МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1992

УДК 532.546:515.124

 О. Ю. ДИНАРИЕВ

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ[1]

Представлен обзор приложений фрактальной геометрии в теории фильтрации жидкостей и газов через пористые материалы.

Последние пять лет ознаменовались бурным развитием приложений теории фракталов — множеств с нецелой пространственной размерностью — в физике, механике, химической кинетике. При этом зачастую расширение сферы приложений значительно опережало прогресс в соответствующих областях математики. По этой причине исследователи, не имея в распоряжении адекватного математического аппарата, получают многие результаты на полуинтуитивном уровне. Такая ситуация обусловлена еще и тем, что в настоящей момент не очерчен до конца круг всех природных явлений, которые можно описывать с помощью фрактальной геометрии, не сформулирован полностью класс соответствующих понятий и не осознан объем всех проблем и задач, которые могут в этой связи возникнуть в математике. Сейчас продолжается процесс накопления общих идей, концепций и подходов. Поэтому возникающие сегодня новые фрактальные модели природных объектов могут завтра породить самостоятельные новые области науки.

1. Фракталы — множества с нецелой размерностью Хаусдорфа — Безиковича — известны в математике давно, однако широкое применение для описания различных природных объектов, явлений и процессов они получили сравнительно недавно и в основном благодаря работам [1—3]. Эти работы очень несложны в плане математического аппарата, но зато содержат большое количество конкретных примеров из географии, биологии, космологии, механики, физики, иллюстрирующих пользу понятия фрактала и фрактальной размерности. Вслед за работами [1—3] появилось огромное множество работ с приложениями теории фракталов в самых разных областях науки, которые сейчас уже трудно перечислить. Хороший обзор положения дел в теории фракталов до 1987 г. содержится в [4].

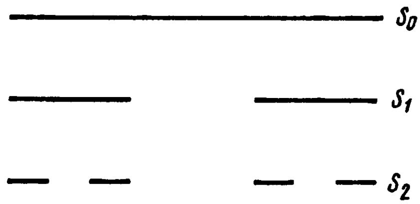
Понятие размерности возникло в топологии, и до недавнего времени под размерностью множества понимали именно его топологическую размерность. Для определения топологической размерности d_t данного множества достаточно наличия на нем топологии, т. е., например, наличия операции замыкания, удовлетворяющей определенным аксиомам [5]. Топологическая размерность d_t может принимать только целочисленные значения $d_t = -1, 0, 1, 2, \ldots$, причем значение $d_t = -1$ является характеристическим для пустого множества.

Для определения размерности Хаусдорфа — Безиковича необходимо по крайней мере наличие метрической структуры.

Пусть S — некоторое компактное множество, C — конечное покрытие множества S открытыми шарами разных радиусов. Для любого шара $B \in C$ пусть $r(B)$ — радиус шара B. Положим по определению $r(C) = \max\{r(B) \mid B \in C\}$. Далее определим для любого неотрицательного числа d конечную величину

$$\Sigma(C, d) = \sum_{B \in C} r^d(B) \tag{1.1}$$

[1] По материалам доклада, прочитанного на VII съезде по теоретической и прикладной механике, Москва, август 1991 г. Представлено В. Н. Николаевским.



Фиг. 1

Для любого положительного числа ε минимизируем суммы (1.1) по всем покрытиям C, таким, что $r(C) \leq \varepsilon$

$$\sigma_d(S, \varepsilon) = \inf \{\Sigma (C, d) \,|\, r(C) \leq \varepsilon\}$$

При стремлении ε к нулю величина $\sigma_d(S, \varepsilon)$ в общем случае может стремиться к нулю, к бесконечности или сходиться к конечному ненулевому пределу. Существует некоторое число d_H, такое, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_d (S, \varepsilon) = 0 \ (d > d_H), \ + \infty \ (d < d_H)$$

Величина d_H называется размерностью Хаусдорфа — Безиковича множества S или фрактальной размерностью. Для евклидовых пространств и гладких многообразий d_H совпадает с обычной топологической размерностью. Однако существует много примеров [1—3], когда размерность Хаусдорфа — Безиковича множества превышает его топологическую размерность. В этом случае множество называют фрактальным множеством или просто фракталом.

Если множество S вложено в евклидово пространство R^D, как обычно бывает в приложениях, то используют более грубое «практическое» определение фрактальной размерности

$$d_H = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)} \tag{1.2}$$

где $N(\varepsilon)$ — минимальное число D-кубов с ребром ε, которыми можно покрыть множество S.

В определении фрактальной размерности не предусмотрено, что предел $\sigma_{d_H}(S, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ конечен и отличен от нуля. Если оказывается, что это действительно так, то предельный переход может быть использован для задания на S меры Хаусдорфа μ_H [6]. На основе этой меры по стандартной процедуре [7] может быть развита теория интегрирования на S. Так, если f — непрерывная функция на S, то можно определить интеграл от f по формуле

$$\int_S f d\mu_H = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_i f(x_i)\, \mu_H (S_i), \quad S = \bigcup_i S_i$$

где S разбивается на конечное число интегрируемых подмножеств S_i с диаметром, не превышающим ε, x_i — выбранная произвольным образом точка в S_i.

Приведем некоторые простые примеры фрактальных множеств.

Канторово множество (см. фиг. 1). Это множество строится посредством следующей рекуррентной процедуры. Пусть $S_0 = [0,1]$ — отрезок единичной длины. Вырежем из его середины открытый интервал с длиной $^1/_3$. Получится множество $S_1 = [0, ⅓] \cup [⅔, 1]$. На следующем этапе вырезаем интервал длины $(^1/_3)^2$ из середин каждого из двух получившихся отрезков и т. д. Получаем убывающую последовательность замкнутых множеств $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots$. Канторово множество S, по определению, получается как пересечение множеств S_n. Топологическая размерность этого множества равна нулю. Для определения его фрактальной размерности будем покрывать множество S отрезками с переменной длиной $\varepsilon_n = (1/3)^n$, $n = 0, 1, 2\ldots$. Тогда очевидно, что $N(\varepsilon_n) = 2^n$. Подставляя эти соотношения в (1.2) и устремляя n к $+\infty$, получаем $d_H = \ln 2/\ln 3$. При этом, как легко видеть

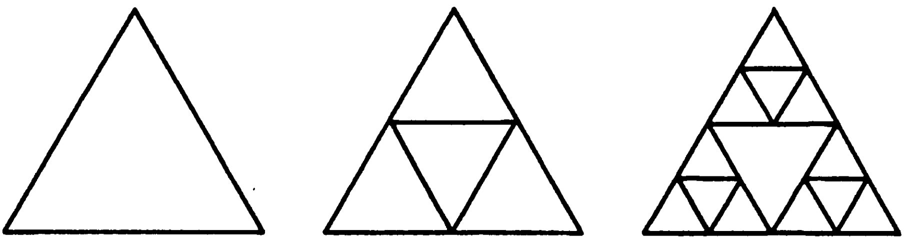
$$d_t < d_H < D \ (D = 1) \tag{1.3}$$

Кривая Коха (фиг. 2). Множество строится посредством рекуррентной процедуры на евклидовой плоскости. S_0 — единичный отрезок прямой, S_1 получается в результате вырезания из середины

Фиг. 2

S_0 открытого интервала с длиной $^1/_3$ и приклеивания вместо него двух связанных отрезков с длинами $^1/_3$. На следующем шаге та же операция осуществляется для каждого из четырех отрезков, из которых состоит S_1, и т. д. Получается последовательность ломаных $S_0, S_1, \ldots$. В пределе имеется некоторое множество S с топологической размерностью $d_t = 1$, называемое кривой Коха. Для определения фрактальной размерности будем измерять длину S с помощью линейки с переменным масштабом $\varepsilon_n = (1/3)^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Тогда $N(\varepsilon_n) = 4^n$. По формуле (1.2) имеем $d_H = \ln 4/\ln 3$. В данном случае $D = 2$ и, как и раньше, имеет место неравенство (1.3).

Прокладка Серпинского (Sierpinski gasket, фиг. 3). Пусть S_0 — множество точек внутри равностороннего треугольника с единичным ребром. Проведем в этом треугольнике медианы. Они делят S_0 на четыре равносторонних треугольника с длиной ребра $^1/_2$. Вырежем из S_0 точки, попавшие во



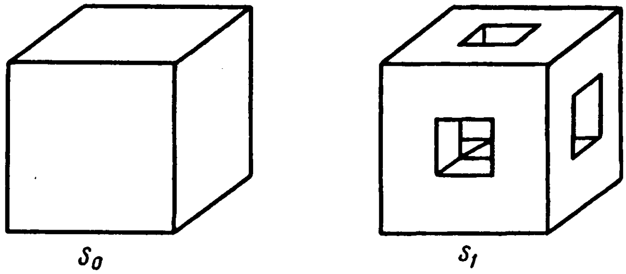
Фиг. 3

внутренний треугольник. Полученное множество обозначим S_1. На следующем шаге ту же операцию осуществим для каждого из трех треугольников, входящих в S_1. В результате имеем убывающую последовательность замкнутых множеств в евклидовой плоскости $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots$. Полагаем, по определению, S — пересечение множеств S_n. Тогда S — множество с топологической размерностью $d_t = 1$.

Для вычисления фрактальной размерности заметим, что в формуле (1.2) можно рассматривать покрытия не только кубами, но и шарами, симплексами и т. д.— любыми подобными фигурами с характерным размером ε. При этом результат (1.2) по-прежнему будет иметь место. Рассмотрим покрытия S равносторонними треугольниками с длиной ребра $\varepsilon_n = (1/2)^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Легко видеть, что $N(\varepsilon_n) = 3^n$. По формуле (1.2) получаем $d_H = \ln 3/\ln 2$, и опять имеет место неравенство (1.3).

Губка Серпинского (фиг. 4). Пусть S_0 — единичный куб. S_1 получается из S_0 вырезанием квадратных отверстий с длиной ребра $^1/_3$. Затем та же процедура применяется к 20 кубам, слагающим S_1, и т. д. S — пересечение множеств S_n. Это пространственный фрактал с топологической размерностью $d_t = 2$ и фрактальной размерностью $d_H = \ln 20/\ln 3$. Имеет место (1.3).

Все перечисленные фракталы получаются в результате применения на каждом шаге некоторой однотипной процедуры (генератора), которая задается определенной геометрической фигурой. В силу этого такие фракталы называются регулярными геометрическими фракталами. Природные объекты редко описываются регулярными геометрическими фракталами. Однако для таких фракталов можно осуществить точные расчеты, представляющие интерес для практики.



Фиг. 4

Кроме того, модифицируя процедуру построения фрактала (чередуя два или большее количество генераторов), можно построить более реалистичные объекты).

Отметим, что при выполнении неравенств (1.3) фрактал имеет нулевую меру Лебега в объемлющем пространстве.

Изучая приведенные примеры, легко убедиться, что все эти фракталы являются локально самоподобными. Свойство локального самоподобия вообще весьма распространено для регулярных геометрических фракталов и иногда его включают в определение фрактала. Для случайных или стохастических фракталов, для которых локальное самоподобие в строгом смысле не имеет места, считается, что самоподобие реализуется в обобщенном усредненном смысле.

Локальное самоподобие означает в математическом плане следующее. Для фрактала S существует некоторое число λ $(0<\lambda<1)$ и некоторое всюду плотное подмножество S_λ, называемое множеством λ-центров, такое, что для всякой точки $a \in S_\lambda$ существует окрестность точки a в S, преобразующаяся в себя при отображении подобия

$$x \mapsto \lambda (x - a) + a$$

Для канторова множества $\lambda = {}^1/_3$, S_λ — множество всех концов отрезков. Для кривой Коха $\lambda = {}^1/_3$, S_λ — множество всех вершин на кривой. Для фракталов из двух последних примеров $\lambda = {}^1/_3$, S_λ — множество вершин треугольников и кубов соответственно.

Множество λ-центров не исчерпывает всего фрактала. В [8] показано, что точки фрактала, не являющиеся λ-центрами, также образуют всюду плотное множество.

Наличие λ-центров позволяет определить дифференцирование на фрактале.

Действительно, пусть f — некоторая функция на фрактале, a — λ-центр и пусть x — некоторая точка из достаточно малой окрестности точки a. Тогда для $\alpha > 0$ можно определить дробную производную от f в направлении $h = x - a$ как предел (если он существует)

$$D_h^\alpha f(a) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(a + \lambda^n h) - f(a)}{\lambda^{n\alpha} \|h\|^\alpha} \tag{1.4}$$

Введем понятие химической размерности фрактала.

Пусть a_{in}, a_{fin} — две точки на фрактале, $L_\varepsilon(a_{\text{in}}, a_{\text{fin}})$ — длина наикратчайшей ломаной, соединяющей a_{in} и a_{fin} так, что вершины ломаной принадлежат фракталу, а отрезки ломаной не превышают ε. Если при $\varepsilon \to 0$ имеется асимптотика

$$L_\varepsilon (a_{\text{in}}, a_{\text{fin}}) = \text{const}\ \varepsilon^{1-d_c}$$

то величина d_c называется химической размерностью фрактала. Легко видеть, что для канторова множества химическая размерность не определена, для кривой Коха $d_c = d_H = \ln 4/\ln 3$, а для остальных примеров $d_c = 1$.

В определении (1.4) имеет смысл использовать $\alpha \le d_c$, как показывает следующая лемма.

Лемма. Пусть f — функция на фрактале S, для которой верхняя грань отношений

$$|f(x) - f(y)| / \|x - y\|^{\alpha}$$

ограничена некоторой константой. Тогда если $\alpha > d_c$, то $f = \text{const}$.

Действительно, построим ломаную с вершинами a_i на фрактале с длинами отрезков не более ε и с крайними точками $a_0 = x$ и $a_n = y$. Тогда

$$|f(x) - f(y)| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \le \text{const}\, \varepsilon^{\alpha - d_c}$$

Если $\alpha > d_c$, то отсюда при $\varepsilon \to 0$ получаем $f(x) = f(y)$.

В евклидовых пространствах $d_c = 1$ и имеет смысл рассматривать производные (1.4) с $\alpha \le 1$. На фракталах с нетривиальной химической размерностью возможности дифференциального исчисления увеличиваются.

Кроме размерностей d и d_c для фракталов можно определить много других размерностей. Заметим, например, что для $\beta > 0$ при интегрировании по фракталу функции r^{β}, где r — расстояние от выбранной точки фрактала, будет иметь место асимптотика

$$\int_{r \le R} r^{\beta} d\mu_H \sim \text{const} \cdot R^{\beta + d(\beta)} \tag{1.5}$$

Здесь $d(0) = d_H$, а при $\beta > 0$ формула (1.5) определяет в общем случае целое семейство размерностей $d(\beta)$.

2. При использовании фрактальной геометрии для описания пористых материалов в принципе возможны следующие модели: 1) фрактал — поровое пространство, 2) фрактал — скелет породы, 3) фрактал — поверхность скелета породы, 4) фрактал — система трещин в пористой матрице.

В силу того что фрактал имеет нулевую меру Лебега в объемлющем пространстве, модель 1 может использоваться для описания материалов с пористостью, близкой к нулю, а модель 2 — для описания материалов с пористостью, близкой к единице.

Равенство нулю меры Лебега фрактала часто вызывает вопрос о том, как можно использовать такой математический образ для описания природных объектов — ведь все тела в природе имеют ненулевой объем! При этом забывают, что механика всегда имеет дело с моделями, которые в той или иной степени отражают действительность, но никогда с ней не совпадают. Несомненно, что природные объекты можно считать фрактальными только при определенных огрублениях и в определенном диапазоне масштабов.

Если применять модели 1—4 к реальным пористым материалам, необходимо уметь определять соответствующие фрактальные размерности. Существуют прямые и непрямые методы определения d_H. Прямые методы связаны с непосредственным экспериментальным изучением геометрического строения объекта. Непрямые методы связаны с исследованием процессов в данном объекте (диффузии, фильтрации, электропроводности и проч.), когда выводятся и решаются некоторые модельные уравнения с феноменологическими коэффициентами, полученные аналитические или численные решения сравниваются с экспериментальными данными и неизвестные параметры подбираются, исходя из наилучшего соответствия теории и эксперимента.

Широкие возможности прямого экспериментального определения d_H представляет анализ рассеяния разных видов излучения (см. обзоры в [9, 10]). В принципе возможно сканирование природных объектов электромагнитным излучением (в разных участках спектра), электронами и нейтронами.

В основе этого метода лежит простой факт, что при рассеянии волны с волновым вектором $\mathbf{k}$ и длиной L на фрактале S амплитуда рассеяния A волны не зависит от деталей строения фрактала на масштабах, много меньших L. Поэтому данная амплитуда рассеяния совпадает с амплитудой рассеяния на объекте $S(L)$, полученном из S сглаживанием на масштабах, меньших L

$$A(\mathbf{k},\ S) = A(\mathbf{k},\ S(L)) \tag{2.1}$$

Если вычислить дифференциальное сечение рассеяния в направлении $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$, то из-за соотношения (2.1) возникает характерная зависимость от частоты волны ω

$$\sigma \sim \text{const} + \text{const}\ \omega^{\beta}$$

где β зависит от d_H. Таким образом, измеряя сечение σ, можно найти d_H.

Другой метод прямого определения фрактальной размерности основан на явлении адсорбции. Если данная фрактальная поверхность (модель 3) адсорбирует молекулы разных веществ с разными характерными размерами l (например, углеводороды), что число молекул в адсорбированном мономолекулярном слое зависит от l степенным образом

$$N(l) \sim \text{const}\ l^{-d_H}$$

Наконец, возможно определение размерности по распределению пор или зерен породы [11]. Действительно, пусть фрактал — поровое пространство (модель 1) и пусть $p = p(l)$ — плотность распределения зерен породы на единицу объема по характерным размерам l. При этом мы предположим, что можно таким образом определить размер l, чтобы величина

$$M = \int_0^{+\infty} l^3 p\,(l)\,dl \tag{2.2}$$

была равна относительному объему, занимаемому породой. По предположению $M \approx 1$. Пусть при малых l удается выделить асимптотику

$$p\,(l) \sim p_0 l^{-\alpha} \tag{2.3}$$

Для сходимости интеграла (2.2) необходимо выполнение неравенства $\alpha<4$. Объем, приходящийся на поровое пространство, если покрыть его типовыми фигурами с размерами δ, таков: $V(\delta) = p_0\delta^{4-\alpha}/(4-\alpha)$. Отсюда находим $N(\delta) = p_0\delta^{1-\alpha}/(4-\alpha)$ и тогда по формуле (1.2) получаем $d_H = \alpha - 1$.

Реальное распределение зерен, строго говоря, не может иметь асимптотику (2.3) с $\alpha>1$. При достаточно малых l функция $p(l)$ становится равной нулю. Поэтому об асимптотике (2.3) и соответственно о фрактальной геометрии порового пространства можно говорить только в определенном диапазоне масштабов: $l_{\min} \ll l \ll l_{\max}$, где $l_{\min}$ — характерный размер наименьшего зерна, $l_{\max}$ — характерный размер наибольшего зерна.

О фрактальной геометрии порового пространства с наибольшим основанием можно говорить, когда поровое пространство по происхождению трещиноватого типа (модель 4), так как есть серьезные основания полагать, что процессы разрушения и трещинообразования приводят к фрактальным структурам [12].

Пусть теперь фрактал — скелет породы (модель 2). Тогда можно рассмотреть распределение пор по характерным размерам $p = p(l)$ и формально повторить предыдушие рассуждения. Конечный результат — опять формула $d_H = \alpha - 1$.

Итак, в принципе возможно прямое экспериментальное определение фрактальной размерности. Для задач фильтрации знания размерности оказывается недостаточно и нужно вводить дополнительные феноменологические параметры, характеризующие более тонкие свойства пористых материалов.

3. При изучении движения газов и жидкостей в пористых материалах с фрактальной геометрией можно ожидать особенно интересные результаты, когда фрактальной структурой обладает пространство, по которому движется флюид (модели 1, 4 или модель 3 в случае пленочной фильтрации). В этой области возможны два разных подхода.

Во-первых, можно исследовать движение флюидов во фрактальных сетях капилляров [13]. На этом пути получается ряд точных результатов для регулярных геометрических фракталов. Недостаток такого подхода состоит в том, что регулярные фрактальные сети капилляров весьма сильно отличаются от реальных поровых каналов.

Во-вторых, можно строить феноменологические модели, исходя из общей информации о фрактальной структуре порового пространства, на масштабах, значительно превышающих размеры детальных особенностей строения фрактала [14]. В этом случае теорию естественно строить на основе закона сохранения массы на фрактале

$$\frac{d}{dt}\int_V m\rho d\mu_H = -\int_\Sigma j_n d\mu_\Sigma \tag{3.1}$$

Здесь ρ — массовая плотность флюида, V — часть фрактала, ограниченная поверхностью Σ (на фрактале), n — нормаль к Σ, j_n — поток массы через Σ, $d\mu_H$ — мера Хаусдорфа, $d\mu_\Sigma$ — индуцированная мера на Σ, m — аналог пористости. Для того чтобы величина

$$\int_V m\rho d\mu_H$$

имела размерность массы с учетом того, что $[d\mu_H] = L^{d_H}$, $[\rho] = ML^{-3}$, необходимо, чтобы величина m имела размерность $[m] = L^\varepsilon$, $\varepsilon = D - d_H$ — дефект пространства. При $\varepsilon = 0$ величина m превращается в обычную пористость.

Как задать выражение для j, т. е. как обобщить закон Дарси для фрактала? Если пренебречь гравитацией, то представляется естественным постулировать

$$j_n = -\frac{k}{\mu}\rho D_n^{d_c} p \tag{3.2}$$

Здесь μ — сдвиговая вязкость, k — величина, аналогичная проницаемости, которая для обеспечения правильной размерности j_n должна иметь размерность. $[k] = L^{\varepsilon+d_c+1}$. При $d_c = 1$ формула (3.2) приводит к обычному по форме закону Дарси.

Рассмотрим цилиндрически-симметричное ($D = 2$) или сферически-симметричное ($D = 3$) течение флюида, когда все функции зависят от t и r, r — расстояние от центра симметрии. Строго говоря, фрактальные пористые среды не допускают непрерывной группы симметрий, однако можно ожидать существование симметричных в некотором осредненном смысле полей ρ и p на достаточно больших масштабах. Из уравнения (3.1) следует

$$\frac{d}{dt}\int_{r_0\le r\le r_1} m\rho d\mu_H = \int_{r=r_0} j_n d\mu_\Sigma - \int_{r=r_1} j_n d\mu_\Sigma$$

что с учетом (3.2) приводит к уравнению

$$m\frac{\partial\rho}{\partial t} = r^{-(d_H-1)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k}{\mu}r^{d_H-d_c}\rho\frac{\partial p}{\partial r}\right) \tag{3.3}$$

Для этого уравнения можно получить ряд аналитических решений, которые можно сравнивать с экспериментом. Так, при постоянном k для изотермического процесса ($p = p(\rho), \mu = \mu(\rho)$) из (3.3) можно найти стационарное решение, неявное относительно ρ

$$P = C_1 r^{1-d_H+d_c} + C_2, \quad P = P(\rho) = \int \frac{\rho dp}{\mu}$$

Можно стандартным образом найти автомодельные решения уравнения (3.3).

Обратимся теперь к модели трещиновато-пористой среды с фрактальной геометрией трещин [14]. В этом случае уравнение (3.1) нужно заменить системой

$$\frac{d}{dt}\int_V m_1 \rho_1 d\mu_H = -\int_\Sigma j_n d\mu_\Sigma + \int_V q d\mu_H$$

$$\frac{d}{dt}\int_V m_2 \rho_2 d\mu_H = -\int_V q d\mu_H \tag{3.4}$$

Здесь ρ_1 — плотность флюида в трещинах, ρ_2 — плотность флюида в матрице, m_1 — параметр с размерностью L^ε, характеризующий фрактальную систему трещин, m_2 — пористость матрицы, q — переток массы от пористых блоков к трещинам.

Рассмотрим симметрическое течение $\rho_i = \rho_i(t, r), i = 1, 2$. При переходе от интегральных уравнений (3.4) к дифференциальным необходимо задать выражение для q. Его естественно выбрать в виде

$$q = \frac{\beta}{\mu_1}(\rho_2 p_2 - \rho_1 p_1)\, r^\gamma$$

где β — феноменологический коэффициент, p_1 и p_2 — давление в трещинах и матрице соответственно, $\mu_1 = \mu(\rho_1)$ — сдвиговая вязкость, γ — некоторый безразмерный параметр, характеризующий детали строения фрактала. Тогда для постоянных параметров m_1, m_2 и k из (3.4) системы (3.4) получается система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{k}{m_1} r^{-(d_H-1)} \frac{\partial}{\partial r}\left(\mu_1^{-1} r^{d_H-d_c}\rho_1 \frac{\partial p_1}{\partial r}\right) + \frac{\beta}{\mu_1 m_1}(\rho_2 p_2 - \rho_1 p_1)\, r^\gamma$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \frac{\alpha_d \beta}{\alpha_D m_2 \mu_1}(\rho_1 p_1 - \rho_2 p_2)\, r^{-\varepsilon+\gamma}, \quad \alpha_d = 2\pi^{d/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{d}{2}\right) \tag{3.5}$$

При $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$, $d_c = 1$ модель (3.5) сводится к классической модели трещиновато-пористой среды [15, 16].

В работе [14] исследовался случай, когда $\gamma = -\varepsilon, d_c = 1$.

В ряде простых ситуаций система (3.5) допускает точные решения, по которым из эксперимента можно находить феноменологические параметры модели [14]. В частности, решение задачи о кривой восстановления давления для жидкости в модели с $\gamma = -\varepsilon$, $d_c = 1$ дает асимптотику

$$\Delta p \sim C_1 t^\tau - C_2 + C_3 t^{2\tau-1}, \tau = (2 - d_H)/(4 - d_H)$$

Поэтому нестационарные скважинные исследования могут позволить найти фрактальную размерность трещин призабойной зоны.

Уравнения (3.3), (3.5) позволяют решать содержательные задачи теории фильтрации с учетом фрактальной геометрии (модели 1 и 4). Возможны различные уточнения и модификации изложенной теории, поскольку развивается вся теория фракталов вообще. Нужно определенное время, чтобы осознать все выводы фрактальной концепции, сравнить их с экспериментом, определить значения феноменологических параметров. Несомненно, что деятельность в этом направлении представляет большой научный и практический интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mandelbrot B. B.* Les objets fractals: Forme, Hasard et Dimension. Paris: Flammarion, 1975. 192 p.
2 *Mandelbrot B. B.* Fractals: Form, Chance and Dimension. San Francisco: Freeman, 1977. 365 p.
3. *Mandelbrot B. B.* The fractal geometry of nature. N. Y.: Freeman, 1983. 468 p.
4. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.
5. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 594 с.
6. *Rogers С. А.* Hausdorff measures. Cambridge: Univ, Press, 1970. 179 p.
7. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Кн. 6. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967. 396 с.
8. *Динариев О. Ю., Мосолов А. Б.* О свойстве самоподобия для подмножеств R^n//Современный анализ и его приложения. Киев: Наук. думка, 1989. С. 44—48.
9. Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. 670 с.
10. *Смирнов Б. М.* Физика фрактальных кластеров. М.: Наука, 1991. 134 с.
11. *Мосолов А. Б., Динариев О. Ю.* Фракталы, скейлы и геометрия пористых материалов//Журн. техн. физики. 1988. Т. 58. Вып. 2. С. 233—238.
12. *Мосолов А. Б., Динариев О. Ю.* Автомодельность и фрактальная геометрия разрушения//Проблемы прочности. 1988. № 1. С. 3—7.
13. *Adler Р. М.* Transport processes in fractals//Intern. J. Multiphase Flow. 1985. V. 11. № 1. P. 91—108; № 2. P. 213—239, 241—254.
14. *Динариев О. Ю.* Фильтрация в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 5. С. 66—70.
15. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П.* Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах//Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 3. С. 545—548.
16. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах//ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 852—864.

Москва

Поступила в редакцию
21.I.1992