МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1992

УДК 532.529

 А. А. ДОЙНИКОВ

# ВРАЩЕНИЕ ДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ В ВИХРЕВОМ ПОЛЕ

Вихревое поле вызывает вращение частиц среды, причем угловая скорость этого вращения равна половине ротора скорости среды [1]. Если в среде находятся дисперсные включения (твердые частицы, капли, газовые пузырьки), то они тоже начинают вращаться. Однако угловая скорость вращения дисперсных частиц не равна угловой скорости частиц среды. В настоящей статье получено выражение для угловой скорости вращения сферической дисперсной частицы в вязкой жидкости во внешнем вихревом поле, обладающем гармонической зависимостью от времени. Это выражение используется затем при исследовании системы двух вращающихся дисперсных частиц, вращение которых возникает вследствие взаимодействия частиц в поле падающей звуковой волны. Оказывается, что подобная система обладает довольно интересным нетривиальным свойством: при определенных условиях она имеет резонансную частоту, на которой вращение частиц относительно жидкости становится наиболее интенсивным.

Уравнение вращательного движения дисперсной частицы в произвольном вихревом поле можно получить, исходя из следующих простых соображений. Будем предполагать, что поле мало меняется на расстояниях порядка линейных размеров частицы. Если бы частица полностью увлекалась жидкостью (ниже несущую среду для определенности будем называть жидкостью), то на нее действовал бы такой же момент сил, который действует на жидкость, занимающую аналогичный объем. Если обозначить момент импульса этой жидкости через $\mathbf{M}$, то действующий на нее момент сил будет равен $d\mathbf{M}/dt$. Однако частица не полностью увлекается жидкостью. Возникает вращение частицы относительно жидкости, в результате чего образуется рассеянное поле, которое приводит к появлению дополнительного момента сил $\mathbf{L}$, действующего на частицу. Таким образом, полный момент сил, действующий на частицу, равен $\mathbf{L} + d\mathbf{M}/dt$. Приравнивая его к производной по времени от момента импульса частицы $\mathbf{M}_1$, получаем уравнение вращательного движения дисперсной частицы в вихревом поле

$$\frac{d\mathbf{M}_1}{dt} = \mathbf{L} + \frac{d\mathbf{M}}{dt} \tag{1}$$

Предположим, что частица имеет форму шара. Тогда

$$\mathbf{M} = \frac{8}{15}\pi R_1^5 \rho_0 \vec{\Omega}(\mathbf{r}_1, t), \quad \mathbf{M}_1 = \frac{8}{15}\pi R_1^5 \rho_1 \vec{\Omega}_1(t)$$

где $\rho_0$ и $\Omega$ — равновесная плотность и угловая скорость вращения жидкости, $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор равновесного центра частицы, $R_1$, $\rho_1$, $\vec{\Omega}_1$ — радиус, плотность и угловая скорость частицы.

Далее, предположим, что зависимость от времени имеет вид $\exp(-i\omega t)$. Выражение для момента сил, действующих на шар, совершающий гармоническое вращение в неподвижной жидкости, можно найти в [2]. Учитывая, что в рассматриваемом случае жидкость тоже вращается, имеем

$$\mathbf{L} = \frac{8}{3}\pi R_1^3 \eta\, [\Omega(\mathbf{r}_1, t) - \Omega_1(t)]\, \frac{\Phi(\xi_1)}{\xi_1}$$

$$\Phi(\xi_1) = 1 + 3\xi_1 + 3\xi_1^2 + \tfrac{3}{2}\xi_1^3 - i(1 + \xi_1)/(1 + \xi_1 + \tfrac{1}{2}\xi_1^2)^{-1}$$

$$\xi_1 = \frac{\delta}{R_1}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho_0}$$

Здесь $\eta$ — динамическая вязкость, $\delta$ — глубина проникновения вязкой волны, $\nu$ — кинематическая вязкость.

Подставляя M, $M_1$ и L в (1), получаем выражение для угловой скорости дисперсной частицы

$$\Omega_1(t) = \rho_0\,[1 + \tfrac{5}{2} i\xi_1 \Phi(\xi_1)]\, \Omega(\mathbf{r}_1, t) / \{\rho_1\,[1 + \tfrac{5}{2} i\xi_1\Phi(\xi_1)\,\rho_0/\rho_1]\}^{-1} \tag{2}$$

Рассмотрим пример, представляющий теоретический и практический интерес. Пусть в вязкой жидкости находятся две сферические частицы, на которые падает звуковая волна, бегущая либо стоячая. В этом случае само звуковое поле является безвихревым и, следовательно, не может непосредственно вызвать вращение частиц. Однако поле, рассеянное частицами,— вихревое и поэтому оно заставляет частицы вращаться. Скорость жидкости запишем в следующем виде: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, где $\mathbf{v}_0$ — скорость падающей звуковой волны, $\mathbf{v}_j$ ($j = 1, 2$) — скорость жидкости, создаваемая движением $j$-ой частицы. Скорость $\mathbf{v}_j$ образуется в результате монопольных, дипольных и вращательных колебаний частицы. Будем полагать, что радиусы частиц $R_1$ и $R_2$ много меньше расстояния $l$ между ними, которое в свою очередь много меньше длины звуковой волны. Это предположение позволяет при вычислении рассеянного поля считать жидкость несжимаемой. Далее, введем относительную угловую скорость вращения $j$-й частицы: $\omega_j = \Omega_j - \Omega(\mathbf{r}_j, t)$. Угловая скорость жидкости в точке нахождения $j$-й частицы в данном случае равна

$$\Omega(\mathbf{r}_j, t) = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}_{ej}(\mathbf{r}_j, t), \quad \mathbf{v}_{e1} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_{e2} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$$

где $\mathbf{v}_{ej}$ — это скорость жидкости в точке нахождения $j$-й частицы в случае, если бы этой частицы не было.

Подставляя $\omega_j$ в (2), получаем

$$\omega_j = \left(\frac{\rho_0}{\rho_j} - 1\right) \Omega(\mathbf{r}_j, t) \Big/ \left[1 + \frac{5}{2} i\xi_j \Phi(\xi_j) \frac{\rho_0}{\rho_j}\right]^{-1}, \quad \xi_j = \frac{\delta}{R_j} \tag{3}$$

Здесь $\rho_j$ — плотность $j$-й частицы.

Найдем величину $\vec{\omega}_j$ с точностью до главных членов по малым параметрам $R_j/l$ и $kR_j$ ($k$ — волновое число). В таком приближении основной вклад в $\vec{\omega}_j$ будут давать дипольные колебания соседней частицы, так как монопольные колебания имеют потенциальный характер:

$$\Omega(\mathbf{r}_1, t) \approx \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}_{D2}(\mathbf{r}_1, t), \quad \Omega(\mathbf{r}_2, t) \approx \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}_{D1}(\mathbf{r}_2, t)$$

$$\mathbf{v}_{Dj} = \left(f_j' - \frac{f_j}{l_j}\right)(\mathbf{u}_j \mathbf{n}_j)\,\mathbf{n}_j - \left(f_j' + \frac{f_j}{l_j}\right)\mathbf{u}_j$$

$$f_j = \frac{a_j \exp(i\alpha l_j)(l_j + i/\alpha)}{l_j^2} + \frac{b_j}{l_j^3}, \quad \alpha = \frac{1+i}{\delta} \tag{4}$$

$$\mathbf{l}_j = \mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \quad l_j = |\mathbf{l}_j|, \quad \mathbf{n}_j = \frac{\mathbf{l}_j}{l_j}, \quad f_j' = \frac{df_j}{dl_j}$$

$$a_j = -\frac{3R_j \exp(-i\alpha R_j)}{2i\alpha}, \quad b_j = -\frac{1}{2} R_j^3 \left[1 - \frac{3}{i\alpha R_j} - \frac{3}{\alpha^2 R_j^2}\right]$$

Здесь $\mathbf{v}_{Dj}$ — скорость жидкости, создаваемая дипольными колебаниями $j$-частицы [2], $\mathbf{u}_j$ — скорость осцилляций $j$-й частицы относительно жидкости, $\mathbf{r}_j$ — радиус-вектор равновесного центра $j$-й частицы.

Величину $\mathbf{u}_j$ можно найти из уравнения дипольного движения частицы [3]

$$-i\omega\, \tfrac{4}{3} \pi \rho_j R_j^3\, [\mathbf{u}_j + \mathbf{v}_{ej}(\mathbf{r}_j, t)] = \mathbf{F}_j - i\omega\, \tfrac{4}{3} \pi \rho_0 R_j^3 \mathbf{v}_{ej}(\mathbf{r}_j, t) \tag{5}$$

$$\mathbf{F}_j = -\left[6\pi\eta R_j \left(1 + \frac{R_j}{\delta}\right) - i\omega 3\pi\rho_0 R_j^2 \delta \left(1 + \frac{2R_j}{9\delta}\right)\right]\mathbf{u}_j$$

где $\mathbf{F}_j$ — сила сопротивления жидкости.

С точностью до главных членов из (5) получаем

$$\mathbf{u}_j = \left(\frac{\rho_0}{\rho_j} - 1\right) \mathbf{v}_0(\mathbf{r}_j, t) \Big/ \left[1 + G(\xi_j) \frac{\rho_0}{2\rho_j}\right]^{-1}$$

$$G(\xi_j) = 1 + \tfrac{9}{2}\,\xi_j + \tfrac{9}{2}\, i\xi_j (1 + \xi_j) \tag{6}$$

Далее, учитывая (4), вычисляем ротор $\mathbf{v}_{Dj}$

$$\nabla \times \mathbf{v}_{Dj} = -\frac{3R_j \exp(ial_j - iaR_j)(1 - ial_j)(\mathbf{n}_j \times \mathbf{u}_j)}{2l_j^2} \qquad (7)$$

Подставляя (6) в (7), а (7) в (3), для относительной угловой скорости 1-й частицы имеем

$$\omega_1 = \frac{3R_2(\rho_1 - \rho_0)(\rho_2 - \rho_0)(1 - ial)\exp(ial)\,[\mathbf{l} \times \mathbf{v}_0(\mathbf{r}_2, t)]}{l^3\,[2\rho_1 + 5i\rho_0\xi_1\Phi(\xi_1)]\,[2\rho_2 + \rho_0 G(\xi_2)]} \qquad (8)$$

где $\mathbf{l} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Ввиду симметрии задачи выражение для $\omega_2$ получается из (8) заменой индекса 1 на индекс 2 и наоборот.

Исследуем поведение величины $\omega_1 = |\vec{\omega}_1|$. Сделаем это на примере плоской бегущей волны

$$\mathbf{v}_0 = \nabla\varphi_0 = i\mathbf{k}A\exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$$

Из (8) имеем

$$\omega_1 = \frac{6\eta R_2 |A(\rho_1 - \rho_0)(\rho_2 - \rho_0)\sin\beta| S(\delta)}{c\rho_0 l^2}$$

$$S(\delta) = \sqrt{1 + \frac{2l}{\delta} + \frac{2l^2}{\delta^2}}\,\exp\left(-\frac{l}{\delta}\right) \Big/ [\delta^2|2\rho_1 + 5i\rho_0\xi_1\Phi(\xi_1)||2\rho_2 + \rho_0 G(\xi_2)|]^{-1}$$

где $c$ — скорость звука, $\beta$ — угол между векторами $\mathbf{l}$ и $\mathbf{k}$.

При малых частотах функция $S(\delta)$ растет с ростом частоты, а при больших частотах она стремится к нулю. Это говорит о том, что функция $S(\delta)$ должна иметь максимум, т. е. существует резонансная частота, при которой частицы вращаются наиболее интенсивно, создавая наиболее мощное характерное рассеянное поле. Ввиду сложности функции $S(\delta)$ получить выражение для резонансной частоты в общем случае не представляется возможным. Нетрудно показать, что максимум этой функции не может находиться ни в области очень низких частот ($\delta >> l$), ни в области очень высоких частот ($\delta << R_j$).

Рассмотрим ситуацию, когда $\delta >> R_j$, а соотношение между $\delta$ и $l$ может быть произвольным. Она возможна вследствие предположения о том, что $l >> R_j$. В этом случае

$$S(\delta) \approx 2R_1^2R_2^2\sqrt{\delta^2 + 2l\delta + 2l^2}\,\exp\left(-\frac{l}{\delta}\right) \Big/ \left(135\rho_0^2\delta^7\right)^{-1}$$

Уравнение экстремумов принимает следующий вид и имеет один действительный корень $\delta_*$:

$$\delta^3 + 2l\delta^2 + 2l^2\delta - \tfrac{1}{3}l^3 = 0$$

$$\delta_* = \frac{1}{3}l\left[\sqrt[3]{\frac{29 + 3\sqrt{97}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{29 - 3\sqrt{97}}{2}} - 2\right] \approx 0{,}144l$$

Соответственно резонансная частота равна $\omega_* \approx 100\nu/l^2$. Как и должно быть, она убывает с ростом $l$. Помимо самого факта существования данной резонансной частоты любопытно то, что своим происхождением эта частота обязана вязкости жидкости.

Вращение частиц, несомненно, должно оказывать влияние на процесс их взаимодействия, в частности на среднюю силу радиационного взаимодействия частиц. Вращение тесно связано с вязкостью жидкости, следовательно, наиболее заметно это влияние должно проявляться в ситуациях, когда длина вязкой волны превышает размеры частиц. В [3] было установлено, что в этом случае значительно меняется величина силы радиационного давления, действующей на одиночную частицу. Логично предположить, что нечто подобное происходит и с силой взаимодействия частиц. Результаты настоящей статьи говорят о том, что корректный расчет указанной силы наряду с акустическими течениями обязательно должен учитывать и вращение взаимодействующих дисперсных частиц.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
3. *Данилов С. Д.* Средняя сила, действующая на малую сферу в поле бегущей волны в вязкой жидкости//Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 1. С. 45—49.

Минск

Поступила в редакцию
5.VIII.1991