МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1992

УДК 532.546 : 532.135

 А. В. КАРАКИН, В. Э. ШКЛОВЕР

ОБ ОСРЕДНЕНИИ ПРОЦЕССОВ В ЗЕРНИСТОЙ СРЕДЕ С НЕНЬЮТОНОВСКИМИ ПРОСЛОЙКАМИ

Рассматривается задача об осреднении процессов в трехкомпонентных средах, состоящих из жестких зерен, неньютоновского вязкодеформируемого вещества, заполняющего зазоры между зернами, и невязкой жидкости или газа в порах. В случае, когда последняя компонента отсутствует и вязкодеформируемое вещество целиком заполняет зазоры, рассматриваемая среда является двухкомпонентной. Расстояние между соседними зернами (их ближайшими точками) предполагается малым по сравнению с размерами зерен.

В работах [1—3] дан вывод осредненных уравнений зернистой среды (на примере кубической периодической решетки с плоскими гранями контакта [1, 2], а также в случае зерен шарообразной формы [3] с ньютоновскими вязкими или линейно-упругими деформируемыми прослойками). Необходимость исследования среды с неньютоновскими прослойками диктуется тем, что нелинейная зависимость касательных напряжений от скоростей деформаций характерна для многих реальных материалов — геологических (нефть, глины, песчаники, известняки), композиционных, плазмы крови, насыщенной красными тельцами, и др.

Наиболее близки к рассматриваемым средам суспензии. В настоящее время проведено исследование ряда типов суспензий с ньютоновской вязкой жидкой фазой [4]. Рассмотрение систем с неньютоновской жидкой фазой встречает серьезные трудности благодаря прежде всего нелинейности уравнений динамики жидкости. Для систем с достаточно плотной упаковкой, когда расстояние между соседними зернами (их ближайшими точками) мало по сравнению с размерами этих зерен, возможен асимптотический анализ посредством приближения «смазки» в тонком слое между поверхностями соседних зерен. В [5] проводится численное решение уравнений смазки в подобном слое, который терпит алгоритмически вычисляемый разрыв и заключен между двумя жесткими поверхностями.

В представленной ниже задаче рассматриваются зерна как с плоскими гранями (будем называть зернами I типа), где соседние грани параллельны, так и шарообразной формы (зерна II типа).

Для зерен I типа приближение смазки имеет место во всем вязком слое, заключенном между соседними гранями (поверхность зерна может состоять не только из плоских граней, если оно не имеет формы правильного куба [2]; в этом случае объем пустот будет сравним с объемом зерен). Пустоты за пределами этого слоя заполнены невязкой поровой жидкостью или газом, граничащими с ним по периметру граней, или, для двухкомпонентной среды (для зерен I типа двухкомпонентную среду мы рассматриваем только для случая, когда объемы пустот и зерен сравнимы), той же неньютоновской жидкостью. При этом в качестве малого параметра ε_0 принимается отношение толщины зазора между соседними гранями $2H_0$ к линейному размеру зерен по оси симметрии $a = 2R$ (как и в [1—3], предполагается периодичность с кубической симметрией).

В случае трехкомпонентной среды с зернами II типа последние окружены тонким смазочным вязким слоем, причем слои соседних зерен сливаются там, где расстояние между точками поверхностей достаточно мало, а поровая жидкость или газ будут заполнять пустоты между зернами. Среда с зернами II типа может быть и двухкомпонентной, если пустоты полностью заняты вязкодеформируемым веществом. Как для трехкомпонентной, так и для двухкомпонентной среды приближение смазки здесь справедливо лишь в относительно небольшой «смазочной области» — там, где соответствующий слой будет тонким. В этом случае подобно [3] целесообразно использовать метод сращиваемых асимптотических разложений [6]. Малым параметром ε_0 аналогично предыдущему случаю будет отношение минимального расстояния между точками двух соседних зерен $2H_0$ к их диаметру $2R$, кроме того, вводится другой малый параметр $\varepsilon^* = H^*/R$, где $2H^*$ — характерное расстояние между точками соседних поверхностей, в пределах которого применимо приближение смазки.

Основные уравнения выводятся в общем виде для произвольного и затем более детально анализируются для широко распространенного и часто принимаемого для аппроксимации степенного реологического закона. Макросоотношения выводятся (аналитически или в квадратурах) для типичных случаев деформаций — сдвига и растяжения (сжатия). В силу нелинейности задачи рассмотрение произвольной деформации нельзя свести к указанным двум путем суперпозиции. Поэтому соответствующее полное решение получено для специального конкретного типа микроструктуры. Решения в указанных частных случаях дают оценку порядков искомых макровеличин в общем случае и позволяют сделать некоторые выводы относительно пластических деформаций и разрушения жесткого скелета.

1. Постановка задачи. Пусть среда образована правильной кубической решеткой, каждая микроячейка которой содержит жесткое зерно с линейным размером $a = 2R$. Для зерна I типа $2R$ — это расстояние между его параллельными гранями; линейный размер последних (длину стороны для квадрата или диаметр для круга) обозначим через $2R_0$, а через β — отношение R_0/R. Для зерна II типа $2R$ — диаметр шара. B, C, D будут области зерен, неньютоновских прослоек и порового пространства (если последнее присутствует) соответственно, ячейка A_m нумеруется трехмерным целочисленным вектором $\mathbf{m}$, при этом B_m, C_m, D_m — части B, C, D, приходящиеся на ячейку A_m. Область D является связной, для области прослоек C связность зависит от структуры микроячейки: в случаях плоских граней в C_m имеются три несвязанные между собой подобласти C_m^k $(k = 1,\ 2,\ 3)$ по направлениям декартовых координат x_k; для шарообразных зерен область C связна. Деформации рассматриваемой среды предполагаются малыми и сохраняющими ее кубическую симметрию, т. е. не приводящими к относительным поворотам ячеек: $\omega_j\,(\mathbf{n}) = 0$ (ω_j, $j = 1,\ 2,\ 3$,— компоненты вектора угловой скорости жестких зерен). В области C имеют место уравнения вязкой несжимаемой жидкости (в стоксовом приближении)

$$\sigma^c_{ij,j} = 0, \quad \sigma^c_{ij} = \tau^c_{ij} - P^c, \quad \delta_{ij}\operatorname{div}\mathbf{v}^c = 0, \quad i, j = x_1, x_2, x_3. \tag{1.1}$$

Верхним индексом b, c, d обозначается величина соответственно в областях B, C, D. Здесь σ_{ij}, τ_{ij} — тензоры полных и девиаторных напряжений, v_i — вектор скорости, P — давление.

Уравнения (1.1) должны быть замкнуты посредством системы соотношений, связывающей тензоры девиаторных напряжений τ_{ij} и скоростей деформаций $\dot{e}_{ij} = {}^1/_2\cdot(v_{ij} + v_{ji})$, которая выражает реологические свойства конкретного вещества, из которого состоят межзеренные прослойки. Рассматривая простейший случай плоского сдвигового течения, наиболее общую форму реологического закона можно представить в виде

$$\tau = F(\dot{e}) \tag{1.2}$$

$$\tau = \tau_{ij}, \quad v_i = \mathrm{const}\, x_j, \quad v_j = 0, \quad v_k = 0$$

$$\dot{e} = v_{i,j} = 2\dot{e}_{ij}, \quad i, j, k = \Omega\,(1, 2, 3)$$

Здесь $F(\dot{e})$ — некоторая функция (возрастающая, нечетная, достаточно гладкая);

$$\lim_{\dot{e}\to 0} F(\dot{e}) = 0, \quad \lim_{\dot{e}\to 0} F(\dot{e}) = 0$$

$\Omega\,(1,\ 2,\ 3)$ — оператор циклической перестановки чисел 1, 2, 3.

Соотношение (1.2) можно переписать как

$$\tau_{ij} = 2\eta\dot{e}_{ij} \tag{1.3}$$

$$\eta = F(\dot{e}) / \dot{e} \tag{1.4}$$

где η — «кажущаяся», переменная вязкость.

Для произвольного течения, когда вязкодеформируемое вещество области C изотропно по своим свойствам, обобщением формулы (1.2) должно быть соотношение, связывающее инварианты тензоров τ_{ij} и $\dot{e}_{ij}$. Так как первые (линейные) инварианты τ_{ii} и $\dot{e}_{ii}$ тождественно равны нулю, в этом соотношении должны участвовать вторые и третьи инварианты τ_{ij} и $\dot{e}_{ij}$. В дальнейшем мы будем следовать модели обобщенной ньютоновской жидкости [7], в которой, в частности, предполагается, что зависимость имеет место только между вторыми инвариантами. При этом соотношения (1.2) — (1.4) сохраняют свою силу, а под τ и $\dot{e}$ имеются в виду соответствующие инварианты

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \tau_{ij}^2}, \quad \dot{e} = \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^{3} \dot{e}_{ij}^2} \tag{1.5}$$

Заметим, что вязкость вещества пор (флюидов или газа) на много порядков меньше кажущейся вязкости прослоек η^c.

При аппроксимации реологических свойств неньютоновских жидкостей часто используется степенной закон

$$\tau = K\dot{e}^n, \quad \eta = K\dot{e}^{n-1} \tag{1.6}$$

K, $n > 0$ — постоянные для конкретного вещества (при $\dot{e}$, $\tau < 0$ будем полагать $\dot{e}^n = -(\dot{e})^n$, $\tau^{1/n} = -(-\tau)^{1/n}$). Данный закон имеет особенность при $\dot{e} = 0$. В реальных веществах при $\dot{e} = 0$ существует конечная вязкость, совпадающая с производной τ по $\dot{e}$: $\eta = \partial\tau/\partial\dot{e} \neq 0$ [8]. Поэтому в вычислениях нужно учитывать, что в некоторой окрестности нуля соотношения (1.6) неверны, однако на результат это, вообще говоря, влияет несущественно. Жидкости с $0 < n < 1$ являются псевдопластическими (и, по-видимому, наиболее реальными в рассматриваемой задаче), для них вязкость η убывает с ростом $\dot{e}$. Другой тип жидкостей, с $n > 1$,— дилатантные, для них η при увеличении $\dot{e}$ возрастает. Как мы увидим ниже, в зависимости от характера реологических свойств жидкости (для степенного закона — от показателя n) свойства макросреды могут быть принципиально различными.

Для постановки краевых условий необходимо использовать условие непрерывности скоростей на границах зерен ∂B и областей C и $D(\Gamma_{cd})$, а на границе Γ_{cd}, кроме того,— условие непрерывности усилий

$$[v_i]_-^+ |_{\partial B} = 0, \quad [v_i]_-^+ |_{\Gamma_{cd}} = 0; \quad [\sigma_{i\nu}]_-^+ |_{\Gamma_{cd}} = 0; \quad \sigma_{i\nu} = \sigma_{ij}\nu_j$$

где ν_i — вектор единичной нормали к Γ_{cd} $[f]_-^+|_\Gamma$ — скачок величины f при прохождении через границу Γ.

2. Основные уравнения для жидкости с произвольным реологическим законом. Будем считать вначале, что вещество межзеренных прослоек является неньютоновской жидкостью с произвольным реологическим законом (1.2). Перейдем к безразмерным переменным v_i, σ_{ij}, η и функции f

$$v_i = \frac{v_i^c T^*}{R}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^c}{\sigma^*}, \quad \eta = \frac{\eta^c}{\sigma^* T^*}, \quad f(\dot{e}) = \frac{F(\dot{e}^c)}{\sigma^*}$$

где σ^*, T^* — характерные напряжения и время вязких процессов в рассматриваемой среде, и введем локальные (свои в каждом зазоре) ячеечные координаты x, y, z, такие, что плоскость x, y находится посередине зазора. Границы зерен описываются уравнениями

$$z = \pm h(r)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $2h(r)$ – безразмерная толщина зазора, $h = H/R$.

В случае плоских граней $h(r) \equiv \varepsilon_0 = H_0 / R$, а в случае шарообразных зерен $h(r) = \varepsilon_0 + (1 - \sqrt{1 - r^2})$. Граничные условия запишем в виде

$$
\begin{aligned}
& v_x \,|_{z=\pm h(r)} = \pm v_{0x}, \quad v_y \,|_{z=\pm h(r)} = \pm v_{0y} \\
& v_z \,|_{z=\pm h(r)} = \pm v_{0z} \\
& [\sigma_{b}]_-^+ \,|_{\Gamma_{cd}} = 0, \quad [v_i]_-^+ \,|_{\Gamma_{cd}} = 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где v_{0i}, $i = x, y, z$ — значения скоростей v_i на границах зерен; их связь с размерными переменными (для определенности считаем, что $x_1 \to x$, $x_2 \to y$, $x_3 \to z$)

$$
\frac{\partial v_1^\circ}{\partial x_3} = \frac{v_{0x}}{T^*}, \quad \frac{\partial v_2^\circ}{\partial x_3} = \frac{v_{0y}}{T^*}, \quad \frac{\partial v_3^\circ}{\partial x_3} = \frac{v_{0z}}{T^*}
$$

где v_i° — поле осредненных скоростей макросреды.

Для зерен II типа, следуя [3], возьмем малое H^*, такое, что $2H_0 \le H^* << k$, и, кроме того, область $N = \{r \le r^*, -h(r) \le z \le h(r)\}$, где $h^* = h(r^*) = \varepsilon^* = H^*/R$ целиком содержится в области C. Так как при $r << 1$ $h(r) = \varepsilon_0 + r^2/2$, то $r^* = \sqrt{2(\varepsilon^* - \varepsilon_0)}$, откуда при $0 \le r \le r^*$

$$
\frac{\partial h}{\partial r} \sim \frac{h^*}{r^*} \sim r^* << 1
$$

Поэтому для зерен обоих типов применимо известное приближение «смазки», причем для зерна I типа — в области $N = \{-\beta \le x, y \le \beta\}$ (для квадратной грани) или $N = \{0 \le r \le \beta\}$ (для круглой грани) — малый параметр $\alpha = H_0/R = \varepsilon_0$, а для зерна II типа — в области $\{r \le r^*\}$ $\alpha = h^*/r^* = \varepsilon^*/\sqrt{2(\varepsilon^* - \varepsilon_0)}$.
Выпишем соответствующие уравнения смазки

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z}\left(f(\dot e)\frac{v_{x,z}}{\dot e}\right) = P_{,x}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(f(\dot e)\frac{v_{y,z}}{\dot e}\right) = P_{,y} \\
& 0 = P_{,z}, \quad v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z} = 0 \\
& \dot e = \sqrt{v_{x,z}^2 + v_{y,z}^2}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

с краевыми условиями (из (2 1))

$$
v_i \,|_{z=\pm h(r)} = \pm v_{0i}, \quad i = x, y, z, \quad P \,|_{\Gamma_{cd}} = P^d
\tag{2.3}
$$

где P^d — обезразмеренное (делением на σ^*) давление флюидов или газов в порах P_{pr} (оно может быть и нулевым). Если рассматривается двухкомпонентная среда, то под $P_{pr}(P^d)$, как и в [3], будем понимать давление на достаточно больших (порядка R) расстояниях от области смазки (оно, как видно далее, будет при этом стремиться к постоянному, а разность между значением P на границе смазочного слоя и P^d является малой по сравнению с P в случае, когда имеется растяжение (сжатие) и $P \not\equiv P^d$.

После элементарных преобразований из (2.2), (2.3) получается уравнение для P

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{h}\int_{z}^{h}\frac{(P_{,x}z' + \tau_{0x})f^{-1}(|\nabla P\cdot z' + \tau_0|)}{|\nabla P\cdot z' + \tau_0|}\,dz'\,dz + \\
& + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{h}\int_{z}^{h}\frac{(P_{,y}z' + \tau_{0y})f^{-1}(|\nabla P\cdot t' + \tau_0|)}{|\nabla P\cdot z' + \tau_0|}\,dz'\,dz = 2(v_{0z} + v_{0x}h_{,x} + v_{0y}h_{,y})
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

где f^{-1} — функция, обратная к f, $\nabla P = (P_{,x}, P_{,y})$; $\tau_0 = (\tau_{0x}, \tau_{0y})$; τ_{ox}, τ_{oy} — значения τ_{xz}, τ_{yz} на грани $z =$ 0) для зерен I типа правая часть (2.4) будет $2v_{0z}$ с условиями

$$\int\limits_{-h}^{h} \frac{(P_{,x}z + \tau_{0x}) f^{-1}(\,|\nabla P\cdot z + \tau_0|\,)}{|\nabla P\cdot z + \tau_0|}\, dz = 2v_{0x}$$

$$\int\limits_{-h}^{h} \frac{(P_{,y}z + \tau_{0y}) f^{-1}(\,|\nabla P\cdot z + \tau_0|\,)}{|\nabla P\cdot z + \tau_0|}\, dz = 2v_{0y} \tag{2.5}$$

В случае сдвига ($v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \neq 0$, $v_{0z} = 0$) решение системы (2.4), (2.5) с последним краевым условием (2.3) имеет вид

$$P \equiv P^d, \quad \tau_{0i} = f^{-1}\left(\frac{\dot e}{h}\right)\frac{v_{0i}}{\dot e}, \quad i = x, y$$

При всестороннем растяжении (сжатии) ($v_{0x} = 0$, $v_{0y} = 0$, $v_{0z} \neq 0$) $\tau_{0x} = 0$, $\tau_{0y} = 0$ и (2.4) можно записать с учетом четности f в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{P_{,x}}{P_{,J}}\int\limits_0^h\int\limits_z^h f^{-1}(P_{,J}z')\,dz'\,dz\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{P_{,y}}{P_{,J}}\int\limits_0^h\int\limits_z^h f^{-1}(P_{,z}z')\,dz'dz'\right\} = v_{0z} \tag{2.6}$$

$$P_{,J} = \sqrt{P_{,x}^2 + P_{,y}^2}$$

а для зерен I типа с круглыми гранями или зерен II типа — по цилиндрической симметрии

$$\int\limits_0^h\int\limits_z^h f^{-1}(P_{,z}t')\,dz'\,dz = \frac{v_{0z}\,r}{2} \tag{2.7}$$

т. е. по существу решить в квадратурах.

Данное решение имеет место в «смазочной» области, за ее пределами оно, вообще говоря, места не имеет. Средние $\langle P\rangle$, $\langle\tau_{0x}\rangle$, $\langle\tau_{0y}\rangle$ (по грани $z = 0$) для зерен I типа

$$\langle P\rangle = \frac{1}{4}\iint\limits_N P^{ef}dx\,dy + P^d, \quad P = P^{ef} + P^d$$

$$\langle\tau_{0i}\rangle = \frac{1}{4}\iint\limits_N \tau_{0i}\,dx\,dy, \quad i = x, y, \quad N = \{[-1;1]\times[-1;1]\}$$

а для зерен II типа

$$\langle P\rangle = \frac{1}{4}\cdot\iint\limits_{r\le r^*} P^{ef}\,dx\,dy + q_z + P^d$$

$$q_z = \frac{1}{4}\iint\limits_{N\setminus\{r\le r^*\}} P^{ef}\,dx\,dy$$

$$\langle\tau_{0i}\rangle = \frac{1}{4}\iint\limits_{r\le r^*} \tau_{0i}\,dx\,dy + q_i, \quad i = x, y$$

$$q_i = \iint\limits_{N\setminus\{r\le r^*\}} \tau_{0i}\,dx\,dy$$

При чистом сдвиге, очевидно

$$\langle P\rangle = P^d, \quad P^{ef} = 0 \tag{2.8}$$

причем для зерен I типа

$$\langle\tau_{0i}\rangle = n^b f^{-1}\left(\frac{\dot e}{n}\right)\frac{v_{0i}}{\dot e}, \quad i = x, y \tag{2.9}$$

где n^b — отношение площадки грани зерна, контактирующей с областью C, к полной площади грани микроячейки (для квадратной грани $n^b = \beta^2$, а для круглой $n^b = \pi\beta^2/4$); для зерен II типа

$$\langle\tau_{0i}\rangle = \frac{1}{4}\frac{v_{0i}}{\dot e}\int\limits_0^{r^*} 2\pi r f^{-1}\left(\frac{\dot e}{h}\right)dr + q_i, \quad i = x, y \tag{2.10}$$

При сжатии $\langle\tau_{0x}\rangle = 0, \langle\tau_{0y}\rangle = 0$, причем для зерен I типа с круглыми гранями

$$\langle P\rangle = \frac{1}{4}\int_0^{\beta} 2\pi r P^{ef} dr + P^d$$

а для зерен II типа

$$\langle P\rangle = \frac{1}{4}\int_0^{r^*} 2\pi r P^{ef} dr + q_z + P^d$$

3. Анализ для межзеренных прослоек со степенным реологическим законом и выводы. Рассмотрим теперь случай, когда межзеренные прослойки являются жидкостью со степенным реологическим законом (1.6). Здесь переход к безразмерным переменным v_i, σ_{ij}, η целесообразно осуществить как

$$v_i = \frac{v_i^f}{R}\left(\frac{K^c}{\sigma^*}\right)^{1/n}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^c}{\sigma^*}, \quad \eta = \left(\frac{\eta^c}{K^c {\sigma^*}^{n-1}}\right)^{1/n}$$

Тогда для граничных значений v_{0i} в (2.1)

$$\frac{\partial v_1^\circ}{\partial x_3} = \left(\frac{\sigma^*}{K^c}\right)^{1/n} v_{0x}, \quad \frac{\partial v_2^\circ}{\partial x_3} = \left(\frac{\sigma^*}{K^c}\right)^{1/n} v_{0y}, \quad \frac{\partial v_3^\circ}{\partial x_3} = \left(\frac{\sigma^*}{K^c}\right)^{1/n} v_{0z} \tag{3.1}$$

Вначале предположим, что имеет место сдвиговое течение. Для зерен I типа решение по (2.8), (2.9) тривиально. Для зерен II типа (не умаляя общности, будем считать, что $v_{0x} \neq 0$, $v_{0y} = 0$, $v_{0z} = 0$) по (2.10) имеем

$$\langle\tau_{0x}\rangle = \frac{\pi v_{0x}^n}{2}\,\frac{{\varepsilon^*}^{1-n} - \varepsilon_0^{1-n}}{1-n} + q_x \tag{3.2}$$

Из размерностных соображений (аналогично [3]) вклад от «несмазочной» области q_x имеет порядок

$$q_x = \gamma\,\frac{v_{0x}^n}{2(1-n)}\,{\varepsilon^*}^{-n} \tag{3.3}$$

где γ — безразмерное число порядка $\lesssim 1$. Следовательно,

$$\langle\tau_{xz}\rangle = \frac{\pi v_{0x}^n}{2(n-1)}\,\varepsilon_0^{1-n} + \frac{v_{0x}^n}{2(1-n)}\left({\varepsilon^*}^{1-n} + \gamma{\varepsilon^*}^{-n}\right) \tag{3.4}$$

Так как ε^* фиксировано, а нам необходимо получить асимптотику при $\varepsilon_0 \to 0$, мы можем считать, что

$$\varepsilon_0 \ll \varepsilon^* \ll 1 \tag{3.5}$$

Из (3.5) мы видим, что при $0 < n < 1$ (в наиболее реальном случае) и $\varepsilon_0 \to 0$ первое слагаемое становится пренебрежимо мало по сравнению со вторым. Это означает, что вклад от «смазочной» области будет много меньше, чем от «несмазочной», и, следовательно, $\langle\tau_{xz}\rangle$ от ε_0 практически не зависит. Так как система (1.1), (1.3), (1.5), (1.6) однородна по v, после полного решения соответствующей нелинейной краевой задачи и осреднения по грани $\langle\tau_{xz}\rangle$ будет иметь вид

$$\langle\tau_{xz}\rangle = \lambda v_{0x}^n, \quad 0 < n < 1 \tag{3.6}$$

где λ зависит от n и не зависит от ε_0 при $\varepsilon_0 \to 0$ (стремится к конечному ненулевому числу при $\varepsilon_0 \to 0$).

В случае $n > 1$ при $\varepsilon_0 \to 0$ (3.4) примет вид

$$\langle\tau_{xz}\rangle = \frac{\pi v_{0x}^n}{2(n-1)}\,\varepsilon_0^{1-n} \tag{3.7}$$

Из (3.6) мы видим, что для чисто сдвигового течения и псевдопластических межзеренных прослоек минимальная толщина зазора между соседними по оси z зернами ε_0 может быть сколь угодно малой при $v_{ox} \neq 0$ (зерна могут быть близки вплоть до сухого контакта), а суммарная сила сопротивления $4\langle \tau_{xz} \rangle$, действующая на зерно по касательной, будет кончена. При этом касательное напряжение, действующее в точке $r=0$, т. е. там, где толщина зазора минимальна, по (3.1) равно $\tau(0) = (v_{0x}/\varepsilon_0)^n$ и, следовательно, для любого показателя $n > 0$, $\tau(0)$ будет неограниченно расти при $\varepsilon_0 \to 0$. Это значит, что при достижении какого-либо критерия (Мора, Гриффитса, энергии формообразования или др.) в зерне должно начаться разрушение. В то же время из (3.7) следует, что при $n > 1$ $v_{0x} = \{2(n-1)\langle\tau_{0x}\rangle/\pi\}^{1/n}\varepsilon_0^{(n-1)/n}$, т. е. для конкретного конечного усилия $4\langle \tau_{0x} \rangle$ при неограниченной близости соседних зерен v_{0x} будет соответственно близко к нулю, и поэтому для дилатантных жидкостей сухого контакта при сдвиговом течении быть не может.

Предположим теперь, что течение имеет вид всестороннего или девиаторного растяжения (сжатия) $(v_{0x} = 0, v_{0y} = 0, v_{0z} \neq 0)$.

В случае зерен I типа с круглыми гранями или зерен II типа из (2.7) получим

$$P_{,r} = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \frac{v_{0z}^n}{n^{2n+1}} r^n \tag{3.8}$$

Для зерен I типа из (3.8) распределение P имеет вид

$$P = \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n \frac{v_{0z}^n}{\varepsilon_0^{2n+1}} \frac{r^{n+1} - \beta^{n+1}}{n+1} + P^d$$

а среднее по грани

$$\langle P\rangle = -\frac{\pi}{4(n+3)}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n \frac{v_{0z}^n \beta^{n+3}}{\varepsilon_0^{2n+1}} + P^d$$

Если же зерна I типа имеют квадратные грани, то после решения (2.6) и осреднения получим, что

$$\langle P\rangle = -\mu \frac{v_{0z}^n \beta^{n+3}}{\varepsilon_0^{2n+1}} + P^d$$

где μ — константа, зависящая от n.

Для зерен II типа, интегрируя (3.8) с учетом последнего условия (2.3), получим

$$P = -\left(\frac{2n+1}{2n} v_{0z}\right)^n \frac{2^{(n+1)/2}}{\varepsilon_0^{(3n+1)/2}} \psi\left(\frac{r}{\sqrt{2\varepsilon_0}}\right) + P^d \tag{3.9}$$

$$\psi(\xi) = \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\xi'^n\, d\xi'}{(1+\xi'^2)^{2n+1}}$$

При $\sqrt{2\varepsilon_0} \ll r \ll r^*$, $\xi \gg 1$ $P(r)$, $\psi(\xi)$ обладают асимптотикой

$$P = -\frac{2}{3n+1}\left(\frac{4n+2}{n} v_{0z}\right)^n r^{-3n-1} + P^d, \quad \psi(\xi) = \frac{\xi^{-3n-1}}{3n+1}$$

Аналогично (3.2), (3.3) среднее $\langle P \rangle$ будет

$$\langle P\rangle = -\pi\left(\frac{2n+1}{2n} v_{0z}\right)^n \frac{2^{(n+1)/2}}{\varepsilon_0^{(3n-1)/2}} \int_0^{\sqrt{(\varepsilon^*-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}} \xi\psi(\xi)\, d\xi + \delta v_{0z}^n \varepsilon^{*-n} + P^d \tag{3.10}$$

где $\delta \not< 1$.

Как и для (3.4), в зависимости от значения n могут быть разные случаи. При $0 < n < 1/3$ по (3.5) получим

$$\langle P\rangle = -\frac{\pi}{1-9n^2}\left(\frac{4n+2}{n}v_{0z}\right)^n \varepsilon^{*(1-3n)/2} + \delta v_{0z}^n \varepsilon^{*-n} + P^d$$

т. е. $\langle P\rangle$ практически не зависит от ε_0 или, что то же самое, вклад от смазочной области мал. Следовательно, аналогично (3.6)

$$\langle P\rangle = -\mu v_{0z}^n + P^d \tag{3.11}$$

где μ зависит от n (найти его можно аналогично λ в (3.6)).

При $n = 1/3$ из (3.10), (3.5) следует

$$\langle P\rangle = \pi\,(10v_{0z})^{1/3}\ln\varepsilon_0 + \left(-\pi\,(10v_{0z})^{1/3}\ln\varepsilon^* + \delta v_{0z}^{1/3}\varepsilon^{*1/3}\right) + P^d \tag{3.12}$$

Для упрощения (3.12) необходимо условие, более сильное, чем (3.5), а именно $1 \ll \varepsilon^{*-1/3} \ll -\ln\varepsilon_0$. Тогда для соответствующих ε_0 (3.12) примет вид

$$\langle P\rangle = \frac{\pi}{4}\ln\varepsilon_0\,(10v_{0z})^{1/3} + P^d,\quad n = \frac{1}{3} \tag{3.13}$$

Наконец, в случае $n > 1/3$ с учетом (3.5) получим

$$\langle P\rangle = -\pi\zeta\left(\frac{2n+1}{2n}v_{0z}\right)^n \frac{2^{(n+1)/2}}{\varepsilon_0^{(3n-1)/2}} + P^d \tag{3.14}$$

где $\zeta = \int\limits_0^{+\infty} \xi\psi(\xi)\,d\xi$ есть функция показателя n.

Аналогично сдвиговому течению при сжатии по оси z ($v_{0z} < 0$) из (3.11) видно, что для $0 < n < 1/3$ два соседних (по оси z) зерна могут сблизиться вплоть до сухого контакта; в данном случае — со скоростью

$$v_{0z} = \left(\frac{\langle P\rangle - P^d}{\mu}\right)^{1/n} \tag{3.15}$$

за время

$$t_0 = \varepsilon_0\left(\frac{\mu}{\langle P\rangle - P^d}\right)^{1/n}$$

Если $n = 1/3$, из (3.13) получим

$$v_{0z} = \frac{1}{10}\left(\frac{4\,(\langle P\rangle - P^d)}{\ln\varepsilon_0}\right)^3 \tag{3.16}$$

откуда видно, что при $\varepsilon_0 \to 0$ будет $v_{0z} \to 0$.

Сближение, однако, и здесь произойдет за конечное время

$$t_0 = \int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{d\varepsilon_0'}{-v_{0z}(\varepsilon_0')} = -10\left(\frac{\Pi}{4\,(\langle P\rangle - P^d)}\right)^3 \varepsilon_0\left\{(\ln\varepsilon_0)^3 - 3(\ln\varepsilon_0)^2 + 6\ln\varepsilon_0 - 6\right\} \tag{3.17}$$

При $n > 1/3$ по (3.14)

$$-v_{0z} = \frac{2n}{2n+1}\left(\frac{\langle P\rangle - P^d}{\pi\zeta 2^{(n+1)/2}}\right)^{1/n} \varepsilon_0^{(3n-1)/2n} \tag{3.18}$$

Как и для $n = 1/3$, при $\varepsilon_0 \to 0$ будет $v_{0z} \to 0$.

Время сближения t_0 выражается интегралом

$$t_0 = \int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{d\varepsilon_0'}{-v_{0z}(\varepsilon_0')} = \frac{2n+1}{2n} \left(\frac{\pi\zeta 2^{(n+1)/2}}{\langle P\rangle - P^d} \right)^{1/n} \int\limits_0^{\varepsilon_0} \varepsilon_0'^{(1-3n)/2n} d\varepsilon_0'$$

Из (3.17) мы видим, что при $1/3 < n < 1$, как и при $0 < n \le 1/3$, сближение произойдет за конечное время

$$t_0 = \frac{2n+1}{1-n} \left(\frac{\pi\zeta 2^{(n+1)/2}}{\langle P\rangle - P^d} \right)^{1/n} \varepsilon_0^{(1-n)/2n}$$

а при $n \ge 1$ это время бесконечно, так как интеграл (3.17) расходится (для неньютоновской жидкости $n \ne 1$).

Таким образом, для псевдопластических межзеренных прослоек ($0 < n \le 1$) соседние зерна при сжатии аналогично сдвигу могут сближаться вплоть до сухого контакта, тогда как суммарная сила $4\langle P\rangle$, действующая на зерно по нормали, будет конечна. Для $0 < n \le 1/3$ скорость при сближении может оставаться конечной и отличной от нуля, для $n \ge 1/3$ — будет стремиться к нулю. В точке $r = 0$ нормальное напряжение по (3.9), (3.15), (3.16), (3.18) для конкретного конечного усилия $4\langle P\rangle$ независимо от показателя n подобно сдвиговому течению неограниченно растет при $\varepsilon_0 \to 0$. Следовательно, и в этом случае должно начаться разрушение.

Здесь следует остановиться на применимости модели жестких зерен к выводам о возможности разрушения последних. Разумеется, в действительности они будут иметь конечный, хотя и достаточно большой, по нашему предположению, модуль Юнга E, а также коэффициент Пуассона ν ($0<\nu < 0{,}5$). Поэтому при сухом контакте следует, вообще говоря, пользоваться не формулой (3.9), а решением известной задачи Герца. Радиус R_0 площадки контакта будет (в размерных переменных)

$$R_0 = \left(\frac{3\,(1-\nu^2)\,\langle P^f\rangle}{E} \right)^{1/3} R, \quad P^f = P^c - P_{pr}$$

а максимальное давление в центре, отнесенное к среднему по грани (очевидно, главный вклад в него вносят усилия на площадке контакта)

$$\frac{P^f(0)}{\langle P^f\rangle} = \frac{6}{\pi} \left(\frac{E}{3\,(1-\nu^2)\,\langle P^f\rangle} \right)^{2/3}$$

Данное отношение тем больше, чем больше E. Поэтому в процессе изменения среднего давления $\langle P^f\rangle$ может приобрести значение, не достаточное для разрушения при равномерном сжатии или зернах с плоскими гранями, но такое, что локальное напряжение $P^f(0)$ достигает необходимой для разрушения величины.

Переходя к выводу микросоотношений, получаем, что полные напряжения в сплошной среде выражаются при растяжении (сжатии) в виде

$$\sigma_{ss}^\circ = K_1 \left(\frac{\partial v_s}{\partial x_s} \right)^n - P_{pr}$$

(по индексу $s = 1, 2, 3$ суммирование не производится), а при сдвиге (рассмотрение течения при $v_1^\circ = C_1 x_3$, $v_2^\circ = 0$,$v_3^\circ = 0$ очевидным образом обобщается на случай $v_1^\circ = C_1 x_3$, $v_2^\circ = C_2 x_3$, $v_3^\circ = 0$, где C_1, C_2 — произвольные константы)

$$\sigma_{ik}^\circ = K_2 \sqrt{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right)^2}^{\,n-1} \frac{\partial v_i^\circ}{\partial x_k}$$

$$\sigma_{jk}^\circ = K_2 \sqrt{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right)^2}^{\,n-1} \frac{\partial v_j^\circ}{\partial x_k}$$

$i, j, k = \Omega\,(1, 2, 3)$

где K_1, K_2 — постоянные коэффициенты, зависящие от структуры микроячейки (геометрии зерен, реологических свойств прослоек). Из проведенного выше рассмотрения следует справедливость соотношения Терцаги [1—3], выражающего связь между тензором полных напряжений σ_{ij}° и тензором эффективных напряжений σ_{ij}^{f} (выводы для частных случаев деформации легко обобщаются на произвольный случай): $\sigma_{ij}^{\circ} = \sigma_{ij}^{ef} - P_{f}\delta_{ij}$, где σ_{ij}^{ef} зависит только от тензора скоростей деформаций.

Для зерен I типа коэффициенты K_1, K_2 выражаются в виде

$$K_1 = \begin{cases} \dfrac{K^c\mu\beta^{n+3}}{\varepsilon_0^{2n+1}} & \text{(для квадратных граней)} \\ \dfrac{K^c\pi\beta^{n+3}}{4(n+3)\,\varepsilon_0^{2n+1}}\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^n & \text{(для круглых граней)} \end{cases} \tag{3.19}$$

$$K_2 = \frac{K^c n^b}{\varepsilon_0^{n}} \tag{3.20}$$

Для зерен II типа

$$K_1 = \begin{cases} \mu K^c, & 0 < n < \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{\pi K^c\cdot 10^{1/3}}{4}\ln\varepsilon_0, & n = \dfrac{1}{3} \\ \pi K^c\zeta\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)^n \dfrac{2^{(n+1)/2}}{\varepsilon_0^{(3n-1)/2}}, & n > \dfrac{1}{3} \end{cases} \tag{3.21}$$

$$K_2 = \begin{cases} \lambda K^c, & 0 < n < 1. \\ \dfrac{\pi K^c}{2(n-1)\,\varepsilon_0^{n-1}}, & n > 1 \end{cases} \tag{3.22}$$

Как уже говорилось, μ, λ здесь могут быть найдены только путем точного решения краевой задачи для системы (1.1), (1.3), (1.5), (1.6) и являются функциями показателя n (случай $n = 1$, т. е. ньютоновской жидкости, рассматривается в [3]). Для течения с произвольной смешанной деформацией ($v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \neq 0$, $v_{0z} \neq 0$) вклад от смазочной области, вообще говоря, не является доминирующим для псевдопластических жидкостей ($0 < n < 1$), а в случае $0 < n < 1/3$ макроскопические характеристики не будут зависеть от ε_0 при $\varepsilon_0 \to 0$.

Если же реологический закон прослоек произволен (1.2), то критерий доминируемости или недоминируемости вклада от смазочной области определяется, очевидно, свойствами функции f, выражающей реологические свойства прослоек. Условие псевдопластичности можно принять в виде: $f(\dot e) \le f_0\dot e^n$ для $\dot e \ge \dot e_{cr}$, где f_0, $\dot e_{cr}$, $n\,(0 < n < 1)$ — постоянные, а дилатантности: $f(\dot e) \ge f_0\dot e^n$ для $\dot e \ge \dot e_{cr}, n > 1$ (можно использовать более слабое условие: $f(\dot e) \ge f_0\dot e$ для $\dot e \ge \dot e_{cr}$ вместо условия $n \ge 1$) В качестве обобщения условия $n < 1/3$ (соответственно $n > 1/3$; $n \ge 1/3$) можно принять $f(\dot e) \le f_0\dot e^n, n < 1/3$ (соответственно $f(\dot e) \ge f_0\dot e^n$, $n > 1/3; f(\dot e) \ge f_0\dot e^{1/3}$, $n \ge 1/3), \dot e \ge \dot e_{cr}$. Основные выводы, полученные при исследовании микроструктуры среды с зернами II типа, здесь будут иметь место при использовании соответствующих обобщенных условий.

Ввиду сложности системы для случая произвольной деформации (2.4), (2.5) представляет интерес рассмотреть задачу осреднения на более простой плоской модели, например на периодической системе жестких квадратов (зерна I типа), между ребрами которых находится тонкий смазочный слой, или круглых зерен II типа. Сохраняя прежние обозначения, считаем, что рассматриваемая система расположена в плоскости x_1, x_3 (в безразмерных координатах — x, z). Наиболее удобным в смысле аналитического решения оказывается случай $n = 1/2$. При этом предполагается выполнение условия (согласованного с применимостью приближения смазки)

$$\frac{|v_{3,3}{}^\circ|}{\varepsilon_0\ |v_{1,3}{}^\circ|} \le \frac{1}{2}\ \left(\frac{|v_{0z}|}{\varepsilon_0\ |v_{0x}|} \le \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{|v_{3,3}{}^\circ|}{\sqrt{2\varepsilon_0}\ |v_{1,3}{}^\circ|} \le \frac{1}{2}\ \left(\frac{|v_{0z}|}{\sqrt{2\varepsilon_0}\ |v_{0x}|} \le \frac{1}{2}\right) \tag{3.23}$$

для зерен I и II типов соответственно.

После интегрирования (2.2), (2.3) для плоской задачи с помощью элементарных преобразований получим

$$P_{,x} = \sqrt{\frac{3|v_{0x}|}{2h^3}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{3v_{0z}{}^\circ}{h^2v_{0x}^2}x^7}}\ \ \mathrm{sgn}\,(v_{0z}x)$$

Распределение касательного напряжения τ_{xz} по ребру $z=0$ имеет вид

$$\tau_{xz} = \sqrt{\frac{|v_{0x}|}{2h}}\ \sqrt{1+\sqrt{1-\frac{3v_{0z}^2}{h^2v_{0x}^2}x^2}}\ \ \mathrm{sgn}\,v_{0x} \tag{3.24}$$

Для зерен I типа давление P будет

$$P = \sqrt{\frac{2|v_{0x}|}{\varepsilon_0}}\ \frac{|v_{0x}|}{3v_{0z}}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{3v_{0z}^2}{\varepsilon_0^2v_{0x}^2}x^2}} - \sqrt{1+\sqrt{1-\frac{3v_{0z}^2}{\varepsilon_0^2v_{0x}^2}}}\right)+$$
$$+\sqrt{\frac{2|v_{0x}|}{3\varepsilon_0}}\left(\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{3v_{0z}^2}{\varepsilon_0^2v_{0x}^2}x^2}}\ \ |x|-\right. \tag{3.25}$$
$$\left.-\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{3v_{0z}^2}{\varepsilon_0^2v_{0x}^2}}}\right)\ \ \mathrm{sgn}\,v_{0z}+P^d$$

Интегрируя далее (3.25), (3.24), находим средние $\langle P\rangle$, $\langle\tau_{xz}\rangle$ по ребру $z=0$

$$\langle P\rangle = -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0^3}\left(|v_{0x}|-\sqrt{v_{0x}^2-\frac{3v_{0z}^2}{\varepsilon_0^2}}\right)}\ \left(\frac{3}{5}-\frac{10\sqrt{3}-12}{135}\frac{v_{0x}^2\varepsilon_0^2}{v_{0z}^2}\right)\mathrm{sgn}\,v_{0z}-$$
$$-\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0^3}\left(|v_{0x}|+\sqrt{v_{0x}^2-\frac{3v_{0z}^2}{\varepsilon_{(}^2}}\right)}\ \frac{5-2\sqrt{3}}{45}\frac{|v_{0x}|\ \varepsilon_0}{v_{0z}}+P^d \tag{3.26}$$

$$\langle\tau_{0x}\rangle = \frac{\varepsilon_0 v_{0x}}{3\ |v_{0z}|}\sqrt{\frac{2}{3\varepsilon_0}\left(|v_{0x}|+\sqrt{v_{0x}^2-\frac{3v_{0z}^2}{\varepsilon_0^2}}\right)}\ +$$
$$+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0}\left(|v_{0x}|+\sqrt{v_{0x}^2-\frac{3v_{0z}^2}{\varepsilon_0^2}}\right)}\ \ \mathrm{sgn}\,v_{0x} \tag{3.27}$$

Рассмотрев предел от (3.26), (3.27) при $v_{0z}\to 0$, легко убедиться, что $\langle P\rangle\to 0$, $\langle\tau_{xz}\rangle\to\sqrt{|v_{0x}|/\varepsilon_0}\ \mathrm{sgn}\,v_{0x}$. Таким образом, связь между тензорами напряжений и скоростей деформаций дается соотношениями

$$\sigma_{ss}{}^\circ = K^c\left\{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0}\left(|v_{i,s}{}^\circ|-\sqrt{v_{i,s}{}^{\circ 2}-\frac{3v_{s,s}{}^{\circ 2}}{\varepsilon_0^2}}\right)}\left(\frac{3}{5\varepsilon_0}-\frac{10\sqrt{3}-12}{135}\frac{v_{i,s}{}^\circ\varepsilon_0}{v_{s,s}{}^{\circ 2}}\right)\mathrm{sgn}\,v_{s,s}{}^\circ+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0}\left(|v_{i,s}{}^\circ|+\sqrt{v_{i,s}{}^{\circ 2}-\frac{3v_{s,s}{}^{\circ 2}}{\varepsilon_0^2}}\right)}\ \frac{5-2\sqrt{3}}{45}\frac{|v_{i,s}{}^\circ|}{v_{s,s}{}^\circ}\right\}-P_{pr}$$

$$\sigma_{is}{}^{\circ}=K^{c}\left\{\frac{\varepsilon_0 v_{i,s}{}^{\circ}}{3\,|v_{s,s}{}^{\circ}|}\sqrt{\frac{2}{3\varepsilon_0}\left(|v_{i,s}{}^{\circ}|-\sqrt{v^{\circ}{}^{2}_{i,s}-\frac{3v^{\circ}{}^{2}_{s,s}}{\varepsilon_0^2}}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0}\left(|v_{i,s}{}^{\circ}|+\sqrt{v_{i,s}{}^{\circ 2}-\frac{3v_{s,s}{}^{\circ 2}}{\varepsilon_0^2}}\right)}\right\}\operatorname{sgn} v_{i,s}{}^{\circ}$$

$i,\ s=\Omega\,(1,3)$

Для зерен II типа распределение давления будет

$$P=-\frac{\sqrt{3\,|v_{0x}|}}{\varepsilon_0}\int\limits_{|\xi|}^{+\infty}\sqrt{\frac{1}{(1+\xi'^2)^3}\left\{1-\sqrt{1-\frac{6v_{0z}^2}{\varepsilon_0 v_{0x}^2}\frac{\xi'^2}{(1+\xi'^2)^2}}\right\}}\,d\xi'+P^d$$

$$\xi=\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon_0}}$$

а среднее по ребру (здесь вклад от смазочной области доминирует)

$$\langle P\rangle=-\sqrt{\frac{6\,|v_{0x}|}{\varepsilon_0}}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\xi}^{+\infty}\sqrt{\frac{1}{(1+\xi'^2)^3}\left\{1-\sqrt{1-\frac{6v_{0z}^2}{\varepsilon_0 v_{0x}^2}\frac{\xi'^2}{(1+\xi'^2)^2}}\right\}}\,d\xi'\,d\xi+P^d$$

(интеграл на $+\infty$ сходится).

Среднее по ребру $z=0$ от касательного напряжения

$$\langle\tau_{xz}\rangle=\mp\frac{1}{2}\sqrt{2\,|v_{0x}|}\ln\varepsilon_0+\sqrt{2\,|v_{0x}|}\ln\frac{\sqrt{\varepsilon^*}+\sqrt{\varepsilon^*-\varepsilon_0}}{2}-$$

$$-\sqrt{2\,|v_{0x}|}\int\limits_0^{\sqrt{(\varepsilon^*-\varepsilon_0)/\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{6v_{0z}^2\xi^2}{\varepsilon_0 v_{0x}^2(1+\xi^2)^2}}\right)}\right)d\xi+q_x \qquad (3.28)$$

$$q_x=\int\limits_{\sqrt{2(\varepsilon^*-\varepsilon_0)}}^{1}\tau_{xz}\,dx$$

Предпоследнее слагаемое в (3.28) можно оценить, используя (3.23)

$$\sqrt{2\,|v_{0x}|}\int\limits_0^{\sqrt{(\varepsilon^*-\varepsilon_0)/\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{6v_{0z}^2}{\varepsilon_0 v_{0x}^2}\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}}\right)}\right)d\xi<$$

$$<\sqrt{|v_{0x}|}\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3\xi^2}{(1+\xi^2)^2}\right)}\right)d\xi=0{,}225\sqrt{|v_{0x}|}$$

Главный член асимптотического разложения при $\varepsilon_0\to 0$

$$\langle\tau_{xz}\rangle=-\sqrt{\frac{|v_{0x}|}{2}}\ln\varepsilon_0\operatorname{sgn} v_{0x}$$

Как видно, касательное напряжение в первом приближении зависит только от недиагональных компонент тензора скоростей деформаций и не зависит от диагональных. Связь между тензорами напряжений и скоростей деформаций для зерен II типа будет

$$\sigma_{ss}{}^{\circ} = K^c \sqrt{\frac{6\,|v_{l,s}{}^{\circ}|}{\varepsilon_0}} \int_0^{+\infty}\int_{\xi}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{(1+\xi'^2)^3}\left\{1-\sqrt{1-\frac{6v_{s,s}{}^{\circ 2}}{\varepsilon_0 v_{l,s}{}^{\circ 2}}\frac{\xi'^2}{(1+\xi'^2)^2}}\right\}}\, d\xi'\, d\xi - P_{pr}$$

$$\sigma_{ls}{}^{\circ} = -K^c \sqrt{\frac{|v_{l,s}{}^{\circ}|}{2}} \ln \varepsilon_0 \operatorname{sgn} v_{0x}$$

Для псевдопластических жидкостей ($0 < n < 1$) при неограниченной близости зерен II типа разрушение должно начаться как при чистом сдвиге, так и при сжатии. (Здесь речь идет о пространственной задаче. В плоской модели v_{0x} будет конечна и отлична от нуля при фиксированном усилии $2\langle\tau_{xz}\rangle$; $\varepsilon_0 \to 0$ для $0 < n < 1/2$, при чистом сжатии v_{0z} для фиксированного усилия $2\langle P\rangle$ будет всегда стремиться к нулю при $\varepsilon_0 \to 0$, $n > 0$, а если $0 < n < 2/3$, то сближение тем не менее произойдет за конечное время.) Однако начаться сближение может, только если имеется сжатие (возможно, в композиции со сдвигом). Из приведенного выше анализа, а также соображений размерности ясно, что при $0 < n < 1/3$ для конечных и отличных от нуля нормального и касательного усилий, действующих на зерно II типа, будут также конечны и отличны от нуля соответствующие скорости в относительном движении зерен (в плоской модели этого нельзя утверждать, вообще говоря, ни при каком $n > 0$). Поэтому зерна могут сблизиться за конечное время, тогда как значения указанных усилий в точке $r = 0$ неограниченно возрастают при $\varepsilon_0 \to 0$, что ведет к разрушению зерен. При $1/3 \le n < 1$ (в плоской модели — при $0<n<2/3$) условия и возможность сближения с последующим разрушением зависят от соотношения между касательными и нормальными скоростями (v_{0x}, v_{0y} и v_{0z} в (2.3)). Вывод о возможности разрушения жесткого скелета свидетельствует о нестабильности среды с соответствующей микроструктурой. Применительно к технологии композиционных материалов это означает непрочность такой конструкции.

Для обеспечения надлежащей прочности необходимы композиты с иной микроструктурой — межзеренные прослойки с дилатантными ($n>1$) или ньютоновскими ($n = 1$) свойствами (если наряду с деформациями сжатия в значительной мере присутствуют деформации сдвига, то в ряде случаев можно, по-видимому, ограничиться условием $n \ge 1/3$) либо зерна хотя бы частично с плоскими гранями. Естественно сделать вывод, что в случае горных пород с соответствующими прослойками должен преобладать последний из указанных типов микроструктуры, так как в противном случае зерна будут подвержены разрушению с образованием меньших по размерам частиц с формой, более близкой к указанному типу, либо среды с сильно раздробленной жесткой фазой, т. е. достаточно высокой степенью дисперсности.

Для горных пород на больших глубинах давление за счет веса вышележащих слоев может оказаться много больше девиаторных напряжений, а деформации всестороннего сжатия — преобладающими над сдвиговыми. В этом случае с некоторым приближением будут справедливы результаты, полученные выше для макродеформаций растяжения (сжатия), дающие связь между диагональными компонентами тензоров напряжений и скоростей деформаций, а также некоторые выводы. В частности, можно ожидать, что сближение соседних зерен II типа, а затем и их разрушение со всеми вытекающими отсюда последствиями возможны для большинства псевдопластических прослоек ($0 < n < 1$).

Проведенное рассмотрение убеждает в том, что макроскопические свойства среды существенно (количественно и качественно) зависят от ее микроструктуры: как от геометрии микроячейки, так и от реологии межзеренных прослоек. При этом увеличение пористости ведет к значительному уменьшению вязкости. Аналогично [3] модели для среды с зернами I и II типов можно считать разными предельными случаями для возможной микроструктуры и, следовательно, выражения (3.21), (3.22) (при $\beta = 1$) и (3.19), (3.20) — соответственно нижними и верхними оценками для коэффициентов K_1, K_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каракин А. В., Лобковский Л. И.* К выводу уравнений трехкомпонентной вязкодеформируемой среды (кора и астеносфера)//Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 12. С. 3—13.
2. *Каракин А. В.* К выводу осредненных уравнений движения трехкомпонентной зернистой среды//Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 1. С. 57—66.
3. *Каракин А. В., Шкловер В. Э.* Об осреднении зернистой среды с упаковкой из шаров//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 3. С. 74—81.
4. *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds numbers hydrodynamics: with special applications to particulate media. Haque etc.: Nijhoff, 1983. 553 p.
5. *Elrod H. G.* Numerical solution for power law fluids — application to slider bearings//Dev. Numer. and Exp. Meth. Appl. Tribol. Proc. 10th Leeds — Lyon Symp. Tribol. Lyon 6th — 9th Sept. 1983. London e. a. 1984. P. 25—30. Discuss. p. 46—50.
6. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
7. *Астарита Дж., Марручи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
8. *Рейнер М.* Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.I.1990