

УДК 532.525.6:533.6.011

© 1992 г. Е. И. СОКОЛОВ

РАЗРУШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ В УДАРНОМ СЛОЕ, ОБРАЗУЮЩЕМСЯ ПРИ НАТЕКАНИИ СВЕРХЗВУКОВОЙ НЕДОРАСШИРЕННОЙ СТРУИ НА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНУЮ ПЛОСКУЮ ПРЕГРАДУ

При натекании недорасширенной струи на преграду наблюдаются два устойчивых режима течения — стационарный и автоколебательный нестационарный, часто по традиции называемый «неустойчивым» [1]. Природа последнего недостаточно ясна, свидетельство чему — наличие нескольких гипотез о механизме этого явления [2, 3 и др.]. Отсутствуют и убедительные объяснения причин, по которым стационарное течение перед преградой при плавном изменении того или иного параметра внезапно перестраивается в автоколебательное.

Ниже вопрос о причине разрушения стационарного течения идеального газа исследуется с позиций анализа развития во времени малых возмущений в приосевой области ударного слоя за центральным скачком, образуемым при торможении сверхзвуковой недорасширенной осесимметричной струи у перпендикулярной поверхности. Данный подход вытекает из результатов работ [4, 5]. В [4], где исследовалось стационарное течение в околоосевой области, показано, что оно полностью определяется относительной толщиной ударного слоя $D = \delta_0/h$ (фиг. 1). Линейное нестационарное решение для малых смещений скачка [5] показало, что параметр D определяет и начальную стадию эволюции течения во времени. Ниже этот процесс исследуется в нелинейной постановке.

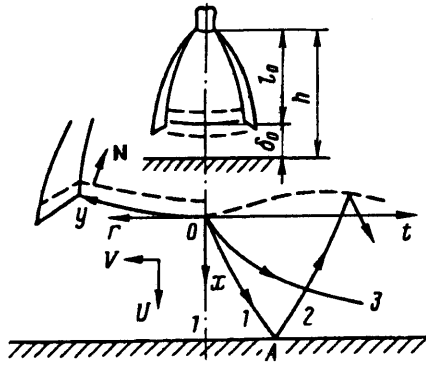
1. Уравнения, описывающие нестационарное приосевое течение, получены подстановкой в уравнения Эйлера, записанные в цилиндрических координатах x, r (фиг. 1), усеченных рядов

$$\begin{aligned} U(x, r, t) &= u_1(x, t) + O(r^2), \quad V(x, r, t) = v_1(x, t) + O(r^2) \\ R(x, r, t) &= \rho_1(x, t) + O(r^2), \quad P(x, r, t) = p_1(x, t) + p_2(x, t)r^2 + O(r^4) \\ N(y, t) &= N_1(t) + N_2(t)y^2 + O(y^4) = N_1[1 + g(t)y^2 + \dots] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь N — скорость фронта ударной волны, P — плотность, остальные обозначения общеприняты. Величины U, V, N и P отнесены к их значениям на оси за неподвижной ударной волной при $t = 0$, линейные размеры отнесены к δ_0 . Полученная система (индекс l далее опущен) содержит кроме первых слагаемых (1.1) внепорядковый член p_2 , который становится определяющим при $x \sim 1$ [6]

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x + 2\rho v &= 0, \quad u_t + uu_x - \rho^{-1}p_x = 0 \\ v_t + uv_x + v^2 + 2\rho\rho^{-1} &= 0, \quad (p_2)_x = 0 \\ \rho_t - a^2\rho_x - u(p_x - a^2p_t) &= 0, \quad a^2 = \gamma\rho\rho^{-1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Нижний индекс обозначает дифференцирование по соответствующей пе-



Фиг. 1

ременной. Система (1.2) t -гиперболична и имеет три семейства действительных характеристик (кривые 1—3 на фиг. 1)

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a, \quad du \pm \frac{a}{\gamma} d \ln p = \mp 2av dt$$

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad dv = - (v^2 + 2p\rho^{-1}) dt, \quad p\rho^{-1} = \text{const} \quad (1.3)$$

Граничные условия на движущемся центральном скачке получены из условий Рэнкина — Гюгонно, упрощенных в силу гиперзвукового характера течения в струе на достаточном удалении от сопла (соотношения (4) в [5]), при подстановке в них разложений (1.1) и приравнении членов с одинаковыми степенями r

$$u_s = N_1(t) + E(t), \quad v_s = E\varepsilon^{-1}z(t), \quad \rho_s = S(t) \quad (1.4)$$

$$p_s = \varepsilon_1 S^2 E, \quad p_{zs} = -p_s [0,5\varepsilon(1 + \varepsilon N_1) M^{-1} M_{yy} + z + \varepsilon N_{yy}] + K(t) p_{xs}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}, \quad E(t) = 1 - \varepsilon N_1, \quad S(t) = (1 + s_1)^{-1}, \quad s_1 = D_1 s$$

$$D_1 = D(1 - D)^{-1}, \quad D = \frac{\delta_0}{h}, \quad S = \int_0^t N_1 dt, \quad z(t) = \Theta_r - K(t)$$

$$N_{yy} = -2gN_1, \quad p_{xs} = \frac{2uv - 2u\gamma^{-1}D_1 S \varepsilon N_1 (1 + 2\gamma^{-1}uE^{-1}) dN/dt}{1 - (u/a)^2} \Big|_s$$

Здесь M — число Маха, Θ — угол наклона вектора скорости к оси струи.

Формулы (1.4) представляют собой условия Рэнкина — Гюгонно, справедливые в окрестности оси с точностью до членов порядка $O(r^2)$ на ударной волне, движущейся в неравномерном струйном потоке. Для вычисления производных от M и Θ перед центральным скачком в свободной струе при $y=0$ использованы результаты [4]

$$\Theta_r = D_1 S, \quad M^{-1} M_{yy} = 2\varepsilon_1^{-1} D_1 S (z + D_1 S)$$

Кривизна скачка на оси $K(t)$ и скорость его фронта связаны кинематическим соотношением

$$K(t) = K_0 (1 + K_0 s)^{-1} - (1 + K_0 s)^{-2} \int_0^t N_{yy}(0, t) dt \quad (1.5)$$

Граничные условия (1.4), (1.5) содержат неизвестную функцию времени $K(t)$, для задания которой должны привлекаться дополнительные соображения, обусловленные характером течения в целом. Как известно, такая особенность является общей для задач околоосевого приближения, в которых недостающее условие

должно отражать интегральное влияние периферийного течения на присоевое. Для стационарных задач проблема замыкания околоосевого решения подробно проанализирована в [6]. В [7] в постановке, сходной с излагаемой, решалась задача обтекания сферы. Расчет установления околоосевого течения проводился в ней в приближении $K(t) = \text{const}$. Очевидно, такое предположение неприемлемо для рассматриваемой задачи, так как даже стационарное решение [4] дает непосредственную зависимость $K_0(D)$.

Как отмечалось выше, наряду со стационарным другим предельным состоянием ударного слоя в результате его эволюции является автоколебательный режим течения. Используем информацию о названных выше предельных состояниях для получения недостающего условия, необходимого для замыкания рассматриваемой задачи.

Многочисленные фотографии волновой структуры струи при ее стационарном взаимодействии с преградой свидетельствуют о малости кривизны центрального скачка. Действительно, проведя из центра сопла окружность радиуса l , касательную к скачку на оси, легко убедиться, что всегда $K_0 < l^{-1}$. На достаточном удалении от сопла это дает оценку $K_0 \sim o(1)$. С другой стороны, кинограммы развитых автоколебательных процессов [2, 3] свидетельствуют, что образующая центрального скачка в любой момент времени является монотонной кривой, кривизна которой остается соизмеримой с K_0 в любой момент времени: $K(t) \sim K_0$. Следовательно, в этом предельном состоянии ударного слоя $K \sim \Delta K / \Delta t \sim o(K_0)$.

Полагая данную оценку непрерывной во времени, применим ее на более ранней стадии, когда автоколебательный режим еще не реализуется. Продифференцировав дважды (1.5), проанализируем скорость изменения во времени величины $g = N_2/N_1$ (1.1)

$$2\dot{g} = -4\dot{K}K_0 - 2KK_0^2N - \ddot{K}N^{-1} + \dot{K}\dot{N}N^{-2} \quad (1.6)$$

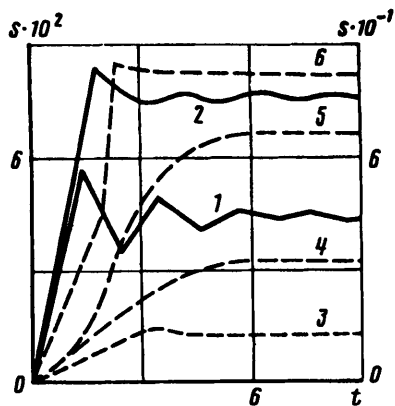
Учитывая, что $|N| < \varepsilon^{-1}$ [5], полагая, что по меньшей мере $KN \sim K_0\varepsilon^{-1} \sim 1$, $\ddot{K} \sim \dot{K}$, $\dot{N} \sim N$, и подставляя приведенные выше оценки в (1.6), получим $|g| \sim o(K_0)$. Следовательно, за конечное время численной реализации изменение $g\Delta t$ величины g будет невелико и ее приближенно можно считать постоянной. Скорость ударной волны в этом случае описывается формулой $N = N_1(t)(1 + gy^2)$, а сама величина g становится наряду с D и γ третьим параметром, задание которого замыкает сформулированную краевую задачу.

На поверхности преграды ставится условие непротекания $u = 0$.

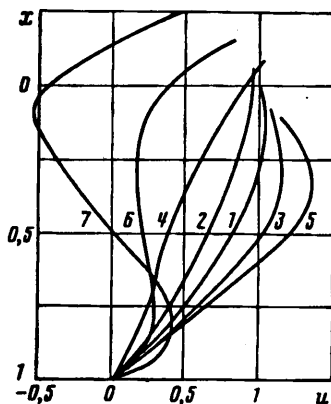
2. Сформулированная задача решалась численно в области за первой разрывной характеристикой OA (фиг. 1). Начальные условия на ней вычислялись при заданных D и γ посредством стационарного решения [4]. Для интегрирования использовался сеточно-характеристический метод по слоям $t = \text{const}$, стационарный вариант которого хорошо известен. Этот выбор обусловлен стремлением к наиболее строгому описанию процесса распространения возмущений в ударном слое.

Метод основан на итерационном процессе численного интегрирования условий на характеристиках (1.3) с последовательным уточнением их положения в пространстве tx . Расчеты производились при числе Куранта 0,95 и фиксированном шаге по x . Его измельчение от 20 до 100 не оказывало заметного влияния на результат. Для перемещения скачка от преграды ($s < 0$) резервировалось некоторое количество узлов. Кроме периодических сообщений о распределении параметров в ударном слое производился их вывод в моменты времени, соответствующие экстремумам скорости N , давления на преграде $p(x=1)$, нулевым значениям N , а также при пересечении со скачком и преградой разрывной характеристики OA в ее последовательных отражениях (фиг. 1). Расчет каждого временного слоя завершался анализом условия возникновения внутренней нестационарной ударной волны как точки пересечения одноименных характеристик a^+ или a^- семейств. В вычислительном алгоритме применялся критерий пересечения [8].

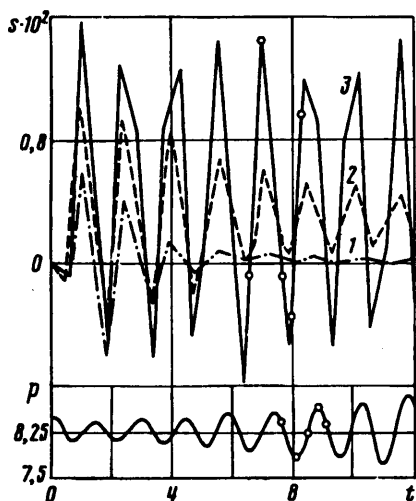
Сформулированная математическая модель апробирована на задаче стационарного обтекания



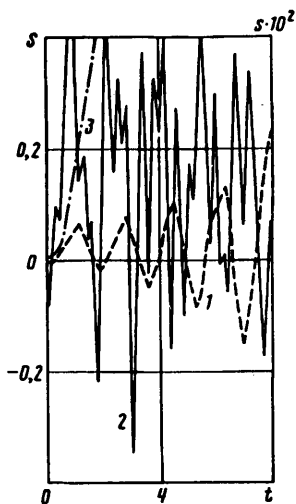
Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3



Фиг. 5

сферы равномерным потоком ($\Theta_r = M_{yy} \equiv 0$). Соответствующая величина D и начальные условия задавались по решению с постоянной плотностью [6]. Данная задача при неизменной форме головной ударной волны решалась ранее в [7], где отмечено хорошее соответствие результатам расчетов в строгой постановке. В свою очередь решение краевой задачи разд. 1 в постановке, эквивалентной [7] ($g = 0$), также стремится к стационарному пределу, причем при любых γ конечное распределение скорости u мало отличается от начального. Головная ударная волна приобретает малое смещение к телу по отношению к положению при $t = 0$. Его величина убывает с уменьшением γ , т. е. с ростом точности решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения [6].

Достижаемое соответствие результатов характеру течения позволяет исследовать на данном примере влияние введенного в разд. 1 параметра g . Результаты расчетов показали, что при убывании скорости фронта с удалением от оси ($g < 0$) течение всегда стремится к стационарному, процесс установления носит колебательный характер, конечно смещение головной волны невелико (фиг. 2, сплошные кривые 1 и 2 для $g = -0,1$ — $-0,04$, левая шкала). При $g > 0$, когда скорость фронта с удалением от оси возрастает, головная ударная волна за короткий промежуток времени резко смещается к телу на величину, уже соизмеримую с δ_0 при $g \sim 1$ (фиг. 2, штрихпунктир, кривые 3—6 соответствуют $g = 0, 0,04, 0,1, 0,2$, правая шкала). Если принять новое значение отхода за единицу, то оно будет соответствовать обтеканию сферы значительно меньшего размера, чем исходная. Таким образом, при $g > 0$ получаемое решение можно интерпретировать как течение, возникающее при мгновенном уменьшении размера тела с фиксированной в пространстве точкой торможения. Течение такого типа выходит за рамки настоящего исследования, поэтому в дальнейшем основное внимание было уделено случаю $g < 0$.

3. Эволюцию присевого течения при взаимодействии струи с преградой рассмотрим на примере результатов расчетов, проведенных при фиксированных значениях $g = -0,5$, $\gamma = 1,25$ и увеличении D . На фиг. 3, а приведены графики изменения положения скачка перед преградой для трех значений D . Видно, что перемещение скачка носит колебательный характер, причем если при $D = 0,19$ имеет место явное затухание (кривая 1), то увеличение D до 0,21 приводит к меньшему затуханию (кривая 2), а при $D = 0,22$ процесс можно считать незатухающим (кривая 3). На фиг. 3, а также хорошо видно, что безразмерный период колебаний скачка не зависит от D .

Общий характер колебаний существенно отличается от гармонических и с большой точностью может считаться кусочно-линейным. При $D = 0,23$ процесс приобретает характер колебаний с нарастающей амплитудой. Несмотря на отличие колебаний от гармонических, положительные экстремумы кривой $s(t)$ практически точно укладываются на экспоненту $s_{\max} = 0,01725 \exp(0,09t)$, а кривой $N(t)$ — на экспоненту $N_{\max} = 0,0578 \exp(0,096t)$.

Увеличение скорости фронта и его смещения ведет к росту амплитуды колебаний давления в центре преграды (фиг. 3, б). На фиг. 3 точками помечены моменты встречи разрывной характеристики с движущимся скачком и преградой. Видно, что экстремумы функций N и p никак не связаны с этими событиями.

В отличие от процессов при $D < 0,22$, заканчивающихся установлением, эволюция течения при $D = 0,23$ приводит к зарождению внутри ударного слоя при $t = 24,31$, $x = -0,028$ вторичной нестационарной ударной волны, движущейся от преграды со скоростью $N_1 = -6,36$. До этого момента максимум $|N|$ достигает порядка единицы. Продолжение расчета выбранным методом возможно, если вторичная ударная волна является малоинтенсивной. Во всех же проведенных расчетах с $g < 0$ рост амплитуды колебаний приводил к аварийной остановке решения на временах порядка $t + 10\tau$, что свидетельствует о быстром росте интенсивности вторичной ударной волны.

На фиг. 4 приведены эпюры осевой скорости в различные моменты времени при $D = 0,23$ (кривые 1—7 соответствуют $t = 0, 9,03, 11,28, 18,06, 20,29, 22,55, 24$). Видно, что при смещении скачка к преграде малая начальная немонотонность ($u_{\max} = 1,018$) имеет тенденцию к увеличению. При смещении же скачка от преграды на эпюре появляется перегиб, развитие которого приводит со временем к появлению близ преграды участка с обратным основным направлением скорости. Этому соответствуют значения $|N| \sim 1$, когда скорость спутного потока, увлекаемого движущимся скачком, становится соизмеримой со скоростью $u_c(t=0)$.

Данный результат согласуется с [9], где отмечено существование нестационарных циркуляционных зон при автоколебательных режимах. Давление в ударном слое монотонно возрастает от скачка к преграде, причем при движении к ней скачка оно уменьшается во всем ударном слое по сравнению с начальным, а при движении от преграды — возрастает, превосходя при $t \rightarrow t_0$ исходное значение почти вдвое. Плотность и скорость звука при $t < 20$ меняются во всем ударном слое не более чем на 10%.

Если при $t = 0$ энтропийная функция $\vartheta = p \rho^{-\gamma}$ постоянна, то с течением времени ее изменение вдоль оси становится все более немонотонным. Удаление скачка от преграды ведет к появлению одного максимума за скачком и одного минимума у поверхности, на которой ϑ не зависит от времени. Приближение скачка вызывает смену максимумов и минимумов, а близ преграды появляется еще один минимум, значительно меньший, чем за скачком.

Расчеты с дальнейшим увеличением D фиксируют появление вторичной ударной волны на все более ранней стадии процесса: при $D = 0,24$ имеем $t = 9,1$, а при $D = 0,4$ волна зарождается уже при $t = 3,13$. Отмеченное выше качественное изменение периодического характера процесса с затухающего на расходящийся с превышением некоторого значения $D_c(\gamma)$ имеет место и для $\gamma = 1,15, 1,3, 1,4$.

Результаты расчетов течения при фиксированных γ , D и изменении $g < 0$ показали, что процесс сохраняет колебательный характер, но величина g при $D > D_c$ немонотонно влияет на время t_c зарождения вторичной ударной волны (см. ниже, $\gamma = 1,4$, $D = 0,3$)

g	-0,5	-2,5	-5	-7,5	-10
t_c	9,83	5,89	5,29	7,05	—

Для $g = -10$ это событие при $t \leq 30$ не наблюдалось. Отмеченная особенность объясняется тем, что при любых $g < 0$ на фронте движущейся ударной волны имеется неподвижная точка, за которой скорость его перемещения противоположна N_1 . Координату ее нетрудно найти, приравняв нулю правую часть выражения для N (1.1): $y_{st} = (-g)^{1/2}$. С ростом $|g|$ эта точка приближается к оси, и для $g = -10$ имеем $y_{st} = 0,316$. Естественно, «закрепление» в пространстве точки фронта и ее приближение к оси уменьшает амплитуду перемещений скачка, а с этим и изменение всех остальных параметров.

С увеличением $|g| > 1$ максимумы функций N и s начинают все отчетливее модулироваться частотой, в несколько раз превышающей основную, но не кратной ей. На участках монотонности появляются пики, величины которых увеличиваются и при достаточно больших g становятся соизмеримыми с основными экстремумами. На новых участках монотонности в свою очередь появляются вторичные пики.

На фиг. 5 приведены графики перемещения скачка для $\gamma = 1,4$, $D = 0,3$, $g = -0,5$ (кривая 1, левая шкала) и $g = -10$ (кривая 2, правая шкала). Общий вид кривой 2 дает основание говорить о проявлении стохастических свойств рассматриваемой математической модели, однако поскольку, по оценкам разд. 1, $\langle g \rangle \sim 1$, результат для $g = -10$ следует рассматривать лишь как иллюстрацию ее разнообразных свойств. На фиг. 5 приведена также кривая 3 для $g = 0,05$, подтверждающая, что и при струйном обтекании значения $g > 0$ моделируют мгновенное уменьшение размера преграды: конечное значение отхода, достигаемое при $t = 5,75$, равно здесь $0,19\delta_0$, что может наблюдаться только у преграды ограниченного диаметра.

Укажем, что зарождение вторичной ударной волны происходит за малый физический промежуток времени. Так, для струи воздуха, истекающего из звукового сопла ($M_s = 1$) радиуса $r_s = 6$ мм при $T_s = 300$ К нерасчетности $n = p_s/p_\infty = 20,8$ и $h = 7,84r_s$, параметру $g = -0,5$ соответствует $t_c = 9,68 \cdot 10^{-4}$ с.

4. Проведенное исследование позволило установить, что при всяком $g < 0$, $\langle g \rangle \sim 1$ существует относительный отход $D_c(g)$ такой, что с переходом через это значение величины D изменяется качественный характер исследуемого процесса. В свою очередь значение D_c оказывается прямо связанным с видом начального распределения скорости. Все расчеты с $D < D_c$, которые заканчиваются установлением, начинаются с монотонного распределения скорости стационарного приосевого течения. С другой стороны, наличие при $t = 0$ максимума всего лишь 1,8% $u_c(0)$ (фиг. 4) уже приводит к нарастанию амплитуды колебательного процесса и завершается образованием внутренней ударной волны.

Из стационарного решения [4] следует, что при немонотонном распределении скорости касательная составляющая v , отрицательна, а в приосевой области образуется сужающаяся-расширяющаяся трубка тока («горло») типа той, которая изображена на рис. 2 в [5]. По-видимому, течение в горле обладает свойством усиления малых нестационарных возмущений, возникающих в предлагаемой математической модели из-за несоответствия условий в начальном сечении законам сохранения (системе (1.2)). Решение [4] по-

звolyет легко вычислить значение отхода, при котором меняется знак величины v_1 («особый» отход D_2 [4], см. ниже):

γ	2	1,67	1,4	1,25	1,1	1
D_2	0,333	0,292	0,241	0,208	0,141	0

По вполне понятным причинам (конечность времени счета, дискретность изменения D и т. п.) численное определение параметра D представляется затруднительным. Однако приведенные выше рассуждения дают основания полагать, что параметры D и D_2 тождественны, и считать, что при $D < D_2$ реализуется стационарный, а при $D > D_2$ — автоколебательный режим взаимодействия струи с преградой. В том, что D и D_2 весьма близки, можно, например, убедиться, сравнив данные на фиг. 3 со значением $D_2 = 0,208$ при $\gamma = 1,25$. Кроме того, на изменение знака компоненты v_1 при переходе к автоколебательным режимам указывалось в [9]. В [10] на фиг. 3 приведено сравнение величины D_2 с экспериментальными данными [2] по началу автоколебательных режимов, также свидетельствующее в пользу предлагаемого критерия.

В заключение отметим, что сформулированная в разд. 1 краевая задача не содержит конкретных параметров обтекания M_0 , h , n . Переход к ним может быть осуществлен, если известна зависимость $\delta_0 = \delta_0(Ma, \gamma, h, n)$, например эмпирическая формула авторов работы [2], приведенная в [10]. При этом каждому фиксированному D , т. е. одной численной реализации, соответствует бесконечное множество комбинаций параметров. Так, величине $D = 0,3$ (фиг. 5) в соответствии с названной формулой удовлетворяют любые значения параметров, отвечающие соотношению $h = 1,454 M_0(\gamma n)^{1/2}$. Отмеченная особенность постановки задачи придает большую общность результатам настоящего исследования и усиливает их доказательность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург И. П., Соколов Е. И., Усков В. Н. Типы волновой структуры при взаимодействии недорасширенной струи с безграничной плоской преградой // ПМТФ. 1976. № 1. С. 45—50.
2. Семилетенко Б. Г., Собколов Б. Н., Усков В. Н. Схема ударно-волновых процессов при неустойчивом взаимодействии струи с преградой // Изв. СО АН СССР. 1972. № 13. Сер. техн. наук. Вып. 3. С. 39—41.
3. Глазнев В. Н., Демин В. С. Полуэмпирическая теория генерации дискретных тонов сверхзвуковой недорасширенной струей, натекающей на преграду // ПМТФ. 1976. № 6. С. 49—55.
4. Соколов Е. И. Исследование параметров приосевого течения в ударном слое при взаимодействии сверхзвуковой струи с преградой // Изв. АН СССР. МЖГ. № 5. С. 63—70.
5. Соколов Е. И. Перемещение центрального скачка в недорасширенной струе перед перпендикулярной преградой под действием малого нестационарного возмущения // Газодинам. и теплообмен. Л., 1987. № 9.
6. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
7. Пасконов В. М., Шляпочник Л. Я. Расчет течения идеального газа в окрестности линии торможения затупленных тел // Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та. 1968. Вып. 11. С. 139—146.
8. Сейлас. Применение метода подгонки скачка для расчета сложных двумерных сверхзвуковых течений // Ракетная техника и космонавтика. 1976. Т. 14. № 5. С. 49—55.
9. Кузьмина В. Е., Матвеев С. К. О численном исследовании неустойчивого взаимодействия сверхзвуковой струи с плоской преградой // ПМТФ. 1979. № 6. С. 93—99.
10. Соколов Е. И. Течение в ударном слое перед преградой, перпендикулярной оси сверхзвуковой недорасширенной струи // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 4. С. 51—58.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
25.IV.1991