

УДК 532.527

©1992 г. А. Г. ЯРМИЦКИЙ

СМЕРЧЕПОДОБНЫЙ ВИХРЬ ЧАПЛЫГИНА

Сферическое вихревое образование, подобное цилиндрическому вихрю Чаплыгина [1], рассматривалось в [2], а его вязкая модель — в [3]. Здесь же развивается идея [4] о цилиндрическом вихре кольцевого сечения. Однако в отличие от [4] течение в оболочке вихря сопрягается с течением в его ядре, при этом учитывается также и продольное движение жидкости. Течения как в оболочке, так и в ядре винтовые с постоянными, но разными напряжениями [5] (однородно-винтовые).

Рассматриваемый вихрь совершает прецессирующее движение: равномерно вращается вокруг некоторой оси, параллельной собственной, одновременно поворачиваясь вокруг последней с той же угловой скоростью. Установлена предельная скорость, превышение которой приводит к коллапсу.

Исследование подобного цилиндрического вихря будет способствовать лучшему пониманию таких атмосферных явлений, как смерчи (торнадо).

1. Основные уравнения, описывающие циркуляционное течение. Течение вне вихря. Систематическое изложение основных положений механики винтовых и циркуляционных течений содержится в [5]. Основополагающими уравнениями являются

$$\nabla^2 \psi = -\Omega(\psi), \quad \Omega(\psi) = -\left(E(\psi) - \frac{1}{2} w^2(\psi)\right) \quad (1.1)$$

$$E(\psi) = \frac{p}{\rho} + \frac{v_r^2 + v_\theta^2 + w^2}{2} + \Pi$$

$$v_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2} + \Pi + \int \Omega(\psi) d\psi = \text{const} \quad (1.2)$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, v_r, v_θ — компоненты скорости поперечного течения в полярных координатах, Π — потенциал массовых сил, штрих означает дифференцирование по аргументу.

Уравнение (1.1) отражает тот факт, что в циркуляционном потоке поперечная циркуляция, представленная функцией тока ψ , продольная скорость $w = w(\psi)$ и энергия единицы массы жидкости E взаимосвязаны. Уравнение (1.2) — интеграл Бернулли. Из (1.1), (1.2) следует, что циркуляционный поток представляет суперпозицию двух течений — плоскопараллельного с вихрем $\Omega(\psi)$ и ортогонального к нему прямолинейно-параллельного с изотопами $\psi = \text{const}$; кроме того, давление в циркуляционном потоке явным образом не зависит от w , т. е. таково, как и в плоском, с тем же вихрем $\Omega(\psi)$ в отсутствие $w(\psi)$.

Рассмотрим область (V) в виде бесконечного кругового цилиндра радиуса a . Полюс полярной системы координат (r, θ) поместим в центре направляющей цилиндра. Ось z направим вдоль его оси. Течение вне рассматриваемой области представим в виде наложения трех течений: однородного со скоростью U на

бесконечности, кругового однородно завихренного с угловой скоростью ω и течения с циркуляцией Γ . Функция тока указанного течения принимает вид

$$\psi = \left(Ur \sin \theta + \frac{1}{2} \omega r^2 \right) \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \gamma \ln \frac{r}{a}, \quad \gamma = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (1.3)$$

Распределение z -компоненты скорости на бесконечности, по предположению, таково

$$w = W(r) \quad (\omega \neq 0), \quad w = W(y) \quad (\omega = 0) \quad (1.4)$$

Этому условию удовлетворяет функция

$$w = W((2\psi/\omega)^{1/2}) \quad (\omega \neq 0), \quad w = W(\psi/U) \quad (\omega = 0) \quad (1.5)$$

2. Внутреннее течение. Предположим, что область (V) занимает цилиндрический вихрь с оболочкой $b \leq r \leq a$ и ядром $0 \leq r \leq b$. Пусть

$$\Omega_i = k_i^2 (\psi_i - \lambda_i), \quad \nabla^2 \psi_i + k_i^2 \psi_i = k_i^2 \lambda_i \quad (2.1)$$

где k_i, λ_i — постоянные.

В области, занятой оболочкой цилиндрического вихря, $i = 1$, а в области ядра $i = 2$. «Склейка» течений на границах с внешним потоком и ядром производится по непрерывности функции тока и скорости.

Решение (2.1) имеет вид

$$\psi_i = R_{1i}(r) \sin \theta + R_{2i}(r) + \lambda_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.2)$$

$$R_{1i}(r) = a_i J_1(k_i r) + b_i Y_1(k_i r)$$

$$R_{2i}(r) = a_{2i} J_0(k_i r) + b_{2i} Y_0(k_i r) \quad (2.3)$$

Здесь J_n, Y_n ($n = 0; 1$) — бесселевы функции первого и второго рода соответственно, а a_j и b_j ($j = 1, 2$) — произвольные постоянные.

В частном случае однородного винтового потока

$$\Omega_i = k_i w_0; \quad w_i = k_i (\psi_i - \lambda_i), \quad E = \text{const} \quad (2.4)$$

Из условия сохранения границами оболочки своей цилиндрической формы $R_{1i}(a) = R_{1i}(b) = 0$ имеем

$$a_{1i} J_1(k_i a) + b_{1i} Y_1(k_i a) = 0$$

$$a_{1i} J_1(k_i b) + b_{1i} Y_1(k_i b) = 0 \quad (2.5)$$

Уравнение, определяющее допустимые значения параметра k_i

$$J_1(k_i a) Y_1(k_i b) - J_1(k_i b) Y_1(k_i a) = 0 \quad (2.6)$$

Все его корни действительные и простые [6], таблицу некоторых из их значений можно найти, например, в [7].

По аналогии с [1] выберем в качестве k_i первый корень.

Для определения коэффициентов a_j и b_j ($j = 1, 2$) используем условия непрерывности функции тока и скорости на внешней границе вихря ($r = a$)

$$a_{1i} J_1'(k_i a) + b_{1i} Y_1'(k_i a) = 2U/k_i$$

$$a_{2i} J_0'(k_i a) + b_{2i} Y_0'(k_i a) = \frac{\gamma + \omega a^2}{k_i a}$$

$$a_{2i} J_0(k_i a) + b_{2i} Y_0(k_i a) = -\lambda_i$$

Присовокупляя к этим уравнениям первое из (2.5), получим для нахождения неизвестных коэффициентов две системы уравнений

$$a_{11}J_1(k_1a) + b_{11}Y_1(k_1a) = 0$$

$$a_{11}J_1'(k_1a) + b_{11}Y_1'(k_1a) = 2k_1^{-1}U$$

$$a_{21}J_0(k_1a) + b_{21}Y_0(k_1a) = -\lambda_1$$

$$a_{21}J_0'(k_1a) + b_{21}Y_0'(k_1a) = \frac{\gamma + \omega a^2}{k_1a}$$

Используя вронсиан бesselевых функций (2.7), найдем

$$J_n(k_1a) Y_n'(k_1a) - Y_n(k_1a) J_n'(k_1a) = 2(\pi k_1a)^{-1} \quad (2.7)$$

$$a_{11} = -\pi a U Y_1(k_1a); \quad b_{11} = \pi a U J_1(k_1a)$$

$$a_{21} = -\frac{1}{2}\pi (\gamma + \omega a^2) Y_0(k_1a) - \lambda_1 k_1 a Y_1(k_1a)$$

$$b_{21} = \frac{1}{2}\pi (\gamma + \omega a^2) J_0(k_1a) - \lambda_1 k_1 a J_1(k_1a)$$

Второе из условий (2.5) выполняется при этом автоматически в силу (2.6). Значение параметра λ_1 найдем из условия непрерывности продольной компоненты скорости на границе с вихрем ($r = a$)

$$\lambda_1 = -k_1^{-1}W(0)$$

Таким образом

$$R_{11}(r) = \pi a U (J_1(k_1a) Y_1(k_1r) - Y_1(k_1a) J_1(k_1r)), \quad R_{21}(r) = R_{21}^{(1)}(r) + R_{21}^{(2)}(r)$$

$$R_{21}^{(1)}(r) = \frac{1}{2}\pi a W(0) (J_1(k_1a) Y_0(k_1r) - Y_1(k_1a) J_0(k_1r))$$

$$R_{21}^{(2)}(r) = \frac{1}{2}\pi (\gamma + \omega a^2) (J_0(k_1a) Y_0(k_1r) - Y_0(k_1a) J_0(k_1r))$$

На границе с ядром ($r = b$)

$$\psi_1(b, \theta) = R_{21}^{(1)}(b) + R_{21}^{(2)}(b) + \lambda_1$$

Используя (2.6) и (2.7), получим

$$R_{21}^{(1)}(b) = -\frac{a}{b} \frac{J_1(k_1a)}{J_1(k_1b)} \lambda_1$$

$$\begin{aligned} \psi_1(b, \theta) = & \frac{1}{2}\pi (\gamma + \omega a^2) (J_0(k_1a) Y_0(k_1b) + \\ & + Y_0(k_1a) J_0(k_1b)) + \left(1 - \frac{a}{b} \frac{J_1(k_1a)}{J_1(k_1b)}\right) \lambda_1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$v_{\theta 1}(b, \theta) = -\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big|_{r=b} = -(R_{11}'(b) \sin \theta + R_{21}'(b))$$

$$R_{11}'(b) = 2U, \quad U = \frac{a J_1(k_1a)}{b J_1(k_1b)} U$$

$$R_{21}'(b) = \frac{\gamma + \omega a^2}{a} \frac{J_1(k_1b)}{J_1(k_1a)}$$

Так как в силу (2.6) $(R_{21}^{(1)}(b))' = 0$. Таким образом

$$v_{\theta 1}(b, \theta) = -2U_* \sin \theta + V_{\theta_*}, \quad v_{\theta_*} = -\frac{\gamma + \omega a^2 J_1(k_1 b)}{a J_1(k_1 a)} \quad (2.9)$$

Величины U_* и v_{θ_*} назовем приведенными скоростями поступательной и вращательной частей набегающего потока соответственно.

Соотношения (2.8) и (2.9) используем для «склейки» течений в оболочке и ядре. Условие отсутствия особенностей на оси симметрии диктует требование $b_{12} = b_{22} = 0$, так что в области ядра

$$\psi_2 = a_{12} J_1(k_2 r) \sin \theta + a_{22} J_0(k_2 r) + \lambda_2$$

$$v_{\theta 2} = -k_2 (a_{12} J_1'(k_2 r) \sin \theta - a_{22} J_1(k_2 r))$$

Условия непрерывности функций $\psi(r, \theta)$, $v_{\theta}(r, \theta)$ и $w(r, \theta)$ на границе между ядром и оболочкой приводят к выражениям

$$J_1(k_2 b) = 0, \quad v_{\theta_*} = 0, \quad a_{12} = \frac{2U_*}{k_2 J_1'(k_2 b)}$$

$$a_{22} J_0(k_2 b) + \lambda_2 = \left(1 - \frac{U_*}{U}\right) \lambda_1$$

Следуя Чаплыгину [1], положим $k_2 = j_{1,1}/b$, где $j_{1,1}$ — наименьший положительный нуль функции $J_1(z)$, при этом $J_1'(j_{1,1}) = J_0(j_{1,1})$. Из полученных соотношений следует, что

$$\gamma = -\omega a^2, \quad a_{12} = \frac{2bU_*}{j_{1,1} J_0(j_{1,1})}, \quad a_{22} = \frac{W(0)}{U} \frac{b\dot{U}_*}{j_{1,1} J_0(j_{1,1})}$$

$$\lambda_2 = \left[1 - \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) \frac{U_*}{U}\right] \lambda_1$$

Для удобства исследования течения внутри вихреобразования в выражениях для ψ_1 и ψ_2 отнесем полярный радиус к радиусу ядра b , сохранив за обезразмеренной величиной прежнее обозначение. Так что теперь на наружной границе вихря $r = \chi = a/b$ ($1 \leq \chi < \infty$), а на границе с ядром $r = 1$. В принятых обозначениях течение в вихре описывается следующими выражениями для функции тока:

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \pi a U [2 (J_1(z\chi) Y_1(z, r) - Y_1(z\chi) J_1(z, r))] \sin \theta + \frac{W(0)}{U} [(J_1(z\chi) Y_0(z, r) - Y_1(z\chi) J_0(z, r))] - \frac{bW(0)}{z_1} \quad (2.10)$$

$$(1 \leq r \leq \chi)$$

$$\psi_2 = \frac{bU_*}{j_{1,1} J_0(j_{1,1})} \left(2J_1(j_{1,1} r) \sin \theta + \frac{W(0)}{U} J_0(j_{1,1} r)\right) - \left[1 - \left(1 - \frac{z_1}{j_{1,1}}\right) \frac{U_*}{U}\right] \frac{bW(0)}{z_1} \quad (2.11)$$

$$(0 \leq r \leq 1)$$

$$U_* = \chi \frac{J_1(\chi z_1)}{J_1(z_1)} U = \chi \frac{Y_1(\chi z_1)}{Y_1(z_1)} U \quad (2.12)$$

$$\chi \rightarrow 1, \quad U_* \rightarrow U; \quad \chi \rightarrow \infty, \quad U_* \rightarrow J_0^{-1}(j_{1,1}), \quad U = -2,48U$$

Таблица 1

χ	z_1	U'	χ	z_1	U'	χ	z_1	U'
1,2	15,73	1,07	1,9	3,54	1,36	7,0	0,58	2,14
1,3	10,50	1,14	2,0	3,20	1,41	8,0	0,50	2,18
1,4	7,89	1,18	2,5	2,16	1,54	9,0	0,44	2,28
1,5	6,32	1,22	3,0	1,64	1,65	10,0	0,39	2,24
1,6	5,28	1,26	4,0	1,11	1,83	11,0	0,36	2,18
1,7	4,54	1,29	5,0	0,85	1,96	19,0	0,20	2,18
1,8	3,98	1,32	6,0	0,69	2,04	39,0	0,10	2,58
						∞	0,00	2,48

Таблица 2

s	$j_{1,s}$	χ	U'	$j'_{1,s}$	δ_1	δ_2	m
1	3,83	1,83	1,34	1,84	1,39	0,48	1,50
2	7,02	1,45	1,20	5,33	1,22	0,76	1,01
3	10,17	1,31	1,14	8,54	1,15	0,84	0,68
4	13,32	1,24	1,11	11,71	1,12	0,88	0,52

В этих выражениях $z_1 = k_1 b$ — первый корень уравнения

$$J_1(\chi z) Y_1(z) - Y_1(\chi z) J_1(z) = 0 \quad (2.13)$$

Значения корней уравнения (2.13) и соответствующей им приведенной скорости U для некоторых величин параметра χ представлены в табл. 1 (см. также фигуру), где $U' = |U_s|/U_1$.

В предельных случаях $b \rightarrow a$ и $b \rightarrow 0$ соотношения (2.10) и (2.11) переходят в выражения для функции тока несимметричного течения Чаплыгина (формула (7) в [1], где значение параметра λ надо положить равным $-W(0)a/j_{1,1}$).

Таким образом, несимметричное течение Чаплыгина возникает только в том случае, когда $W(0) \neq 0$. При этом становится ясным физический смысл параметра λ в решении Чаплыгина: он пропорционален радиусу вихреобразования и величине продольной скорости на поверхности последнего.

Выражение (2.10) принимает более простой вид, если z_1 совпадает с одним из нулей $j_{1,s}$ функции $J_1(z)$, а $\chi = j_{1,s+1}/j_{1,s}$. В этом случае

$$\psi_1 = -\pi a U Y_1(j_{1,s+1}) J_1(j_{1,s} r) \sin \theta - \frac{1}{2} \pi a W(0) Y_1(j_{1,s+1}) J_0(j_{1,s} r) - \frac{b W(0)}{j_{1,s}} \quad (2.14)$$

$$(1 \leq r \leq j_{1,s+1}/j_{1,s})$$

Соответствующие значения приведенной скорости U для первых четырех значений $j_{1,s}$ ($s = \overline{1,4}$) указаны в табл. 2.

Из соотношения

$$J_1(z) Y_0(z) - J_0(z) Y_1(z) = 2/(\pi z)$$

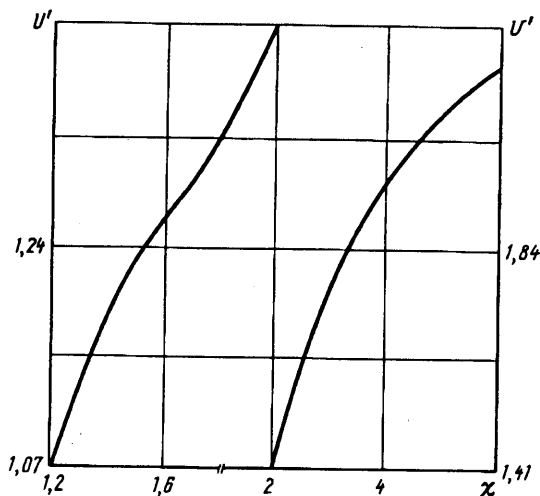
следует, что

$$-\pi Y_1(j_{1,s+1}) = 2 j_{1,s+1}^{-1} J_0^{-1}(j_{1,s+1})$$

С учетом этого (2.12) и (2.14) принимают соответственно вид

$$U_s = \frac{J_0(j_{1,s})}{J_0(j_{1,s+1})} U$$

$$\psi_1 = \frac{2Ub}{j_{1,s}} \frac{J_1(j_{1,s} r)}{J_0(j_{1,s+1})} \sin \theta + \frac{W(0)b}{j_{1,s}} \left(\frac{J_0(j_{1,s} r)}{J_0(j_{1,s+1})} - 1 \right) \quad (2.15)$$



При $s = 1$ правые части (2.11) и (2.15) совпадают, так что функция тока во всей внутренней области вихря ($0 \leq r \leq j_{1,2}/j_{1,1} = 1,83$) задается единым аналитическим выражением

$$\psi = \frac{2Ub}{j_{1,1}} \frac{J_1(j_{1,1}r)}{J_0(j_{1,2})} \sin \theta + \frac{W(0)b}{j_{1,1}} \left(\frac{J_0(j_{1,1}r)}{J_0(j_{1,2})} - 1 \right) \quad (2.16)$$

$$k_1 = k_2 = \frac{j_{1,1}}{b}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{j_{1,1}} W(0)$$

$$w = \frac{j_{1,1}}{b} \psi + W(0) = \frac{2U}{J_0(j_{1,2})} J_1(j_{1,1}r) \sin \theta + \frac{W(0)}{J_0(j_{1,2})} J_0(j_{1,1}r)$$

3. Исследование кинематики внутреннего течения. Ограничимся изучением течений, определяемых функциями тока (2.11), (2.15) и (2.16) в частном случае $W(0) = 0$. Как и в случае вихря Чаплыгина [1], внутри рассматриваемого вихреобразования возникают неподвижные вихревые нити, которым соответствуют максимальные по абсолютной величине значения функции тока, продольной и угловой скоростей. Положение этих нитей определяется условиями

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial r} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

из которых следует, что $\theta = \pm \pi/2$, а расстояния δ_i ($i = 1, 2$) от оси симметрии поперечного течения определяются нулями $j'_{1,k}/j_{1,s}$ функция $J'_1(j_{1,s}r)$. На эти нули накладываются ограничения, продиктованные требованиями $1 < \delta_1 < \chi = j_{1,s+1}/j_{1,s}$ и $0 < \delta_2 < 1$.

Так как [8]

$$1 < j_{1,s}' < j_{1,s} < j_{1,s+1}' < j_{1,s+1}$$

то

$$0 < j_{1,s}'/j_{1,s} < 1 < j_{1,s+1}'/j_{1,s} < j_{1,s+1}/j_{1,s} = \chi$$

$$\delta_1 = j_{1,s+1}'/j_{1,s}, \quad \delta_2 = j_{1,s}'/j_{1,s}$$

Соответствующие значения этих параметров для четырех значений χ представлены в табл. 2. С ростом χ явно прослеживается тенденция к сближению

неподвижных вихревых нитей и их смещению к границе раздела между оболочкой и ядром.

Максимальные по абсолютной величине продольные скорости определяются выражениями

$$|w_{i \max}| = k_i |\psi_i(\delta, \theta)| \quad (i = 1, 2)$$

При $s = 1$, например, их значения составляют

$$|w_{1 \max}| = 2U \left| \frac{J_1(j_{1,2}')}{J_0(j_{1,2})} \right| = 2,3U \quad \left(1 \leq r \leq \frac{j_{1,2}}{j_{1,1}} \right)$$

$$|w_{2 \max}| = 2U \left| \frac{J_1(j_{1,1}')}{J_0(j_{1,2})} \right| = 3,9U \quad (0 \leq r \leq 1)$$

С уменьшением относительной толщины оболочки продольные и угловые скорости в ядре имеют тенденцию к уменьшению по сравнению с теми же величинами в оболочке (табл. 2, где в последнем столбце $m = |w_{2 \max}|/|w_{1 \max}| = |w_{2 \max}|/|w_{1 \max}|$); ядро становится более «спокойным» (подобно «глазу» смерча) по сравнению с оболочкой.

Как и в случае вихря Чаплыгина [1], при $W(0) = 0$ максимальная скорость поперечного течения достигается в центре. В случае $s = 1$ она составляет $U/J_0(j_{1,2}) = 3,33U$, что в 1,34 раза больше соответствующей величины в чаплыгинском вихревом столбе. Подобно оси последнего ось рассматриваемого вихря тоже описывает окружность радиуса U/ω с угловой скоростью ω , в то время как сам вихрь вращается вокруг своей оси с той же угловой скоростью.

4. Обращенное движение, давление. Рассмотрим теперь вихрь, перемещающийся (вместе с жестко связанной с ним системой координат) со скоростью U в направлении, противоположном оси абсцисс, и равномерно вращающийся с угловой скоростью ω против часовой стрелки в неподвижной адали от него жидкости. Тогда (1.3) определяет относительное движение жидкости вне этого вихря, а (2.10) и (2.11) — внутри оболочки и ядра соответственно. В выражении (1.2) в этом случае следует положить [9]

$$\Pi = - \left(\omega U y - 2\omega\psi + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right)$$

Часть этого потенциала обусловлена кориолисовой силой инерции, часть — центробежными силами.

Во внешнем потоке $\Omega = -2\omega$ и, следовательно, выражение для внешнего давления имеет вид

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v_r^2 + v_\theta^2 - \omega^2 r^2}{2} - \omega U y = \text{const} \quad (4.1)$$

Подставив сюда квадрат скорости, вычисленной с помощью (1.3), получим

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (\omega^2 a^2 - 2U^2 \cos 2\theta) \frac{a^2}{r^2} - \omega U \frac{a^4}{r^3} \sin \theta + \frac{1}{2} U^2 \frac{a^4}{r^4} = \frac{p_\infty}{\rho} \quad (4.2)$$

где p_∞ — давление на бесконечности.

Аналогично с помощью (1.2) и (2.1) находим, что в оболочке и ядре

$$\frac{p_i}{\rho} + \frac{v_r^2 + v_\theta^2 - \omega^2 r^2}{2} - \omega U y + 2\omega\psi_i + \frac{1}{2} k_i^2 (\psi_i^2 - 2\lambda_i \psi_i) = \text{const} \quad (4.3)$$

В силу непрерывности скоростей и функций тока на границах вихреобразования из сравнения (4.1) с (4.3) при $i = 1$ и (4.3) при $i = 1, 2$ заключаем, что давления также непрерывны.

Обратимся к вихреобразованию с функцией тока (2.16) в частном случае $W(0) = \omega = 0$. Поскольку давление убывает в направлении ускорения частиц

жидкости, то его минимум приходится на неподвижные вихревые нити, причем глобальный минимум достигается в неподвижных вихревых шнурах ядра и составляет

$$p_{\min} = p_{\infty} - \left(4 \left(\frac{J_1(j_{1,1}')}{J_0(j_{1,2})} \right)^2 - 1 \right) \frac{\rho U^2}{2} = p_{\infty} - 7\rho U^2$$

Чтобы вихрь не коллапсировал, его скорость U не должна превышать $0,378\sqrt{p_{\infty}/\rho}$, что в 1,38 раза меньше предельной скорости вихря Чаплыгина [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С. А. Один случай вихревого движения жидкости//Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. С. 155—165.
2. Ярмицкий А. Г. Об одном пространственном аналоге вихревого столба Чаплыгина (обобщенный вихрь Хилла)//ПМТФ. 1974. № 5. С. 137—141.
3. Ярмицкий А. Г. Об одном классе осесимметричных неустановившихся течений вязкой несжимаемой жидкости//ПМТФ. 1978. № 2. С. 59—66.
4. Слезкин Н. А. О движении вихревого кольцевого цилиндра//Мех. соврем. пробл. М., 1987. С. 34—40.
5. Васильев О. Ф. Основы механики винтозых и циркуляционных потоков. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958. 144 с.
6. Ватсон Дж. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 799 с.
7. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
8. Справочник по специальным функциям/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
9. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.

Мариуполь

Поступила в редакцию
9.IX. 1991