МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1992

УДК 532.516.013.4:536.25

© 1992 г. Ю. К. БРАТУХИН, С. О. МАКАРОВ

О ВТОРИЧНЫХ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ СОЛИТОННОГО ТИПА

Получено точное аналитическое решение задачи об устойчивости осесимметричного термокапиллярного движения от точечного источника тепла постоянной мощности, помещенного на горизонтальную свободную поверхность вязкой жидкости. Найдены аналитические выражения для монотонных нейтральных возмущений гидродинамического и теплового типов. Определены критические значения безразмерной мощности источника для возмущений с произвольными «квантовыми» числами l и m и вторичные движения вблизи порога устойчивости.

Приведено точное решение задачи об осесимметричном термокапиллярном движении жидкости от шарового источника тепла; исследована его устойчивость. Показано, что всегда можно подобрать такие физические свойства нагревателя, для которых при сколько угодно малой мощности источника осесимметричное движение становится неустойчивым по отношению к вихревому. Дано сравнение с экспериментом.

1. **Постановка задачи.** Пусть на свободной поверхности вязкой жидкости, заполняющей полупространство $z > 0$, расположен точечный источник тепла постоянной мощности Q. Тогда в результате неоднородного нагрева жидкости на ее свободной поверхности из-за зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры появятся касательные напряжения, которые вызовут термокапиллярную конвекцию во всем объеме жидкости [1]. При решении задачи по определению скорости, температуры и давления в жидкости будем предполагать, что течение ламинарное, жидкость несжимаемая и термически недеформируемая. Полупространство $z < 0$ заполнено нетеплопроводным невязким газом исчезающе малой плотности. Коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры $\alpha(T) = \alpha_0 - \alpha_1 T$ ($\alpha_1 > 0$). Задача стационарна, жидкость нелетуча, ее свободная поверхность горизонтальна и совпадает с плоскостью $z = 0$. Последнее допущение эквивалентно предположению о бесконечно большом значении числа Вебера.

Задачу будем решать в сферической системе координат (r, ϑ, φ), начало которой совпадает с точечным источником тепла, а полярная ось направлена по z. Уравнения Навье — Стокса, непрерывности, теплопроводности, а также граничные условия на свободной поверхности жидкости запишем в безразмерном виде, выбрав в качестве единицы длины произвольный линейный размер a, скорости — $\alpha_1 Q/2\pi a\kappa\eta$, температуры — $Q/2\pi a\kappa$ и давления — $\alpha_1 Q/2\pi a^2\kappa$, где κ и η — коэффициенты теплопроводности и динамической вязкости. Тогда безразмерные скорость $\mathbf{v}$, давление p и температура T будут удовлетворять следующей системе уравнений:

$$q\,(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta\mathbf{v}; \quad \nabla\mathbf{v} = 0; \quad q\,\mathrm{Pr}\,\mathbf{v}\nabla T = \Delta T \tag{1.1}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}: \; v_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial\vartheta} = 0; \; \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\vartheta} = -\frac{\partial T}{\partial r}; \; \frac{\partial v_\varphi}{\partial\vartheta} = -\frac{\partial T}{\partial\varphi} \tag{1.2}$$

$$\Pr = \frac{\nu}{\chi}; \quad q = \frac{\alpha_1 Q}{2\pi\kappa\eta\nu}$$

где χ и ν — коэффициенты температуропроводности, и кинематической вязкости, v_r, v_θ и v_φ — компоненты вектора скорости в сферической системе координат. Кроме того, к системе (1.1)—(1.2) нужно присоединить требование исчезновения на бесконечности всех функций и условие постоянства теплового потока через полусферу произвольного радиуса r

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \left(q \Pr v_r T - \frac{\partial T}{\partial r} \right) r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi \tag{1.3}$$

Нелинейная задача (1.1)—(1.3) имеет точное аналитическое осесимметричное решение ($\mathbf{v}_0$, T_0, p_0), найденное в [2].

2. **Устойчивость осесимметричного решения.** Исследуем устойчивость решения ($\mathbf{v}_0$, T_0, p_0) по отношению к монотонным, периодическим по азимуту возмущениям. Следуя стандартной методике, наложим на основное движение нормальные возмущения ($\mathbf{v}'$, T', p'). При критическом значении мощности q_*, соответствующем срыву основного течения, линеаризованная система уравнений для возмущений имеет вид

$$\begin{aligned} &q_* \left[(\mathbf{v}_0\vec{\nabla})\, \mathbf{v}' + (\mathbf{v}'\nabla)\, \mathbf{v}_0 \right] = -\nabla p' + \Delta \mathbf{v}'; \quad \nabla \mathbf{v}' = 0 \\ &q_* \Pr\, (\mathbf{v}_0\vec{\nabla} T' + \mathbf{v}'\nabla T_0) = \Delta T' \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}: \quad v_\vartheta' = \frac{\partial T'}{\partial \vartheta} = 0; \quad \frac{1}{r}\frac{\partial v_r'}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial T'}{\partial r}; \quad \frac{\partial v_\varphi'}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial T'}{\partial \varphi}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \left[q_* \Pr\, (v_{r0} T' + v_r' T_0) - \frac{\partial T'}{\partial r} \right] r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 0 \tag{2.2}$$

Будем искать решение задачи (2.1)—(2.2) в виде разложения по сферическим функциям, а скорость $\mathbf{v}'$ разложим по векторным шаровым функциям [3]

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} \Big\{ & f_{lm}(r)\, P_l^{(m)} \cos m\varphi\, \mathbf{e}_r + g_{lm}(r)\, r\vec{\nabla}\, (P_l^{(m)} \cos m\varphi) + \\ & + h_{lm}(r)\, \mathbf{r} \times \vec{\nabla}\, (P_l^{(m)} \sin m\varphi) \Big\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$T' = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} \tau_{lm}(r)\, P_l^{(m)} \cos m\varphi; \quad p' = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} p_{lm}(r)\, P_l^{(m)} \cos m\varphi$$

где f_{lm}, g_{lm}, h_{lm}, τ_{lm} и p_{lm} — функции, зависящие от r и удовлетворяющие условию на бесконечности, $P_l^{(m)}$ — присоединенные полиномы Лежандра, $\mathbf{e}_r$ — радиальный орт. Очевидно, что сферическая симметрия задачи допускает и нечетное по φ возмущение, пропорциональное $\sin m\varphi$, так что каждое число q_* будет по крайней мере двукратно вырождено.

Подставив (2.3) в уравнения (2.1), получим

$$q_* = 0; \quad \tau_{lm} = \frac{E_l^{(m)}}{r^{l+1}}; \quad p_{lm} = \frac{4l-2}{l+1}\frac{B_l^{(m)}}{r^{l+1}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} r^{-l} \Big\{ & (B_l^{(m)} P_l^{(m)} + D_{l-2}^{(m)} P_{l-2}^{(m)}) \cos m\varphi\, \mathbf{e}_r + \\ & B_l^{(m)} \frac{2-l}{l(l+1)}\, r\vec{\nabla}\, (P_l^{(m)} \cos m\varphi) - \frac{D_{l-2}^{(m)}}{l-1}\, r\vec{\nabla}\, (P_{l-2}^{(m)} \cos m\varphi) + \\ & + F_{l-1}^{(m)} \mathbf{r} \times \vec{\nabla}\, (P_{l-1}^{(m)} \sin m\varphi) \Big\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Члены с $P_l^{(m)}$ в сумме (2.4) для которых $m > l$, тождественно равны нулю.

Постоянные интегрирования $B_l^{(m)}$, $D_{l-2}^{(m)}$, $F_{l-1}^{(m)}$, $E_l^{(m)}$ определяются из граничных условий (2.1) независимо для каждой из мод. При этом оказывается, что возмущения бывают двух типов: гидродинамические ($l + m$ четно) и тепловые ($l + m$ нечетно). Для гидродинамических мод характерно отсутствие возмущений температуры — они связаны только с неустойчивостью гидродинамических потоков. Таковы, например

$$\mathbf{v}_{20}' = \frac{A}{2r^2}(3x^2 - 1)\,\mathbf{e}_r;\quad T_{20}' = 0$$

$$\mathbf{v}_{31}' = \frac{B}{8r^3}\{12(5x^2 - 1)\sin\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{e}_r - (15x^3 - 11x)\cos\varphi\mathbf{e}_\theta +$$

$$+ (5x^2 - 1)\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi\};\quad T_{31}' = 0$$

$$\mathbf{v}_{42}' = \frac{3C}{2r^4}\left\{5(-7x^4 + 8x^2 - 1)\cos 2\varphi\,\mathbf{e}_r - 2(7x^3 - 4x)\sin\vartheta\,\cos 2\varphi\,\mathbf{e}_\theta +\right.$$

$$\left. + (7x^2 - 1)\sin\vartheta\sin 2\varphi\mathbf{e}_\varphi\right\}$$

$$T_{42}' = 0$$

Здесь и далее $x = \cos\vartheta$, $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_\varphi$ — орты сферической системы координат. К другому типу относятся тепловые возмущения. В них отличные от нуля возмущения T_{lm}' на поверхности $\vartheta = \pi/2$ генерируют сдвиговые напряжения в жидкости, вовлекающие ее в движение. В качестве примера приведем две первые тепловые моды

$$\mathbf{v}_{30}' = \frac{5D}{r^3}\left\{(2x^3 - x)\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{2}x^2\sin\vartheta\mathbf{e}_\theta\right\},\quad T_{30}' = \frac{5D}{3r^3}(1 - 3x^2)$$

$$\mathbf{v}_{41}' = \frac{E}{r^4}\left\{(25x^3 - 8x)\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{e}_r - (10x^4 - 7x^2)\cos\varphi\mathbf{e}_\theta +\right.$$

$$\left. + (5x^3 - 2x)\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi\right\}\quad T_{41}' = \frac{4E}{r^4}(5x^2 - 1)\sin\vartheta\cos\varphi$$

Из решения (2.4) следует, что при сколь угодно малых q основное решение ($\mathbf{v}_0$, T_0, p_0), которое в этих единицах измерения не равно нулю, неустойчиво по отношению к любым гидродинамическим и тепловым модам ($\mathbf{v}_{lm}'$, T_{lm}', p_{lm}') с различными «квантовыми» числами l и m, определяющими скорость убывания возмущений с расстоянием ($\sim r^{-l}$) и порядок аксиальной симметрии возмущений ($\sim \cos m\varphi$). Сам факт неустойчивости основного течения при нулевом значении силового параметра не не нов (см., например, задачу П. Л. Капицы о стекании жидкой пленки по вертикальной стенке [4]). Вырождение критических параметров также встречается, например, в задачах о конвекции в горизонтальном слое жидкости [5]. Новым является бесконечная кратность вырождения ($l = 1, 2, 3, \ldots$, $m \leq l$). В эксперименте [6] этот факт состоит в том, что периодические по азимуту движения со случайным числом вихрей возникают при сколь угодно малой мощности источника. Перенос рассмотренной модели на случай реального источника не является полностью адекватным; так, наличие вихревого движения в эксперименте при любых q отнюдь не свидетельствует о беспороговом характере неустойчивости для источника конечных размеров и должно быть соотнесено с условиями опыта (например, пусть малой, но конечной по величине задаваемой мощности и т. п.). На нулевое значение критической мощности для точечного источника указывает, по-видимому, и работа [7].

3. О физическом смысле мод, срывающих устойчивость основного течения. Проблему гидродинамической неустойчивости видят обычно [8] в определении критических безразмерных параметров задачи, при которых возникающие в начальный момент возмущения растут со временем в любой фиксированной точке пространства (абсолютная неустойчивость) или растут, но одновременно сносятся потоком так, что в фиксированной точке при $t \to \infty$ возникающие возмущения затухают (конвективная неустойчивость). Проблема устойчивости сводится, следовательно, к задаче с начальными условиями. При этом роль граничных условий остается обычно в стороне.

В [9], где специально выяснялось влияние формы полости на конвективное движение, было показано, что твердые границы выступают не только в роли фильтра, отсеивающего определенные моды, но и в роли постоянно действующего генератора характерных для задачи возмущений. Если же граничные условия не разрешают некоторый тип возмущений, то соответствующее движение не может развиться.

Таким образом, математическая проблема устойчивости может быть рассмотрена и как задача о развитии возмущений, пропускаемых границами. В такой постановке задачи в замкнутых объемах обычно не ставятся, поскольку условие прилипания $\mathbf{v} = 0$ на твердых границах пропускает возмущение любых видов. Эти трудности отсутствуют в задаче (1.1)—(1.3) для замкнутой системы, через единственную границу которой с внешним миром никакие возмущения не проникают: ни возмущения массы ($v_\theta' = 0$), ни тепла ($\partial T'/\partial \vartheta = 0$), ни импульса ($\sigma_\theta' = 0$). Внешняя среда влияет на движение только посредством интегральных условий типа (1.3).

Поэтому при необходимости изучения влияния на основное движение различного вида возмущений необходимо присоединить к задаче (1.1)—(1.3) еще добавочное «разрешительное» условие, определяющее характер возмущения. Так, например, при исследовании устойчивости по отношению к гидродинамическому возмущению

$$\mathbf{v}_{\text{II}}' = \frac{B_1^{(1)}}{r}\left(P_1^{(1)}\cos\varphi\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{2}r\nabla\left(P_1^{(1)}\cos\varphi\right)\right); \quad T_{\text{II}}' = 0 \tag{3.1}$$

необходимо допустить возможность отличного от нуля потока x-й составляющей импульса через любую сферу, окружающую источник

$$\varepsilon = \int \left[(\Pi_{rr}\cos\vartheta + \Pi_{r\theta}\sin\vartheta)\cos\varphi - \Pi_{r\varphi}\sin\varphi\right] dS \tag{3.2}$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса [8], оси x и z образуют правую прямоугольную систему координат. Для других мод это будут другие интегральные соотношения, аналогичные мультипольным моментам в задачах электростатики о потенциале от заряженного шара. Но в каждом случае величина ε соответствующего интеграла должна однозначно определяться через параметры q и Pr задачи в ходе решения нелинейных уравнений (1.1)—(1.3).

С математической точки зрения появление интегралов типа (3.2) связано с отсутствием в задаче условия прилипания $\mathbf{v} = 0$ на стенках нагретого тела, которое здесь считается точкой. Это условие Дирихле, очевидно, пропускает через себя любые значения напряжений на стенках реального источника и, в частности, такие, которые могут привести к движению, увлекающему тело вдоль оси x. А поскольку реальный источник предполагается неподвижным (скорость на его поверхности нулевая), то его движению и препятствует направленный из тела поток импульса (3.2), который в отсутствие тела конечных размеров необходимо определять.

Как видно из (2.4), во всех возмущениях реализуются две возможности. Основное течение на бесконечности затухает медленнее возмущения и тогда можно считать, что решение ($\mathbf{v}_0$, T_0, p_0) на бесконечности устойчиво по отношению к такого вида возмущениям, поскольку последние оказываются локализованными в ограниченных объемах (возмущения солитонного типа). Основное движение и возмущение развиваются с ростом r одинаково и в этом случае следует констатировать неустойчивость основного движения во всем объеме.

4. **Развитие вторичных движений.** Изложенная в предыдущих параграфах линейная теория, основанная на анализе поведения малых возмущений, позволила определить только границу устойчивости основного осесимметричного движения $q_* = 0$ для всех мод. Определение вторичных течений, развивающихся в результате потери устойчивости основного течения ($\mathbf{v}_0$, T_0, p_0), должно проводиться на основе полных нелинейных уравнений (1.1)—(1.3). Найдем установившееся конечно-амплитудное движение при малых q, «разрешив» только одну из мод, самую крупномасштабную (3.1). Полагая, что при слабых надкритичностях величина ε также мала, разложим, как это принято в нелинейной теории колебаний, все функции в ряды по степеням ε

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ T \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ T_0 \\ p_0 \\ q_* \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ T_1 \\ p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \mathbf{v}_2 \\ T_2 \\ p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} + \ldots \qquad (4.1)$$

Последнее уравнение в (4.1) определяет параметр ε, так как q задано. Заметим, что в этой задаче q_* равно нулю, поэтому разложение q начинается с ε^1. Подставляя ряды (4.1) в систему (1.1)—(1.3) и (3.2), собирая последовательно члены с различными степенями ε^n ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$), найдем после довольно громоздких вычислений точные аналитические выражения

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{2r}\left[(1 - 2x)\,\mathbf{e}_r + \operatorname{ctg}\vartheta\,(1 - x)\,\mathbf{e}_\theta \right]; \quad T_0 = \frac{1}{r} \qquad (4.2)$$

$$q_1 = 0; \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2r}\left(2 \sin\vartheta \cos\varphi \mathbf{e}_r + x \cos\varphi \mathbf{e}_\theta - \sin\varphi \mathbf{e}_\varphi\right)$$

$$T_1 = 0$$

$$q_2 = 1; \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{8r}\left\{ [4x \ln(1 + x) + 3x^2]\,\mathbf{e}_r + \right.$$
$$\left. + [2 \sin^2\vartheta \ln(1 + x) + x^3 + x^2 - 2x] \sin^{-1}\vartheta\,\mathbf{e}_\theta \right\}$$

$$T_2 = \frac{\Pr}{2r}\,[\ln(1 + x) - x]$$

Если ограничиться этими тремя приближениями, то q оказывается равным ε^2, т. е. $\varepsilon = \sqrt{q}$, так что амплитуда критической моды, как и следовало ожидать по теории Ландау [8], растет при малых q как $\sqrt{q}$ («мягкая» неустойчивость). Действуя аналогичным образом, можно показать, что и все остальные моды растут с q по корневому закону.

5. **Стационарное осесимметричное термокапиллярное движение от нагретого шара и его устойчивость.** Полученные в предыдущих параграфах решения являются точными для конвективных струй, бьющих от точечного источника. При этом вопросы о влиянии на движение физических свойств нагретого тела остаются, естественно, затушеванными, поскольку единственной характеристикой источника тепла могут быть интегральные уравнения типа (1.3), задающие, например, постоянный, равномерный по всем направлениям тепловой поток.

Если учитывать конечные размеры нагревателя, то на полученное в [2] решение нужно смотреть как на первый член разложения по степеням отношения размеров источника к расстоянию от него. В частности, при решении сформулированной выше задачи о термокапиллярной конвекции, но не от точечного, а от протяженного источника тепла методом сращиваемых асимптотических разложений [10] получим выражения из [2] в качестве решения конвективной теплопередачи в «далекой» области. Решение же в «близкой» задаче будет содержать всю детальную информацию о свойствах нагретого тела. Так, к примеру, если последнее имеет звездообразную форму, то очевидно появление вблизи него вихревых течений с соответствующей симметрией. Однако эти мелкомасштабные движения должны затухать с расстоянием быстрее, чем $1/r$, так как иначе «сшиться» с функциями «далекой» области они не смогут.

При исследовании устойчивости такого глобального решения, справедливого как на бесконечности, так и вблизи источника тепла, естественно ожидать расщепление спектра критических q_* в привычный набор дискретных конечных значений q_1, q_2, ... Однако может оказаться, что для некоторых физических свойств источника тепла (специфическая форма, условия закрепления, пористость материала, вибрация, жесткость границ, химическая активность и т. п.) минимальное критическое число q_1 равно нулю (см., например, статью [11], специально посвященную этому вопросу). Поскольку эти конкретные свойства источника остались в стороне при постановке задачи в разд. 1—2, но им не противоречили, то q_* для системы уравнений (2.1)—(2.2) могло оказаться (и оказалось) нулем как минимальным из всех возможных значений.

Рассмотрим в качестве примера, в котором $q_1 = 0$, задачу о нагретом пористом шаре радиуса a, погруженном до экватора в жидкость, заполняющую полупространство $z > 0$. Материал шара будем считать бесконечно теплопроводным, краевой угол смачивания прямым; предположим далее, что шар нагревается источником тепла мощности Q, обеспечивающим постоянный сферически-симметричный теплопоток с его поверхности $r = a$, $-\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2$ в жидкость (внешняя среда, заполняющая пространство выше шара и жидкости нетеплопроводна). В той же, что и в разд. 1, постановке задачи стационарное распределение температур T, давлений p, скоростей $\mathbf{v}$ в жидкости и давлений p_l и скоростей фильтрации $\mathbf{u}$ в массиве пористого шара определяется следующей системой уравнений [12]:

$$(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta\mathbf{v};\ \ \nabla\mathbf{v} = 0;\ \ \nabla\mathbf{u} = 0 \tag{5.1}$$

$$\gamma\nabla p_l + \mathbf{u} = 0;\ \ \mathrm{Pr}\,\mathbf{v}\nabla T = \Delta T$$

Уравнения обезразмерены; единицы измерения: длины a, давления $\rho v^2/a^2$, скорости v/a, температуры $Q/2\pi\kappa a$; параметр γ определен по коэффициенту проницаемости k пористой среды, входящему в формулу Дарси для плотности сил сопротивления $\mathbf{f}$ [12]: $k\mathbf{f} = -\eta\mathbf{u}$, и равен $\gamma = k/a_2$.

Граничные условия на поверхности жидкости $\vartheta = \pi/2$

$$\frac{\partial T}{\partial\vartheta} = v_\vartheta = 0;\ \ \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\vartheta} = -q\frac{\partial T}{\partial r};\ \ \frac{\partial v_\varphi}{\partial\vartheta} = -q\frac{\partial T}{\partial\varphi} \tag{5.2}$$

$$q = \frac{\alpha_1 Q}{2\pi\kappa\eta v}$$

Граничные условия на поверхности пористого шара $r = 1$ определяются заданным теплопотоком постоянной мощности и непрерывностью нормальных составляющих скоростей v_r и u_r, напряжений с условием прилипания для v_τ

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -1;\ \ v_r = u_r;\ \ p - p_l = bv_r;\ \ v_\tau = 0 \tag{5.3}$$

На касательную составляющую скорости фильтрации u_τ никаких ограничений не накладывается. Что касается условий прилипания, то это частный случай более общей трактовки свойств проницаемой границы, при котором допускается эффект «проскальзывания» жидкости. Полагая $v_\tau = 0$ на $r = 1$, считаем, что граница обладает большим касательным сопротивлением. Ее нормальное сопротивление просачиванию определено феноменологическим параметром b, связывающим скачок давления на границе с радиальной составляющей скорости [5].

Задача (5.1)—(5.3) допускает осесимметричное решение, которое можно записать в виде рядов по степеням предполагающегося малым параметра q. Первые члены рядов таковы

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0 = 0;\ p_0 = p_{i0} = 0;\ T_0 = \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left[\left(\frac{B_{2l}}{r^{2l}} + \frac{D_{2l}}{r^{2l+2}} \right) P_{2l}\mathbf{e}_r + \left(\frac{(1-l)}{l} \frac{B_{2l}}{r^{2l}} - \frac{D_{2l}}{r^{2l+2}} \right) \frac{r\nabla P_{2l}}{(2l+1)} \right]$$

$$T_1 = \tau_1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{A_{2l}}{r^{2l+1}} + \frac{\Pr B_{2l}}{4lr^{2l}} - \frac{\Pr D_{2l}}{2(2l+1)r^{2l+2}} \right] P_{2l}$$

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{l=1}^{\infty} C_{2l} r^{2l-1} \left[P_{2l}\mathbf{e}_r + \frac{1}{2l} r\nabla P_{2l} \right] \tag{5.4}$$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2r} \left[(1 - 2\cos\vartheta)\,\mathbf{e}_r + \operatorname{ctg}\vartheta\,(1 - \cos\vartheta)\,\mathbf{e}_\theta \right]$$

$$\tau_1 = \frac{\Pr}{2r} \left[\ln(1 + \cos\vartheta) - \cos\vartheta \right]$$

Решение (5.4) удовлетворяет системе уравнений и условиям на границе

$$\nabla p_1 = \Delta \mathbf{v}_1;\ \nabla \mathbf{v}_1 = \nabla \mathbf{u}_1 = 0;\ \Pr \mathbf{v}_1 \nabla T_0 = \Delta T_1$$

$$\gamma \nabla p_{i1} + \mathbf{u}_1 = 0$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}:\ v_{\theta 1} = \frac{\partial T_1}{\partial \vartheta} = 0;\ \frac{1}{r}\frac{\partial v_{r1}}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial T_0}{\partial r}$$

точно. Постоянные интегрирования A_{2l}, B_{2l}, C_{2l}, D_{2l} благодаря ортогональности полиномов Лежандра P_{2l} на интервале $[0; \pi/2]$ последовательно определяются граничными условиями на $r = 1$. В частности, при малых γ (практически непроницаемый для жидкости шар)

$$C_{2l} = 0;\ A_2 = -\frac{55}{288}\Pr;\ B_2 = \frac{15}{16};\ D_2 = -\frac{5}{16}$$

$$A_4 = \frac{63}{800}\Pr;\ B_4 = -\frac{15}{32};\ D_4 = \frac{9}{32};\ \ldots$$

Исследуем устойчивость найденного решения (5.4) по отношению к нормальным критическим монотонным возмущениям скорости $\mathbf{v}'$, $\mathbf{u}'$, давления p', p_i', и температуры T'. Следуя общему методу [5], исходя из (5.1)—(5.3), получим для этих функций систему уравнений и граничных условий

$$(\mathbf{v}'\nabla)\,\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v}' = -\nabla p' + \Delta \mathbf{v}';\ \nabla \mathbf{v}' = 0$$

$$\Pr(\mathbf{v}'\nabla T + \mathbf{v}\nabla T') = \Delta T'$$

$$\nabla \mathbf{u}' = 0;\ \gamma \nabla p_i' + \mathbf{u}' = 0 \tag{5.5}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}:\ v_\theta' = \frac{\partial T'}{\partial \vartheta} = 0;\ \frac{1}{r}\frac{\partial v_r'}{\partial \vartheta} = -q_*\frac{\partial T'}{\partial r};\ \frac{\partial v_\varphi'}{\partial \vartheta} = -q_*\frac{\partial T'}{\partial \varphi}$$

$$r = 1:\ \frac{\partial T'}{\partial r} = 0;\ v_r' = u_r';\ v_t' = 0;\ p' - p_i' = bv_r'$$

Здесь под величиной q понимается критическое значение q_*, при котором решение (5.4) становится неустойчивым.

Будем искать решение системы (5.5) в виде $2m$ вихревых мод гидродинамического типа ($l + m$ четно, но T' не равно нулю)

$$\mathbf{v}' = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{l} \left[\left(\frac{B_l'}{r^l} + \frac{D_l'}{r^{l+2}} \right) Y_{lm}\mathbf{e}_r + \left(\frac{2-l}{lr^l} B_l' - \frac{D_l'}{r^{l+2}} \right) \frac{r\nabla Y_{lm}}{l+1} \right]$$

$$\mathbf{u}' = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{l} C_l' r^{l-1} \left(Y_{lm}\mathbf{e}_r + \frac{r\nabla Y_{lm}}{l+1} \right) \tag{5.6}$$

$$p' = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{l} B_l' \frac{4l-2}{l+1} \frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}$$

$$p_l' = -\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l} C_l' \frac{r^l}{\gamma l} Y_{lm}$$

где сферические функции Y_{lm} записаны в форме произведения присоединенных полимеров Лежандра $P_l^{(m)}$ на $\cos m\varphi$. Выражение для T', включающее в себя решение однородного уравнения $\Delta T' = 0$ и «неоднородную» часть с коэффициентами B_l', D_l', аналогично выписанным функциям.

При подстановке формул (5.6) в уравнения (5.5) можно, действуя методом Галеркина, найти критическое число q_*, соответствующее моде с заданным l. Очевидно, что q_* зависит от параметров задачи и не зависит от азимутального числа m, т. е. мода с заданным l будет $[(l+1)/2]$-кратно вырождена ($[\mu]$ есть целая часть μ).

Поскольку целью является выяснение возможности такого набора параметров, при котором $q_* = 0$, то была предпринята попытка сразу положить в уравнения это значение. Оказалось, что при соотношении

$$b = \frac{1}{\gamma l} + \frac{l(2l-1)}{l+1}$$

условие $q_* = 0$ выполняется аналитически точно.

Таким образом, можно констатировать, что, хотя q_* для источников конечных размеров в общем случае не равно нулю, всегда возможно реализовать такие физические свойства нагревания, для которых уже при сколь угодно малой мощности осесимметричное движение становится неустойчивым по отношению к вихревым модам случайным набором из чисел. Рост амплитуды этих выхревых движений при увеличении q происходит по корневому закону.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
2. *Братухин Ю. К., Маурин Л. Н.* Термокапиллярная конвекция в жидкости, заполняющей полупространство//ПММ. 1967. Т. 31. № 3. С. 577—580.
3. *Сорокин В. С.* Замечания о шаровых электромагнитных волнах//ЖЭТФ. 1948. Т. 18. № 2. С. 228—235.
4. *Капица П. Л.* Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости//ЖЭТФ. 1948 Т. 18. № 1. С. 3—18.
5. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
6. *Пшеничников А. Ф., Яценко С. С.* Конвективная диффузия от сосредоточенного источника поверхностно-активного вещества//Уч. зап. Перм. ун-та. 1974. № 316. С. 175—183.
7. *Братухин Ю. К., Маурин Л. Н.* Устойчивость термокапиллярной конвекции в жидкости, заполняющей полупространство//ПММ. 1982. Т. 46. № 1. С. 162—165.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. *Братухин Ю. К., Маурин Л. Н.* О конвективных движениях жидкости в почти шаровой полости при подогреве снизу//ПМТФ. 1983. № 3. С. 69—72.
10. *Найфэ А. Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
11. *Братухин Ю. К., Макаров С. О.* О конвективной устойчивости жидкости в шаровой полости//Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 3.
12. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Пермь

Поступила в редакцию
1.VII.1991