МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1992

УДК 532.51:534.1

© 1992 г. Ф. М. БОРОДИЧ

ВОЛНОВОЙ ФРОНТ В ЗАДАЧЕ О ПОГРУЖЕНИИ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА В СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

В линейной постановке рассматривается погружение с неположительным ускорением затупленного пространственного выпуклого тела в сжимаемую жидкость. Показано, что в любой момент времени область возмущения будет выпуклой. В каждой точке волнового фронта вычисляются скорость частиц жидкости и давление. Волновой фронт в любой момент времени целиком определяется начальной сверхзвуковой стадией распространения границы области взаимодействия между телом и жидкостью.

Изучение волновых фронтов, возникающих при погружении затупленных тел в сжимаемую жидкость, проводилось в основном в случае автомодельности задач [1]. Волновые фронты исследовались и в других близких проблемах: удара капли жидкости о твердую поверхность [2], распространения давления по поверхности сжимаемой жидкости и изотропной упругой среды [3, 4]. Однако исследование формы волновых фронтов, скачков скорости частиц и давления в точках фронта проводилось только в осесимметричных задачах. В настоящей работе изучение пространственных задач проводится с помощью аппарата теории выпуклых множеств [5, 6], в терминах которой результаты записываются в компактном виде. Развитый в работе подход можно распространить и на указанные близкие задачи, и на задачи для других изотропных сред.

1. В постановке работы [7] рассматривается вертикальное погружение с положительной скоростью $V(t)$ затупленного жесткого тела в невесомую, первоначально покоящуюся сжимаемую жидкость, занимающую полупространство $x_3 \geq 0$. Начало декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 совпадает с точкой контакта тела со средой в момент времени $t = 0$. Ось x_3 направлена в глубь среды. Граничные условия сносятся на плоскость $x_3 = 0$.

Рассмотрим в момент T множество точек в $R_+^3 \times [0, T]$, до которых дошло возмущение, вызванное погружением тела. Сечение этого множества гиперплоскостью $t = t_0$ назовем областью возмущения $\Omega(t_0)$, а граничную поверхность для $\Omega(t_0)$ — волновым фронтом $S(t_0)$. Волновой фронт распространяется в R_+^3 со скоростью a звука в среде (скорость измеряется по нормали к фронту). На $S(t_0)$ выполнены условия правильного сильного разрыва [7].

Ниже изучается форма фронта волны, а также скорости частиц и давления в точках фронта.

Пусть $N(h)$ — область на плоскости $x_3 = 0$, являющаяся проекцией сечения погружающегося тела N на высоте h; τ — время опускания тела на глубину h, т. е. h и τ связаны зависимостью

$$h = \int_0^\tau V(t)\, dt \tag{1.1}$$

Обозначим через $N(h, t)$ объединение полушаров с радиусами $a[t - \tau(h)]$ и центрами в точках области $N(h)$.

Из принципа Гюйгенса следует, что при погружении произвольного тела с неотрицательной скоростью область возмущения определяется по формуле

$$\Omega(t) = \bigcup_{0 \leq h \leq h(t)} N(h, t) \tag{1.2}$$

Из (1.2) получим, что, если два тела N_1 и N_2 погружаются с одинаковой скоростью и $\Omega^i(t)$ — область возмущения, соответствующая телу N_i $(i = 1, 2)$, то при $N_1 \subset N_2$ будет выполнено $\Omega^1(t) \subseteq \Omega^2(t)$.

Пусть при погружении тела выполнены следующие условия:

$$V(t) > 0, \quad \dot{V}(t) \leq 0 \tag{1.3}$$

Очевидно, что если тело N строго выпукло, то при выполнении (1.3) множество $N(h, t)$ будет следующей суммой в смысле Минковского [6]:

$$N(h, t) = N(h) + B_+ \left\{a\left[t - \tau(h)\right]\right\} \tag{1.4}$$

где $B_+\{R\}$ — полушар в R_+^3 радиуса R с центром в начале координат. Исследуем множество $\Omega(t)$ с помощью аппарата опорных функций [5, 6].

Пусть $\vec{\xi}$ — некоторый вектор, задающий направление в R_+^3 $(|\vec{\xi}| \neq 0)$. Тогда опорной функцией F тела M называется функция

$$F(\vec{\xi}) = \max_{x \in M} \langle \vec{\xi}, x \rangle \tag{1.5}$$

Здесь и далее угловые скобки означают скалярное произведение.

Очевидно, что $F(\lambda\vec{\xi}) = \lambda F(\vec{\xi}), \lambda > 0$. Поэтому в качестве векторов $\vec{\xi}$, задающих направление, можно брать радиус-векторы точек единичной полусферы в R_+^3 с центром в начале координат. В этом случае $F(\vec{\xi})$ есть расстояние от начала координат до опорной плоскости (нормаль к которой коллинеарна ξ) к выпуклой оболочке тела M.

Из определения (1.5) и теоремы об отделимости [6] следует, что точка x лежит в выпуклом теле M, если и только если для любого ξ, $F(\vec{\xi}) \geq \langle \vec{\xi}, x \rangle$.

Рассмотрим связное множество I на прямой λ. Пусть для любого λ из I задано выпуклое тело $M(\lambda)$ и пусть $F(\vec{\xi}, \lambda)$ — опорная функция тела $M(\lambda)$. Обозначим через $\lambda_0(\vec{\xi})$ значение параметра λ такое, что при фиксированном ξ выполнено $F[\vec{\xi}, \lambda_0(\vec{\xi})] = \max\limits_{\lambda} F(\vec{\xi}, \lambda)$ и пусть $\lambda^* = \max\limits_{\xi} [\lambda_0(\xi)]$.

Легко показать, что если $F(\xi, \lambda)$ вогнута как функция λ при любом фиксированном ξ, то: 1) тело $M = \bigcup\limits_{\lambda \in I} M(\lambda)$ выпукло; 2) $F(\xi) = \max\limits_{\lambda \in I} F(\xi, \lambda)$; 3) $M = \bigcup\limits_{\lambda \in I, \lambda \leq \lambda^*} M(\lambda)$.

Обозначим, через $F(\xi, h)$ и $\Phi(\xi, t)$ опорные функции множеств $N(h)$ и $\Omega(t)$ соответственно. Пусть $\pi\xi$ — проекция вектора ξ на плоскость $x_3 = 0$. Легко видеть, что $F(\xi, h) = F(\pi\xi, h)$.

Лемма 1. Множество $N(h, t)$ — выпукло.

Действительно, B_+ и $N(h)$ — выпуклые множества (B_+ — по определению, $N(h)$ — как сечение выпуклого тела), а сумма в смысле Минковского выпуклых множеств — выпукла [6].

Лемма 2. Опорная функция Ψ множества $N(h, t)$ имеет вид

$$\Psi(\xi, h, t) = F(\pi\xi, h) + a\left[t - \tau(h)\right] |\xi| \tag{1.6}$$

Действительно, опорная функция сферы радиуса R с центром в начале координат равна $R|\xi|$. Из (1.4) с учетом того, что при сложении множеств по Минковскому их опорные функции складываются [6], получаем (1.6).

Обозначим через y радиус-вектор какой-либо точки плоскости $x_3 = 0$.

Лемма 3. Пусть $y_1 \in N(h_1)$, $y_2 \in N(h_2)$. Тогда точка $y(\eta)$: $y(\eta) = y_1(1 - \eta) + y_2\eta$, $0 \leq \eta \leq 1$, лежит в области $N[h(\eta)]$, где $h(\eta) = h_1(1 - \eta) + h_2\eta$.

Доказательство. Из определения области $N(h)$ следует, что точки $x_1 = \{y_1, h_1\}$ и $x_2 = \{y_2, h_2\}$ лежат в теле N. Тело N — выпукло, поэтому точки $x(\eta) = x_1(1 - \eta) + x_2\eta$ также лежат в N. Но $x(\eta) = \{y(\eta), h(\eta)\}$, т. е. точка $y(\eta)$ лежит в проекции сечения тела N на высоте $h(\eta)$.

Лемма 4. При фиксированном $\vec{\xi}$ функция $F(\pi\vec{\xi}, h)$ вогнута по h.

Доказательство. Пусть для вектора $\vec{\xi}$ точки y_i такие, что $F(\pi\vec{\xi}, h_i) = \langle\vec{\xi}, y_i\rangle$, $i=1, 2$. Тогда из леммы 3 следует, что $y(\eta)\in N[h(\eta)]$, а из (1.5) получаем

$$F\,[\pi\xi, h\,(\eta)\,] \geq \langle\pi\xi, y\,(\eta)\,\rangle = (1-\eta)\,F\,(\pi\xi, h_1) + \eta F\,(\pi\xi, h_2)\,, \quad \in \eta \in [0, 1\,]$$

т. е. график функции $F[\pi\xi, h(\eta)]$ лежит над графиком любой своей хорды.

Лемма 5. При фиксированном $\vec{\xi}$ функция $a[t-\tau(h)]|\xi|$ вогнута по h.

Действительно, сама функция положительная; первая производная по h от нее равна $-a|\xi|/v(h)$, где $v(h)\equiv V[\tau(h)]$. Вторая производная, равная $a|\xi|\dot{V}[\tau(h)]/v^3(h)$, неположительная в силу условия (1.3).

Теорема 1. При выполнении условия (1.3) погружения выпуклого тела: 1) область возмущения $\Omega(t)$ в любой момент времени выпукла; 2) опорная функция области $\Omega(t)$ определяется по формуле

$$\Phi\,(\xi, t) = \max_{0\leq h\leq h(t)} \Psi\,(\xi, h, t) \tag{1.7}$$

Доказательство. В силу леммы 1 тело $N(h, t)$ — выпукло. При фиксированном ξ функции $F(\pi\vec{\xi}, h)$ и $a[t-\tau(h)]|\vec{\xi}|$ вогнуты по h в силу лемм 4 и 5. Отсюда и из леммы 2 следует, что $\Psi(\vec{\xi}, h, t)$ вогнута по h. Тогда выполнены условия утверждения, сформулированного выше для объединения набора выпуклых тел $M(\lambda)$, в котором роль параметра λ играет h, а $I\equiv(0, h(t)\,]$. Из этого утверждения и (1.2) следует, что область $\Omega(t)$ — выпукла, а её опорная функция определяется по формуле (1.7).

Функция $\Psi(\xi, h, t)$ вогнута по h, поэтому при фиксированном $\vec{\xi}$ она достигает максимума либо на границе рассматриваемого интервала, т. е. при $h=h(t)$, либо в некоторой точке $h_0(\xi)$, которая с учетом (1.7) находится из уравнения

$$\frac{\partial\Psi\,[\vec{\xi}, h_0\,(\xi)\,, t\,]}{\partial h} = 0 \tag{1.8}$$

Функцию $h_0(\vec{\xi})$ в ряде случаев можно вычислить явно. Пусть, например, поверхность тела задана функцией $x_3 = -f(x_1, x_2)$, где f — однородная функция степени d, а скорость проникания постоянна и равна V_0. Тогда для $N(h)$ опорная функция имеет вид

$$F\,(\pi\xi, h) = h^{1/d}F\,(\pi\vec{\xi}, 1)\,, \quad d>1$$

Отсюда

$$h_0\,(\xi) = \left[\frac{a\,|\vec{\xi}|\,d}{V_0F\,(\pi\vec{\xi}, 1)}\right]^{d/(1-d)} \tag{1.9}$$

Обозначим через $K(t)$ конус, образованный векторами $\vec{\xi}$, для которых $h(t) > h_0(\vec{\xi})$. Этот конус образован векторами $\vec{\xi}$, коллинеарными с внешними нормалями к опорным плоскостям волнового фронта $S(t)$. Тогда из (1.6) и (1.7) получим

$$\Phi\,(\xi, t) = \begin{cases} F\,[\pi\xi, h_0\,(\xi)\,] + a\,|\xi|\,\,[t-\tau\,(h_0\,(\xi))\,], & \xi\in K\,(t) \\ F\,[\pi\xi, h\,(t)\,], & \xi \,\overline{\in}\, K\,(t) \end{cases} \tag{1.10}$$

Лемма 6. При выполнении условия погружения (1.3) скорость α_0 движения границы области $N(h)$ (в точке такой, что внешняя нормаль к её границе коллинеарна с заданным вектором $\vec{\eta}$, лежащим в плоскости $x_3=0$) определяется равенством

$$\alpha_0\,(\eta, t) = \frac{\partial F\,(\eta, h)}{\partial h}\,\frac{v\,[h\,(t)\,]}{|\eta|} \tag{1.11}$$

С ростом h скорость α_0 монотонно убывает.

Действительно, из определения $N(h)$ следует, что $\alpha_0(\vec{\eta}, t) = \partial F(\vec{\eta}, h)/\partial t$. Отсюда следует (1.11).

Из (1.11), (1.3) и леммы 4 при фиксированном η получаем $\partial\alpha_0/\partial h < 0$.

Отметим, что из условия затупленности погружающегося тела следует, что $\alpha_0(\vec{\eta}, t) \to \infty$ при фиксированном $\vec{\eta}$ и при $t \to 0+$.

Пусть T^* — первый момент времени такой, что при любом η выполнено $\alpha_0(\vec{\eta}, T^*) < a$.

При выполнении условия погружения (1.3) уравнение (1.8) при любом $\vec{\xi}$ имеет решение и единственное. При этом выполнено неравенство $0 < h_0(\xi) < H^*$, $\tau(H^*) \equiv T^*$.

Действительно, после дифференцирования (1.6) по h и учета (1.1), уравнение (1.8) преобразуется к виду

$$v\,[h_0(\xi)\,]\,\frac{\partial}{\partial h} F\,[\pi\xi, h_0(\xi)\,] = a\,|\xi| \tag{1.12}$$

Легко видеть, что левая часть в (1.12) при $h \to 0+$ стремится к бесконечности. С другой стороны, из леммы 6 следует, что левая часть в (1.12) монотонно убывает, а так как $|\pi\xi| \le |\xi|$, с учетом (1.11), получаем

$$v\,(H^*)\,\frac{\partial}{\partial h} F\,(\pi\vec{\xi}, H^*) \le \alpha_0\,[\pi\vec{\xi}, \tau\,(H^*)\,]\,|\vec{\xi}| < a\,|\xi|$$

т. е. существует корень уравнения (1.12), лежащий в интервале $(0, H^*)$. В силу монотонности левой части (1.12) корень единствен.

По опорной функции $\Phi(\vec{\xi}, t)$ можно восстановить фронт $S(t)$. Более удобно это сделать с помощью вспомогательной функции Φ_*, определенной по формуле

$$\Phi_*\,(\xi, t) = F\,[\pi\vec{\xi}, h_0(\xi)\,] + a\,|\vec{\xi}|\,\,[t - \tau\,(h_0\,(\vec{\xi}))] \tag{1.13}$$

Лемма 7. Пусть e_3 — орт вдоль оси x_3. Тогда

$$\langle \mathrm{grad}_\xi \Phi_*\,(\vec{\xi}, t), e_3\rangle > 0 \Leftrightarrow \vec{\xi} \in K\,(t)$$

Доказательство. В силу (1.12) имеем

$$\langle \mathrm{grad}_\xi \Phi_*\,(\xi, t)\,, e_3\rangle = \frac{a\vec{\xi}_3}{|\vec{\xi}|}\,[t - \tau\,(h_0\,(\xi)\,)\,] \tag{1.14}$$

Из определения $K(t)$ и (1.1) имеем

$$\tau\,(h_0\,(\xi)\,) < t \Leftrightarrow \xi \in K\,(t)$$

Отсюда и из (1.14) следует лемма 7.

Теорема 2. При выполнении условия (1.3) имеем

$$\mathrm{x} \in S\,(t) \Leftrightarrow (\mathrm{x} = \mathrm{grad}_\xi\,\Phi_*\,(\xi, t)\,, \mathrm{x} \in R^3_+) \tag{1.15}$$

При этом вектор внешней нормали к волновому фронту в точке x коллинеарен с вектором $\vec{\xi}$.

Доказательство. Пусть $\xi \in K\,(t)$. Тогда (1.15) следует из теоремы об опорной функции строго выпуклого тела [5].

Пусть $\vec{\xi} \,\bar{\in}\, K(t)$. Тогда из леммы 7 следует, что вектор $\mathrm{grad}_\xi\Phi_*(\vec{\xi}, t)$ лежит R^3_-, т. е. на волновом фронте $S(t)$ нет точек с нормалью коллинеарной вектору $\vec{\xi}$.

Покажем, что с течением времени форма волнового фронта становится все более сферической, а именно область возмущения $\Omega(t)$, $t > T^*$ есть сумма в смысле Минковского

$$\Omega\,(t) = \Omega\,(T^*) + B_+\left\{a\,(t - T^*)\,\right\} \tag{1.16}$$

Действительно, из определения T^* следует, что любой вектор $\vec{\xi}$ лежит в конусе $K(T^*)$. Из (1.10) следует, что в конусе $K(T^*)$ справедливо равенство

$$\Phi\,(\xi, t_2) = \Phi\,(\xi, t_1) + a\,|\xi|\,(t_2 - t_1)\,, \quad t_2 > t_1 \ge T^*$$

В частности, имеем

$$\Phi(\vec{\xi}, t) = \Phi(\vec{\xi}, T^*) + a\,|\vec{\xi}|(t - T^*)\,,\quad t > T^*$$

Отсюда следует (1.16). Из выражения (1.16) видно, что $\Omega(t)$ есть сумма в смысле Минковского постоянного ограниченного множества $\Omega(T^*)$ и полусферы, радиус которой увеличивается с ростом t.

2. Пусть в момент времени t задан вектор направления $\vec{\xi}$. Из теоремы 2 следует, что если $\tau[h_0(\vec{\xi})] < t$, то существует точка x на фронте $S(t)$ с внешней нормалью коллинеарной $\vec{\xi}$ и $\mathrm{x} = \mathrm{grad}_\xi \Phi_*(\vec{\xi}, t)$. Определим скорость среды и давление в этой точке.

Точки $\mathrm{x}(\vec{\xi}, t)$ на фронте $S(t)$ с нормалью, коллинеарной вектору $\vec{\xi}$, при изменении t пробегают луч. Обозначим через $A(t_2, t_1)$ коэффициент расхождения волнового фронта при переходе между точками $\mathrm{x}(\xi, t_1)$ и $\mathrm{x}(\xi, t_2)$

$$A(t_2, t_1) = \sqrt{\frac{R_1(t_1)\,R_2(t_1)}{R_1(t_2)\,R_2(t_2)}}\,,\quad R_i(t_2) = R_i(t_1) + a(t_2 - t_1)\,,\quad i = 1, 2 \tag{2.1}$$

где $R_1(t_i)$ и $R_2(t_i)$ — главные радиусы кривизны поверхности фронта $S(t_i)$ в точке $\mathrm{x}(\vec{\xi}, t_i)$.

Пусть $G(\vec{\xi})$ — произвольная, дважды дифференцируемая, однородная функция от $\vec{\xi}$. Обозначим через $R_1R_2\{G\}$ следующее выражение:

$$R_1R_2\{G\} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_{22} & G_{23} \\ G_{23} & G_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_{33} & G_{31} \\ G_{31} & G_{11} \end{vmatrix},\quad G_{ij} \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_i\,\partial \xi_j} \tag{2.2}$$

Лемма 8. Пусть ξ единичный вектор направления и $\tau[h_0(\xi)] < t$.

Тогда в рассматриваемой задаче коэффициент расхождения имеет вид

$$A\,[t, \tau(h_0(\xi))\,] = \sqrt{\frac{R_1R_2\left\{\Phi_*\,[\xi, \tau(h_0(\xi))\,]\right\}}{R_1R_2\left\{\Phi_*\,(\xi, t)\right\}}} \tag{2.3}$$

Доказательство. Из условий следует, что $\xi \in K[\tau(h_0(\xi))] \subset K(t)$. Поэтому из (1.10) и (1.13) получаем, что $\Phi \equiv \Phi_*$. Из свойств опорных функций следует, что выражение (2.2) является произведением главных радиусов кривизны поверхности выпуклого множества [5]. Подставив (2.2) в (3.1), получим (2.3).

Теорема 3. Вектор скорости и давление в точке $\mathrm{x}(\xi, t) \in S(t)$ определяются выражениями

$$\mathrm{v}(\mathrm{x}, t) = v(h_0(\xi))\,A\left\{t, \tau(h_0(\xi))\right\}\frac{\xi}{\xi_3} \tag{2.4}$$

$$p(\mathrm{x}, t) = \rho a v(h_0(\xi))\,A\left\{t, \tau(h_0(\xi))\right\}\frac{|\xi|}{|\xi_3|}$$

Доказательство. Скачок вектора скорости направлен по нормали ξ к поверхности сильного разрыва, а его величина пропорциональна скачку давления [8]. Будем обозначать квадратными скобками скачок заключенной в них величины при переходе через волновой фронт. Тогда имеем

$$|[\mathrm{v}]| = [p]/(\rho a) \tag{2.5}$$

Как показано в [7], скачок вектора скорости в точках фронта y, лежащих на поверхности $x_3 = 0$, имеет вид

$$|[\mathrm{v}(\mathrm{y}, \tau(h_0(\xi)))\,]| = v(h_0(\xi))\,|\xi|/\xi_3 \tag{2.6}$$

Из известного соотношения [8, 9] об изменении скачка скорости на волновом фронте в сжимаемой жидкости в точках $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(\xi, t_i)$ имеем

$$|[\mathbf{v}(\mathbf{x}_2, t_2)]| = |[\mathbf{v}(\mathbf{x}_1, t_1)]| A(t_2, t_1) \tag{2.7}$$

Так как среда в начальный момент покоится, то скачок величины скорости на волновом фронте равен самому значению скорости. Отсюда с учетом (2.7), (2.6) получаем первую из формул (2.4), из которой с учетом (2.5) следует вторая. Величина $A\{t, \tau(h_0(\xi))\}$ определяется через опорную функцию фронта с помощью леммы 8.

3. Изложенные выше результаты получены в предположении, что тело N выпукло. Однако они без всякого изменения переносятся на более общий случай, описанный ниже.

По-прежнему будем считать, что тело затуплено, а его ускорение неположительно. Обозначим через H^* глубину, при погружении на которую скорость движения линии пересечения границы тела с плоскостью $x_3 = 0$ в любой точке меньше, чем скорость звука в жидкости a (как всегда, эта скорость вычисляется по нормали к линии).

Предположим, что часть поверхности тела, лежащая ниже высоты H^*, является строго выпуклой и все точки этой части поверхности лежат на границе выпуклой оболочки тела (это условие не ограничительно: в окрестности точки минимума гладкая функция всегда выпукла).

Результаты переносятся на этот более общий случай. Действительно, поскольку $h_0(\xi) < H^*$, то это следует из (1.8), (1.7), (1.6) и (1.2). При этом форма фронта образовавшейся волны полностью определяется частью поверхности тела лежащей на высоте, меньшей H^*, и его скоростью $v(h)$ на начальной стадии погружения $(h < H^*)$.

Рассмотрим частный случай, когда тело, поверхность которого задана однородной функцией степени $d > 1$, с постоянной скоростью V_0 погружается в сжимаемую жидкость. Тогда с учетом (1.9) получим

$$\Phi_*(\xi, t) = \frac{d-1}{d}\left(\frac{a|\xi|d}{V_0}\right)^{1/(1-d)} F^{d/(d-1)}(\pi\xi, 1) + at|\xi| \tag{3.1}$$

В рассматриваемой задаче для заданного ξ на волновом фронте существует точка с внешней нормалью, коллинеарной с ξ, начиная с момента $t_1(\xi)$, где

$$t_1(\xi) = \frac{1}{V_0}\left\{\frac{ad|\xi|}{V_0 F(\pi\xi, 1)}\right\}^{d/(1-d)} \tag{3.2}$$

Эта точка определяется из уравнения

$\mathbf{x}(\xi, t) = \mathrm{grad}_\xi\, \Phi_*(\xi, t), \quad t > t_1(\xi)$

а скорость и давление в этой точке определяются равенством (2.4), в котором

$$A\{t, \tau(h_0(\xi))\} = \sqrt{\frac{R_1R_2\{\Phi_*(\xi, t_1(\xi))\}}{R_1R_2\{\Phi_*(\xi, t)\}}}$$

Пример. Тело является эллиптическим параболоидом, т. е. $f = x_1^2/B_1^2 + x_2^2/B_2^2$, $B_1 > B_2$. Тогда точки $\mathbf{y} \in N(h)$ лежат в эллипсе с полуосями $B_1\sqrt{h}$ и $B_2\sqrt{h}$. Отсюда получаем опорную функцию $F(\xi, 1)$ [6]

$F(\pi\xi, 1) = \sqrt{B_1^2\xi_1^2 + B_2^2\xi_2^2}$

Из (3.1) и (3.2) следует

$$\Phi_*(\xi, t) = \frac{\vec{v}_0}{4a|\xi|}(B_1^2\xi_1^2 + B_2^2\xi_2^2) + at|\xi|$$

$$t_1(\xi) = V_0(B_1^2\xi_1^2 + B_2^2\xi_2^2)/(4a^2)$$

При $t > t_1(\xi)$ существует единственная точка на фронте $\mathbf{x}(\xi, t)$ с внешней нормалью, коллинеарной заданному единичному вектору направления ξ

$$\mathbf{x}(\vec{\xi}, t) = \mathrm{grad}_{\xi} \frac{V_0 (B_1^2\xi_1^2 + B_2^2\xi_2^2)}{4a|\vec{\xi}|} + at\vec{\xi}$$

Скорость и давление на фронте в этой точке $\mathbf{x}(\vec{\xi}, t)$ вычисляются по формулам

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = V_0 A \left\{t, t_1(\xi)\right\} \frac{\xi}{\xi_3}, \quad p(\mathbf{x}, t) = \rho a \,|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|.$$

Таким образом, задача решена в элементарных функциях.

Автор благодарит А. Г. Хованского за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 298 с.
2. *Lesser M. B.* Analytic solutions of liquid-drop impact problems//Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1981. V. 377. № 1770. P. 286—308.
3. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1961. 276 с.
4. *Сагомонян А. Я.* Волны напряжения в сплошных средах. М.: Изд-во МГУ, 1985. 416 с.
5. *Буземан Г.* Выпуклые поверхности. М.: Наука, 1964. 238 с.
6. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.
7. *Бородич Ф. М.* О задачах взаимодействия затупленных тел с акустической средой//ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 610—616.
8. *Фридлендер Ф.* Звуковые импульсы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 232 с.
9. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

Москва

Поступила в редакцию 17.IV.1991