

УДК 532.594:013.4

© 1992 г. Ю. Я. ТРИФОНОВ

ДВУХПЕРИОДИЧЕСКИЕ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ
ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ
В СТЕКАЮЩЕЙ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ
ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ,
ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ

Рассматривается нелинейное эволюционное уравнение, часто встречающееся при моделировании поведения возмущений в различных неконсервативных средах, например в задачах по гидродинамике течения пленок жидкости. Для него численно найдены регулярные в пространстве как периодические, так и квазипериодические во времени волновые решения, отвечающие от стационарных и стационарно-бегущих волн. Проведен анализ устойчивости и бифуркаций для некоторых найденных решений.

В результате найдена цепочка бифуркаций для решений, устойчивых к возмущениям того же пространственного периода. Показано, что бифуркации связаны с потерями определенных симметрий исходного решения. Продемонстрировано, что с увеличением бифуркационного параметра в структуре решений выделяются участки «спокойного» поведения во времени и участки интенсивных «всплесков».

1. Постановка задачи. При малых расходах жидкости изучение длинноволновых возмущений на пленке жидкости, стекающей по наклонной плоскости, сводится к решению нелинейного эволюционного уравнения, описывающего изменение толщины пленки. В системе отсчета, движущейся с удвоенной скоростью свободной поверхности, это уравнение после некоторых преобразований приводится к виду [1, 2]

$$\frac{\partial H}{\partial t} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = 0 \quad (1.1)$$

В последнее время уравнение (1.1) привлекает к себе пристальное внимание многих исследователей (см., например, [4—10]), так как оно часто встречается при описании волновых процессов в неконсервативных средах и играет для них такую же большую роль, как широко известное уравнение KdV для консервативных.

Так, например, кроме случая свободно стекающей пленки, это уравнение было получено для описания волн при противоточном движении пленки и газа в [11], для возмущений на границе раздела двух вязких жидкостей в горизонтальном канале — в [12], для описания волн концентрации в химически активных средах — в [13], для моделирования искривления фронта пламени — в [14].

Ранее в работах [1—6] исследовались пространственно-периодические с периодом $L = 2\pi/\alpha$, α — волновое число, стационарные во времени решения $H_0(x)$ для уравнения (1.1) и более общие решения в виде стационарно-бегущих волн $H_0(\xi)$, $\xi = x - ct$, c — фазовая скорость. В результате показано, что в зависимости от значения параметра α существуют различные семейства таких решений, ветвящихся друг от друга, число которых быстро нарастает с уменьшением α . В работах [1—4] проведен анализ линейной устойчивости решений различных семейств относительно как пространственно-периодических возмущений с периодом L так и относительно более общих двояко-периодических в пространстве возмущений вида

$$h(x, t) \sim \varphi(\xi) \cdot \exp(-\gamma t + i\alpha Q\xi) \quad (1.2)$$

Здесь $\varphi(\xi)$ — периодическая функция с тем же периодом $L = 2\pi/\alpha$, что и исходное решение, Q — вещественный параметр, меняющийся от 0 до 0,5.

Выделенными, в смысле устойчивости, оказались два семейства волн (в дальнейшем 1-е и 2-е семейства). Первое семейство волн отвечает от тривиального решения $H = 0$ в точке $\alpha = 1$ и существует до значения $\alpha \approx 0,4979$, где оно замыкается само на себя с удвоенным пространственным периодом [1, 2]. Диапазон устойчивых волн этого семейства относительно возмущений того же периода ($Q = 0$ в (1.2)) $0,554 < \alpha \leq 1$ [3]. Для волн этого семейства существует также диапазон решений, устойчивых относительно возмущений вида (1.2) с различными $Q \neq 0$ [1], обозначенный на фиг. 1 штриховкой. Все решения этого семейства стационарны во времени.

Второе семейство волн отвечает от 1-го в точке $\alpha \approx 0,554$ [3] и его решения имеют фазовую скорость $c \neq 0$. Диапазон устойчивости по отношению к возмущениям того же периода $0,48 < \alpha < 0,554$ [4].

Все другие семейства волн неустойчивы относительно возмущений того же периода во всей области их существования по волновым числам [4].

В точке $\alpha \approx 0,48$ для волн 2-го семейства, а также на линии 1 фиг. 1 для волн 1-го семейства вещественная часть соответствующих собственных значений $\text{Re}(\gamma)$ в (1.2) обращается в 0, при этом $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ и происходит ветвление новых режимов с более сложным поведением во времени.

Исследование таких режимов — цель данной работы.

Пространственный период нового решения в точке бифуркации будет тем же самым в случае ветвления от 2-го семейства. В случае ветвления от волны 1-го семейства по линии 1 фиг. 1 при иррациональных значениях Q появляющиеся режимы, как следует из (1.2), будут иметь два несоизмеримых пространственных периода. Если $Q = p/r$ рациональное число, то образуется пространственно-периодический режим с новым волновым числом $\alpha_{\text{new}} = \alpha/r$.

В настоящей работе исследуются только пространственно-периодические волновые режимы.

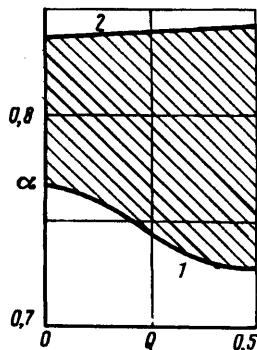
В работах [7—9, 15], численно исследуя эволюцию пространственно-периодических возмущений, изучались в зависимости от задаваемого периода L возможные аттракторы для решений уравнения (1.1). Было отмечено чередование (при изменении L) аттракторов, характеризующихся регулярным поведением во времени, с аттракторами более сложного (и даже хаотического) поведения во времени. При этом аттракторы с регулярным поведением во времени соответствовали стационарным волнам 1-го семейства удвоенного, утроенного и т. д. пространственного периодов. Точки появления L_n участков таких аттракторов, как следует из сравнения результатов работ [8] и [4], связаны с верхней границей зоны устойчивости $\alpha_c(Q)$ волн 1-го семейства (линия 2 фиг. 1) соотношением $L_n \leq 2\pi/(\alpha_c(Q) \cdot Q)$, $Q = 1/2, 1/3$, и т. д. Ответвляющиеся при различных Q от нижней границы зоны устойчивости (линия 1 на фиг. 1) новые режимы и решения, рождающиеся от них, должны быть связаны с соответствующими аттракторами работ [7—9, 15], характеризующимися более сложным поведением во времени.

Таким образом, цель данной работы — расчет решений уравнения (1.1) с более сложным, чем стационарное или стационарно-бегущее, поведением во времени и исследование их возможных бифуркаций для более детального изучения перехода к хаотическим во времени решениям уравнения (1.1).

2. Теория и метод решения. В настоящей работе численно исследуются пространственно-периодические решения уравнения (1.1), представимые в виде

$$H(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{nm} \exp(i\alpha n(x - ct) + iymt) \quad (2.1)$$

$$H(x + 2\pi/\alpha, t) = H(x, t)$$



Фиг. 1

Здесь c, γ — собственные числа задачи, которые заранее неизвестны.

В случае $c=0$ представление (2.1) дает периодический во времени режим, а в пространстве (x, t) — двухпериодический режим. При $c \neq 0$ мы имеем двухпериодический режим во времени, а в пространстве (x, t) — трехпериодический режим.

Оставляя в (2.1) первые $(N+1)(M+1)$ комплексные гармоники, подставим его в (1.1)

$$i\gamma m H_{nm} - i\alpha n c H_{nm} + (-\alpha^2 n^2 + \alpha^4 n^4) H_{nm} + 2i\alpha n (H^2)_{nm} = 0 \quad (2.2)$$

$$m = -\frac{M}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{M}{2}; \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2}$$

$$(H^2)_{nm} = \sum_{k=\max\{-N/2, N/2+n\}}^{\min\{N/2, N/2+n\}} \sum_{l=\max\{-M/2, -M/2+m\}}^{\min\{M/2, M/2+m\}} H_{kl} H_{n-k, m-l}$$

Из вещественности функции $H(x, t)$ следует $H_{-n-m} = \overline{H_{nm}}$, где черта означает комплексное сопряжение.

Из свойства симметрии уравнения (1.1) следует, что если $H(x-ct, t)$ — решение, то $H(x-(c+4a)t, t+a)$ ($a \equiv \text{const}$) — тоже решение. Поэтому в дальнейшем функция $H(x, t)$ нормируется таким

образом, чтобы $\langle H \rangle \equiv (\alpha/2\pi) \int_0^L H(x, t) dx = 0$, где $L = 2\pi/\alpha$ — период волны по координате x . Отсюда нетрудно получить, что $H_{0m} = 0$.

Таким образом, мы получаем систему $N(M+1)/2$ комплексных нелинейных алгебраических уравнений для определения $N(M+1)/2 + 2$ неизвестных $\gamma, c, H_{nm}, n=1, \dots, N/2, m=-M/2, \dots, 0, \dots, M/2$.

В силу инвариантности уравнений (1.1) относительно координатного и временного сдвигов $x \rightarrow x + \text{const}, t \rightarrow t + \text{const}$, начало отсчета можно выбрать так, чтобы, например,

$$\text{Re}(H_{11}) = 0, \quad \text{Re}(H_{10}) = 0$$

Таким образом, система (2.2) определена. При ее численном решении использовался итерационный метод Ньютона. При обрывании ряда (2.1) число гармоник бралось таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{1}{N \sup |H_{nm}|} \sqrt{\sum_{n=1}^{N/2} (|H_{n, M/2}|^2 + |H_{n, -M/2}|^2)} \leq 10^{-3},$$

$$\frac{1}{(M+1) \sup |H_{nm}|} \sqrt{\sum_{m=-M/2}^{M/2} |H_{N/2, m}|^2} \leq 10^{-3}$$

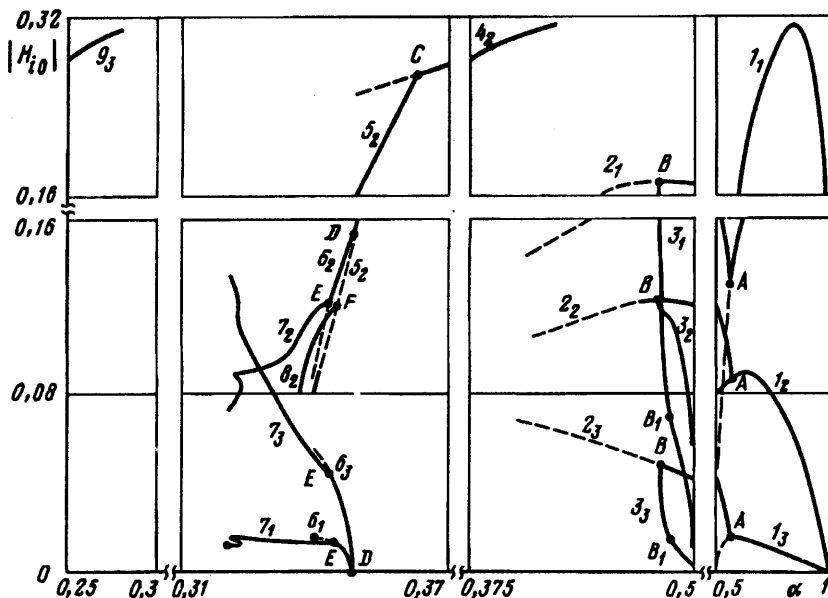
Для этого в расчетах число N менялось от 14 до 20, а число M — от 4 до 40.

3. Осциллирующие во времени пространственно-периодические режимы, возникающие от стационарных и стационарно-бегущих волн. В работе [1] показано, что первое семейство периодических стационарных во времени решений $H_0(x)$ уравнения (1.1), отвечающее от тривиального решения $H=0$ при $\alpha=1$, может быть продолжено по непрерывности в сторону меньших волновых чисел до значения $\alpha' \approx 0,4979$. В этой точке каждая нечетная гармоника ряда

$$H_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \exp(i\alpha n x)$$

становится равной нулю. В результате получается решение с волновым числом $\alpha = 2\alpha' = 0,9958$. Причем оказывается, что это то же самое решение, которое было получено для такого значения α ранее, и данное семейство замыкается само на себя.

На фиг. 2 для волн 1-го семейства линии 1_1-1_3 представляют зависимости



Фиг. 2

величин фурье-гармоник H_1 , H_2 , H_3 соответственно от значений волнового числа α .

При соответствующем выборе начала отсчета координаты x все решения этого семейства обладают свойством симметрии

$$H_0(x) = -H_0(-x)$$

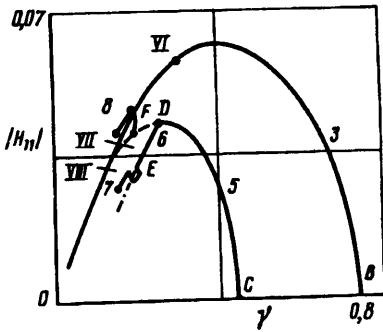
Кроме того, ввиду стационарности во времени решения 1-го семейства симметричны относительно преобразования $t \rightarrow t + \text{const}$. Тривиальное решение $H = 0$ обладает тремя свойствами симметрии ($x \rightarrow -x$, $x \rightarrow x + \text{const}$, $t \rightarrow t + \text{const}$) и, как легко видеть, при рождении нового семейства происходит разрушение одного из них.

Проведенное в работе [3] исследование устойчивости волн 1-го семейства показало, что при $\alpha \approx 0,554$ (точка A на фиг. 2) волны этого семейства теряют устойчивость к пространственно-периодическим возмущениям вида (1.2) с тем же, что и сама волна, пространственным периодом. В этой точке одно из собственных значений γ для возмущений (1.2) с $Q = 0$ проходит через нуль и от первого семейства бифурцирует второе семейство решений $H_0(\xi)$, $\xi = x - ct$, для которых фазовая скорость $c \neq 0$. Соответствующие зависимости для величин фурье-гармоник $|H_1|$, $|H_2|$, $|H_3|$ ряда

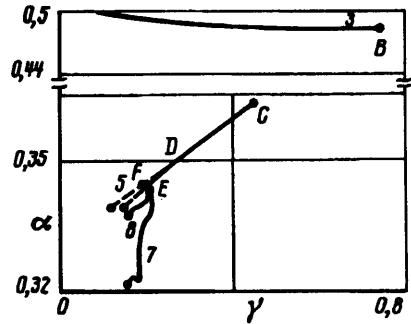
$$H_0(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \exp(i\alpha n \xi)$$

приведены на фиг. 2 как линии 2_1 — 2_3 соответственно. Для волн этого семейства остается только одно свойство симметрии $H_0(\xi) = H_0(x + c \cdot \text{const}, t + \text{const})$. Свойство антисимметричности, которое имело место для волн 1-го семейства, при бифуркации разрушается.

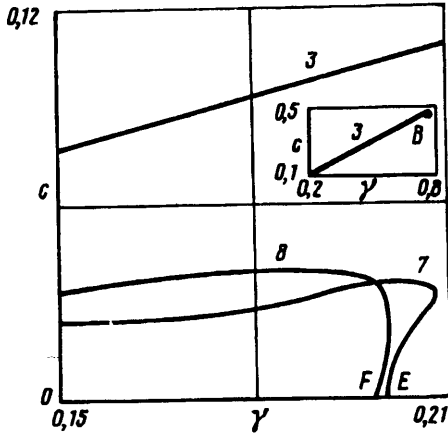
При значении $\alpha \approx 0,48$ (точка B на фиг. 2) для волн этого семейства происходит потеря устойчивости к пространственно-периодическим возмущениям того же периода. В этой точке вещественная часть $\text{Re}(\gamma)$ одного из собственных значений для возмущений (1.2) с $Q = 0$ проходит через нуль, при этом $\text{Im}(\gamma) \neq 0$ и от второго семейства бифурцируют новые решения, характеризующиеся квазипериодическими осцилляциями во времени. Для нахождения таких решений на-



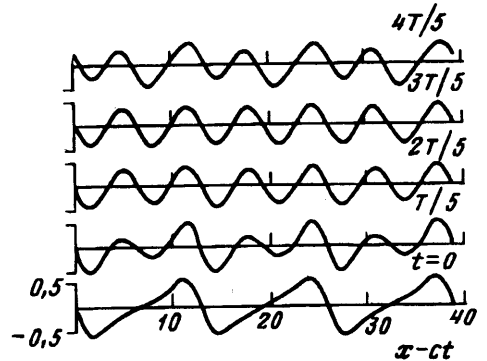
Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4



Фиг. 6

чальное приближение при решении системы уравнений (2.2) методом Ньютона конструировалось с использованием собственного вектора, проходящего через нуль собственного значения. В качестве параметра в окрестности точки бифуркации использовалась амплитуда пространственно-временной гармоники H_{11} в разложении (2.1), а значения α , γ , c и остальных гармоник H_{nm} в (2.1) рассчитывались. Результаты расчета волн этого типа представлены на фиг. 2—5 линиями 3. Здесь $|H_{10}|$, $|H_{20}|$, $|H_{30}|$ и $|H_{11}|$ амплитуды соответствующих гармоник в разложении (2.1). На фиг. 6 показан характерный пространственно-временной профиль решения при некотором удалении от места бифуркации (номер рисунка соответствует римской цифре на линии 3 фиг. 3). Здесь приведены три периода волны $L = 2\pi/\alpha$ по оси ξ , и период волны во времени $T = 2\pi/\gamma$ разбит на пять промежутков.

Как видно из фиг. 2, ветвление новых решений от волн 2-го семейства происходит в область линейной устойчивости порождающего решения и существуют они в достаточно узком диапазоне по волновому числу $0,48 < \alpha < 0,5$. При удалении от точки бифуркации период волны $T = 2\pi/\gamma$ увеличивается, как это следует из фиг. 3, 5, а фазовая скорость c быстро уменьшается (фиг. 4). В пространственно-временном профиле для $\gamma \leq 0,4$ можно выделить участки квазистационарного поведения во времени и участки интенсивных изменений или всплесков (см. фиг. 6). С уменьшением γ доля участков интенсивного изменения во временном периоде уменьшается, что приводит к увеличению числа гармоник при численном расчете, чтобы удовлетворить условию обрывания фурье-ряда. Так, например, для $\gamma = 0,3$ (фиг. 6) долю квазистационарного участка можно оценить как $\approx T/2$, для $\gamma = 0,15$ это уже $\approx 7T/10$, а для $\gamma = 0,05$ эта доля была больше чем $9T/10$. Расчет волн с $\gamma \leq 0,03$ был ограничен вычислительными воз-

можностями. Отметим, что профили решений на участках квазистационарного поведения во времени соответствуют волнам 1-го семейства с удвоенным волновым числом.

Таким образом, с уменьшением параметра α представленные выше расчеты демонстрируют существование цепочки бифуркаций, связанной с потерей определенных симметрий исходного решения $H=0$: тривиальное решение [три симметрии: $t \rightarrow t + \text{const}$, $x \rightarrow -x$, $x \rightarrow x + \text{const}$] \rightarrow волны 1-го семейства [две симметрии: $t \rightarrow t + \text{const}$, $x \rightarrow -x$] \rightarrow волны 2-го семейства [одна симметрия: $t \rightarrow t + \text{const}$, $x \rightarrow x + c \cdot \text{const}$] \rightarrow решения, осциллирующие во времени квазипериодически.

В конечном счете появляются решения, не обладающие ни одной из предыдущих симметрий. В дальнейшем, по всей видимости, эти решения также будут претерпевать бифуркации. О них, в частности, свидетельствует наличие экстремумов и точек перегиба в зависимостях на фиг. 2—5. Для появления решений, не представимых в виде (2.1), требуется, по всей видимости, наличие симметрии в пространстве (x, t) у исходного решения, как это было при бифуркациях от волн 1-го и 2-го семейств. Так как исходное решение не обладает ни одним из свойств симметрии, то возможными дальнейшими бифуркациями являются, например, бифуркации удвоения, утроения и т. д. временного периода. Численный расчет показал существование бифуркации удвоения периода для волн этого типа в точке B_1 на фиг. 2. Другие возможные бифуркации не исследовались ввиду ограниченных вычислительных возможностей.

Из результатов нестационарного счета [15] следует, что в области $\alpha < 0,48$ наблюдаются долгопериодические временные колебания, затем при $\alpha < 0,435$ притягивающим аттрактором становятся решения 1-го семейства удвоенного пространственного периода. По результатам работы [8] такая смена аттракторов происходит при $\alpha \approx 0,422$. Во втором случае, это в точности соответствует верхней границе зоны устойчивости волн 1-го семейства (линия 2 фиг. 1) относительно возмущений вида (1.2) с $Q = 1/2$.

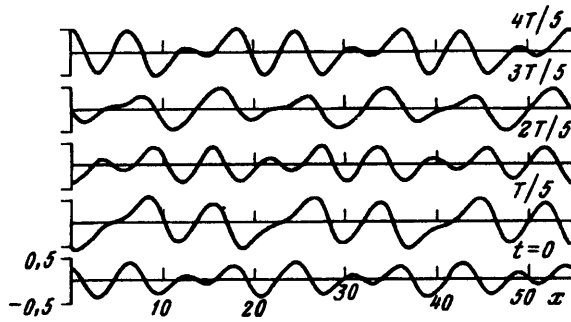
На фиг. 2 линии 4_2 соответствуют зависимостям амплитуды гармоники H_2 для волн 1-го семейства удвоенного периода. Она в точности соответствует зависимости гармоники H_1 на линии 1_1 фиг. 2. В точке C , где значение $\alpha \approx 0,363$, эти решения теряют устойчивость к возмущениям того же периода, что соответствует потере устойчивости волн 1-го семейства относительно возмущений (1.2) с $Q = 1/2$ на линии 1 фиг. 1. Вещественная часть $\text{Re}(\gamma)$ одного из собственных значений проходит через нуль, при этом $\text{Im}(\gamma) \neq 0$, и происходит рождение режима с периодическими осцилляциями во времени. Новые решения, как показали расчеты, представляются в виде (2.1) с фазовой скоростью $c = 0$, и для них аналогично волнам 1-го семейства существуют два свойства симметрии

$$H(x + L/2, t + T/2) = H(x, t), \quad H(-x, t + T/2) = -H(x, t)$$

Здесь $L = 2\pi/\alpha$, $T = 2\pi/\gamma$ — периоды волны по осям x и t , соответственно.

Бифуркация от волны 1-го семейства происходит с удвоением пространственного периода, поэтому не происходит разрушения свойств симметрии. Результаты расчета представлены на фиг. 2—5 линиями 5. Здесь обозначения аналогичны случаю ветвления от волн 2-го семейства режимов, осциллирующих во времени квазипериодически. На фиг. 7 показан характерный пространственно-временной профили решения при некотором удалении от места бифуркации (номер рисунка соответствует римской цифре на линии 5 фиг. 3). Здесь приведены три периода волны по оси x и период волны T разбит на пять промежутков.

Для волн этого типа ввиду симметрий гармоники $H_{10} = H_{30} = 0$, что отражено на фиг. 2. Из фиг. 2 следует также, что в этом случае ветвление новых решений происходит в область линейной неустойчивости порождающего решения. При удалении от точки бифуркации период волны $T = 2\pi/\gamma$ увеличивается, как это следует из фиг. 3, 5. В пространственно-временном профиле, как показал анализ, выделяются временные участки малоамплитудных пространственных осцилляций и доля таких участков во временном периоде увеличивается с уменьшением γ .



Фиг. 7

Численный счет проводился до значения $\gamma \approx 0,1$, так как ранее, как это будет продемонстрировано далее, решения этого типа испытывают бифуркации и становятся неустойчивыми к пространственно-периодическим возмущениям того же периода.

4. Метод исследования устойчивости пространственно-периодических осциллирующих во времени режимов. Пусть мы нашли решение $H_0(x, t)$, такое, что

$$H_0(x + 2\pi\alpha, t + 2\pi\beta) = H_0(x, t + 2\pi\beta) = H_0(x, t)$$

В дальнейшем его будем называть устойчивым, если наложенные на него в начальный момент времени пространственно-периодические возмущения с бесконечно малой амплитудой и тем же пространственным периодом $2\pi\alpha$ затухают во времени.

Подставляя в уравнение (1.1) $H(x, t) = H_0(x, t) + h(x, t)$ и линеаризуя его, получим

$$\frac{\partial h}{\partial t} + 4 \frac{\partial (H_0 h)}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = 0 \quad (4.1)$$

Представляя $h(x, t)$ в виде

$$h(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n(t) \exp(i n \alpha x)$$

после подстановки в (4.1) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами

$$\frac{dh_n}{dt} = (\alpha^2 n^2 - \alpha^4 n^4) h_n(t) - 4i \alpha n \sum_{k=n-N/2}^{N/2} H_{0k}(t) h_{n-k}(t) \quad (4.2)$$

$$h_{-n}(t) = \overline{h_n(t)}, \quad n = 1, 2, \dots, N/2$$

По теореме Флоке все решения системы (4.2) имеют вид

$$h_n^{(0)}(t) = h_n^{(0)}(t) \exp(\lambda^{(0)} t) \quad (4.3)$$

Здесь $h_n^{(0)}(t)$ — вектор-столбец периодических функций с тем же периодом $T = 2\pi\beta$, что и решение $H_0(x, t)$.

Для нахождения коэффициентов Флоке, численно решая систему (4.2), приведенную к вещественному виду, составлялась матрица преобразования A для N единичных начальных данных за период T и рассчитывались ее собственные значения, равные, как нетрудно видеть, $\exp(\lambda^{(0)} T)$. Волновой режим $H_0(x, t)$ устойчив, если для всех $\lambda^{(0)}$ $\text{Re}(\lambda^{(0)}) \leq 0$.

Система уравнений (4.2) жесткая, для ее численного решения использовался метод работы [16], являющийся по существу методом Адамса — Бэшфорта. Система (4.2) и начальные данные могут быть записаны в виде интегрального уравнения

$$h_n(t) = h_n(0) \exp[(\alpha^2 n^2 - \alpha^4 n^4) t] - 4i \alpha n \exp[(\alpha^2 n^2 - \alpha^4 n^4) t] \cdot \int_0^t \sum_k h_k(\tau) H_{0n-k}(\tau) \exp[-(\alpha^2 n^2 - \alpha^4 n^4) \tau] d\tau$$

Аппроксимируя $h_k(t)$ полиномом второй степени по значениям на $t^{(l-1)}$ и $t^{(l)}$ шагах и используя следствие представления (2.1)

$$H_{0k}(t) = \sum_{m=-M/2}^{M/2} H_{0km} \exp(iymt)$$

можно получить явный вид $h_n(t^{(l+1)})$ через значения на предыдущих шагах $h_n(t^{(l-1)})$, $h_n(t^{(l)})$ и через известные гармоники H_{0nm} .

Здесь следует отметить, что всегда существуют два нулевых собственных значения $\lambda^{(l)}$, связанные с периодичностью исходного режима $H_0(x, t)$ по координатам x и t , что служило удобным критерием при выборе шага интегрирования.

Как показали расчеты, удовлетворительная точность при численном решении (4.2) достигается при шаге по времени $\Delta t \approx T/400$.

При исследовании устойчивости пространственно-периодических режимов, осциллирующих во времени квазипериодически, возникают дополнительные трудности. В данном случае вместо системы (4.2) мы имеем

$$\frac{dh_n}{dt} = (\alpha^2 n^2 - \alpha^4 n^4) h_n(t) - 4ian \sum_{k=n-N/2}^{N/2} H_{0k}(t) h_{n-k}(t) \exp[-iakct] \quad (4.4)$$

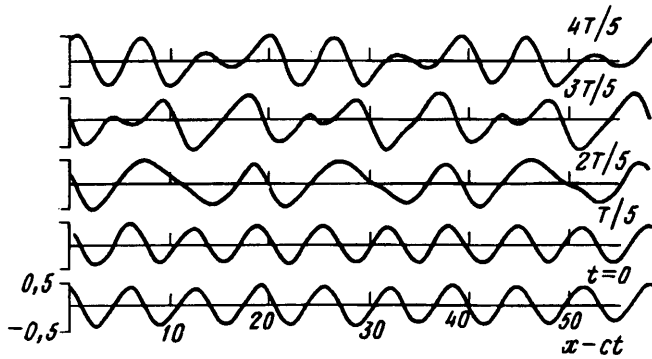
Теперь коэффициенты в (4.4) являются квазипериодическими функциями во времени, и требуются специальные методы (см., например, [17]) для вычисления соответствующих инкрементов нарастания или затухания начальных возмущений.

В данной работе устойчивость режимов, осциллирующих во времени квазипериодически, ввиду ограниченных вычислительных возможностей не исследовалась.

5. Результаты по исследованию устойчивости пространственно-периодических осциллирующих во времени режимов и их бифуркаций. Результаты по исследованию устойчивости некоторых рассчитанных решений приведены на фиг. 2, 3, 5. В областях параметров, где тот или иной режим неустойчив к пространственно-периодическим возмущениям того же периода $L = 2\pi/a$, что и пространственный период самого решения, соответствующие зависимости проведены пунктирной линией. Это не относится к зависимостям для волн с квазипериодической осцилляцией во времени (линии 3, 7, 8), так как для них устойчивость не исследовалась.

В точках смены устойчивости возможны появления новых решений. Так, из фиг. 2 ясно, что волновой режим с периодической осцилляцией во времени, ответвляющейся от стационарной волны 1-го семейства с удвоенным пространственным периодом, испытывает бифуркацию в точке D на фиг. 2—5. Здесь одно из вещественных собственных значений λ в (4.3) обращается в нуль, и происходит ветвление нового решения. Расчеты показали, что появившееся решение обладает только одним свойством симметрии — $H(x + L/2, t) = -H(-x, t)$, и соответствующие зависимости для него приведены на фиг. 2—5 как линии 6. В представлении (2.1) фазовая скорость таких решений $c = 0$. В этом случае ветвление происходит в область линейной неустойчивости исходного решения, как следует из фиг. 2, и временной период волны $T = 2\pi/\gamma$ увеличивается с удалением от точки бифуркации. Качественное поведение пространственно-временного профиля решений, как показали расчеты, аналогично случаю ветвления от стационарной волны 1-го семейства с тем отличием, что в этом случае на временном периоде волны при достаточном удалении от места бифуркации наблюдается только один участок малоамплитудных пространственных осцилляций.

В точке E на фиг. 2—5 решение, появившееся в точке D , в свою очередь испытывает бифуркацию и теряет устойчивость. Здесь также одно вещественное собственное значение переходит через нуль, и появляющийся новый режим, как показали расчеты, представляется в виде (2.1) с фазовой скоростью $c \neq 0$. Для него не существует уже никаких свойств симметрии. Соответствующие зависимости приведены на фиг. 2—5 как линии 7. На фиг. 8 приведен характерный пространственно-временной профиль решения при некотором удалении от места



Фиг. 8

бифуркации (номер рисунка соответствует римской цифре на линии 7 фиг. 3). Здесь приведены три периода волны по оси ξ и период волны во времени $T = 2\pi/\gamma$ разбит на пять промежутков. Сопоставления показали, что в этом случае (аналогично ветвлению решений с $c \neq 0$ от стационарно бегущих волн 2-го семейства) на участках временного периода с квазистационарным поведением во времени и достаточно далеких от места бифуркации пространственный профиль решения соответствует стационарной волне 1-го семейства, но уже утроенного периода.

Интересно отметить существование решения, представимого в виде (2.1), с фазовой скоростью $c \neq 0$, но обладающего свойством симметрии $H(\xi + L/2, t + T/2) = H(\xi, t)$. Оно ответвляется в точке F на фиг. 2—5 от неустойчивого решения, осциллирующего во времени периодически. Соответствующие зависимости для него обозначены на фиг. 2—5 как линии 8. Для этого решения ввиду симметрии значения $H_{10} = H_{30} = 0$, что отражено на фиг. 2. При удалении от точки бифуркации, как показали расчеты, в пространственно-временном профиле решения существует тенденция к формированию временного участка малоамплитудных пространственных осцилляций.

Таким образом, можно сделать вывод, что при продвижении по параметру α устойчивые к возмущениям того же периода периодически осциллирующие во времени решения испытывают следующий ряд бифуркаций: тривиальное решение [три симметрии: $t \rightarrow t + \text{const}$, $x \rightarrow -x$, $x \rightarrow x + \text{const}$] \rightarrow волны 1-го семейства [две симметрии: $t \rightarrow t + \text{const}$, $x \rightarrow -x$] \rightarrow периодически осциллирующие во времени решения [две симметрии: $t \rightarrow t + T/2$, $x \rightarrow x + L/2$, $t \rightarrow t$, $x \rightarrow -x + L/2$] \rightarrow периодически осциллирующие во времени решения [одна симметрия: $t \rightarrow t$, $x \rightarrow -x + L/2$] \rightarrow решения, осциллирующие во времени квазипериодически.

В результате рождаются решения, представимые в виде (2.1) с фазовой скоростью $c \neq 0$ и не обладающие ни одним из свойств симметрии исходных решений. Дальнейшими возможными бифуркациями по аналогии с рассмотренным в п. 3 случае являются, например, бифуркации удвоения, утроения и т. д. временного периода.

Из сопоставления с результатами нестационарного счета [8, 15] следует, что в области параметра $\alpha < 0,31$ существует аттрактор с хаотическими свойствами, который, возможно, связан с рассчитанными нами решениями цепочкой бифуркаций кратного увеличения временного периода.

В области $\alpha < 0,27$ единственным притягивающим аттрактором становятся решения 1-го семейства стационарных волн утроенного периода [8, 9]. К возмущениям того же пространственного периода такие решения становятся устойчивыми в области $\alpha < 0,28$, и зависимость первой ненулевой гармоники от волнового числа приведена на фиг. 2 линией 9. Точка $\alpha \approx 0,28$ соответствует верхней границе зоны устойчивости (линия 2 на фиг. 1) волн первого семейства относительно возмущений (1.2) с $Q = 1/3$. При $\alpha < 0,245$ решение 1-го семейства

утроенного периода теряет устойчивость к возмущениям того же периода (линия 1 на фиг. 1 при $Q = 1/3$), и здесь снова появляются решения, осциллирующие во времени периодически. Далее, по всей видимости, должна существовать цепочка бифуркаций, связанная с потерей симметрий исходного решения, и должны появляться решения, представимые в виде (2.1) с $c \neq 0$, дальнейшие бифуркации которых будут приводить к аттрактору с хаотическими свойствами.

6. Заключение. Результаты численного расчета периодических в пространстве с различным поведением во времени (стационарным, стационарно-бегущим, осциллирующим периодически, осциллирующим квазипериодически) волновых режимов и анализ их устойчивости позволяет сделать вывод, что при движении по параметру α устойчивые к возмущениям того же периода решения испытывают ряд бифуркаций. Показано, что бифуркации связаны с потерями симметрий исходного решения. В результате рождаются решения, представимые в виде (2.1) с фазовой скоростью $c \neq 0$ и не обладающие ни одним из свойств симметрии порождающего решения. Продемонстрировано, что одной из возможных дальнейших бифуркаций является кратное увеличение временного периода.

Анализ пространственно-временных профилей найденных решений позволяет заключить, что при удалении от точки бифуркации во временном периоде формируются участки квазистационарного поведения во времени и участки интенсивных изменений или всплесков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Непомнящий А. А.* Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 28—34.
2. *Шкадов В. Я.* Вопросы нелинейной гидродинамической устойчивости слоев вязкой жидкости, капиллярных струй и внутренних течений: Автореф. дис... Физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1973. 20 с.
3. *Непомнящий А. А.* Устойчивость волновых движений в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости // Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, 1977. С. 181—190.
4. *Tsvlodub O. Yu., Trifonov Yu. Ya.* On steady-state travelling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // Physica D. 1989. V. 39. № 2—3. P. 336—351.
5. *Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю.* О множестве стационарно бегущих волн на пленке жидкости, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 6. С. 120—125.
6. *Бунов А. В., Демехин Е. А., Шкадов В. Я.* О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое // ПММ. 1984. Т. 48. № 4. С. 691—696.
7. *Демехин Е. А., Шкадов В. Я.* О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 151—154.
8. *Hyman J. M., Nicolaenko B.* The Kuramoto-Sivashinsky equation: A bridge between PDE's and dynamical systems // Physica D. 1986. V. 18. № 1—3. P. 113—126.
9. *Hyman J. M., Nicolaenko B.* Order and complexity in the Kuramoto-Sivashinsky model of weekly turbulent interfaces // Physica D. 1986. V. 23. № 1—3. P. 265—292.
10. *Демехин Е. А., Шкадов В. Я.* О солитонах в диссипативных средах // Гидродинамика и тепло-массообмен течений жидкости со свободными поверхностями. Новосибирск, 1985. С. 32—48.
11. *Hooper A. P., Grimshaw R.* Nonlinear instability at the interface between two viscous fluids // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 1. P. 37—45.
12. *Chang H.-C., Chen L.-H.* Nonlinear waves on liquid film surfaces. 1. Flooding in a vertical tube // Chem. Eng. Sci. 1986. V. 41. № 10. P. 2463—2476.
13. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* Persisten propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Progr. Theor. Phys. 1976. V. 55. № 2. P. 356—369.
14. *Sivashinsky G. I.* Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. 1. Derivation of basic equations // Acta Astronautica. 1977. V. 4. № 11—12. P. 1177—1206.
15. *Непомнящий А. А.* О нестационарных волновых движениях в пленке жидкости, стекающей по наклонной плоскости // Процессы тепло- и массопереноса вязкой жидкости. Свердловск, 1986. С. 25—31.
16. *Zaleski S.* A stochastic model for the large scale dynamics of some fluctuating interfaces // Physica D. 1989. V. 34. № 3. P. 427—438.
17. *Kass-Petersen Chr.* Computation of quasi-periodic solutions of forced dissipative systems // J. Comput. Phys. 1986. V. 64. № 2. P. 433—442.