого приближения $\lambda = 2/\alpha$ ($n=0$) и данных, приведенных выше, следует, что с ростом n коэффициент λ уменьшается, причем для квадратных пластин λ уменьшается наименее ощутимо.

Поэтому для квадратных пластин коэффициент λ от значения $\lambda = 0,6052$ ($n=16$) при $n \rightarrow \infty$ уменьшится не более чем на 0,0303, поскольку при $\gamma=0$ и $n=16$ имеем $\lambda = 1,0303$.

Отсюда получаем оценку коэффициента присоединенной массы λ для квадратных пластин $0,5749 < \lambda < 0,6052$ и границы относительной погрешности метода. При $n=16$ минимальная относительная погрешность метода не менее 3% ($\gamma=0$), а максимальная — не более 5,2% ($\gamma=1$).

На фиг. 2 приведен график зависимости коэффициента присоединенной массы λ от параметра γ , рассчитанный на ЭВМ по предлагаемому методу при $n=16$. По оценкам, точный график $\lambda = \lambda(\gamma)$ должен располагаться несколько ниже (на 3—5,2%). Точками 1 помечены экспериментальные данные, заимствованные из [1]. Можно видеть, что приближенное решение удовлетворительно согласуется с экспериментом при малых γ , т. е. для длинных пластин. Для не очень длинных пластин ($\gamma > 0,5$) расчетные значения коэффициента λ заметно превышают экспериментальные данные. Наибольшее отклонение (превышение на 8,6%) получается для квадратной пластины, если ее коэффициент λ рассчитывать по эмпирической формуле Пабста [1]

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \left(1 - 0,425 \frac{\gamma}{\alpha^2} \right) \quad (3.1)$$

принятой для аппроксимации результатов экспериментов многих авторов.

Формула (3.1) занижает коэффициент λ квадратной пластины не менее чем на 1,9%. Эмпирическая формула $\lambda = 1/\alpha$ [2, 3] имеет удовлетворительную точность только при очень малых γ . Для квадратных же пластин она обладает низкой точностью, завышая λ не менее чем на 17%.

На фиг. 3 приведены графики зависимости коэффициентов присоединенных моментов инерции μ_1 (кривая 1) и μ_2 (кривая 2) от γ , полученные из системы (2.11) с поправками (2.12)—(2.18) при $n=15$. Соответствующие точные графики

μ_1 и μ_2 должны располагаться немного ниже (вблизи $\gamma = 0$ — на 3 и на 6%, вблизи $\gamma = 1$ — не более чем на 10%).

Точками 3 отмечены экспериментальные данные для коэффициента присоединенного момента инерции μ_2 , заимствованные из работы [1]. Эти данные подвержены значительному разбросу. Поэтому приближенное теоретическое решение μ_2 удовлетворительно согласуется лишь с немногими экспериментальными данными.

Коэффициент μ_1 в литературе, по-видимому, не определялся.

Уравнение (1.3) для $p(x, y)$ решалось также методами интегральных сумм и коллокаций. Не останавливаясь на соответствующих деталях, отметим только, что оба эти метода уступают методу степенных рядов по сходимости и достоверности результатов. К тому же метод степенных рядов может быть применен в уравнении (1.3) и для исследования динамического взаимодействия прямоугольных упругих пластин с идеальной несжимаемой жидкостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Римап И. С., Крепс Р. Л. Присоединенные массы тел различной формы//Тр. ЦАГИ. 1947. № 635. 47 с.
2. Yee-Tak Yu. Virtual masses of rectangular plates and parallelepipeds in water//J. Appl. Phys. 1945. V. 16. № 11. P. 724—729.
3. Payne P. The virtual mass of a rectangular flat plate of finite aspect ratio//Ocean Eng. (G. Brit.). 1981. V. 8. № 5. P. 541—545.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.XII.1990