

УДК 533.72

© 1992 г. В. С. ГАЛКИН, Н. К. МАКАШЕВ

МОДИФИКАЦИЯ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕТОДА ЧЕПМЕНА — ЭНСКОГА ДЛЯ СМЕСИ ГАЗОВ

Предложено преобразование уравнений первого приближения метода Чепмена — Энскога для смеси газов с замороженными внутренними степенями свободы. В итоге решение для возмущения функций распределения записывается через диффузионные скорости и градиент температуры, сильно упрощаются вывод соотношений Стефана — Максвелла и вычисление теплового потока. Дано обобщение указанных преобразований на смесь многоатомных газов при неравновесном возбуждении внутренних степеней свободы молекул. Модификация первого приближения метода Чепмена — Энскога не затрагивает соотношений, используемых для вычисления вязкости смеси, поэтому соответствующая часть решения не рассматривается.

Первое приближение по числу Кнудсена $Kn \ll 1$ в классическом методе Чепмена — Энскога [1—3] позволяет найти возмущение $\varphi_i = O(Kn)$ максвелловских распределений молекул i -го сорта ($i = 1, \dots, K$, K — число компонентов смеси) с целью вычисления переносных свойств в приближении Навье — Стокса, а также получения одного из граничных условий для решения уравнения Больцмана в кнудсеновском слое [3]. Внутренние состояния молекул при этом считаются замороженными.

Решение для φ_i и, следовательно, формулы для диффузионных скоростей V_i и теплового потока q в этом методе даются линейными зависимостями от градиента температуры ∇T и диффузионных термодинамических сил d_j . В ряде случаев удобнее выражать φ_i (при выводе граничных условий на поверхностях с гетерогенными процессами [4]), d_i и q (в газодинамических расчетах [5—7]) через ∇T и V_j . Эти связи в рамках обычного алгоритма получаются путем громоздких преобразований. Поэтому, например, в [1] соответствующий вывод ограничен низшими приближениями по полиномам Сонина, точность которых во многих случаях недостаточна.

Принципиальное усовершенствование алгоритма вывода формул для теплового потока и соотношений Стефана — Максвелла, исходя из обычного метода Чепмена — Энскога, дано в [5], где эти выражения получены в любом приближении по полиномам Сонина путем специальных линейных преобразований систем уравнений для коэффициентов разложения φ_i по этим полиномам и соотношений для V_i , q , записанных через ∇T , d_j . Найденные в [5] линейные преобразования позволили избавиться от двойного обращения матриц высокого порядка. В итоге была получена существенно более простая система уравнений переноса для расчета диссипативных высокотемпературных течений смесей газов [5—7]. Внутренняя структура молекул учитывается в ней путем использования приближения локального равновесия по внутренним степеням свободы, поправки Гиршфельдера — Эйкена [1] к коэффициенту теплопроводности и энергий образования молекул разных сортов.

В данной статье описана методика, которая обеспечивает прямой вывод соотношений Стефана — Максвелла и формулы для теплового потока, наглядную и легко обобщаемую на сложные системы процедуру вывода φ_i как функции ∇T , V_j в произвольном приближении по полиномам Сонина. Методика основана на представлении φ_i в виде комбинации $\varphi_i = (m_i/kT)V_i c_i + \psi_i$ и исключении из уравнений для φ_i диффузионных термодинамических сил d_i . Здесь ψ_i — новые зависимые переменные, m_i и c_i — масса и собственная скорость молекулы i -го сорта, k — постоянная Больцмана, T — температура.

Подчеркнем, что такая модификация может быть также получена с помощью обобщенного метода Чепмена — Энскога, предложенного в [8, 9] и развитого в [10—13], а именно варианта [10] этого

метода для многоскоростной однотемпературной смеси газов путем разложения уравнений и решения по степеням

$$V_i \sqrt{m_i / kT} \ll 1.$$

Ниже предлагаемая процедура проиллюстрирована на простейшей системе — смеси газов с замороженными внутренними степенями свободы молекул. Аналогичная модификация дана для смеси газов с возбужденными внутренними состояниями и химическими реакциями. Особое внимание уделено неравновесному обобщенному приближению Эйкена [8, 9], с тем чтобы получить необходимые для практики поправки к соотношениями Стефана — Максвелла на неравновесную многоатомность молекул, отсутствующие в [5—7].

1. Далее в возмущении φ_i учитываем только слагаемые, дающие вклад в диффузионный и тепловой потоки. Используя обозначения [2], для таких «усеченных» функций φ_i имеем систему уравнений

$$f_i^{(0)} \left[\frac{1}{x_i} c_i d_i + \left(w_i^2 - \frac{5}{2} \right) c_i \nabla \ln T \right] = - \sum_{j=1}^K n_j J_{ij}(\varphi) \equiv L_i(\varphi) \quad (1.1)$$

$$x_i = \frac{n_i}{n}, \quad d_i = \nabla x_i + \left(x_i - \frac{\rho_i}{\rho} \right) \nabla \ln p - \frac{\rho_i}{\rho} \left(F_i - \sum_{j=1}^K \frac{\rho_j}{\rho} F_j \right)$$

$$c_i = \xi_i - u, \quad w_i = c_i (m_i / 2kT)^{1/2}$$

На решение системы (1.1) накладываются условия единственности

$$(\varphi_i, 1) = 0, \quad \sum_{i=1}^K (\varphi_i, m_i c_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^K (\varphi_i, m_i c_i^2) = 0 \quad (1.2)$$

$$(a, b) \equiv \int f_i^{(0)} a b_i d c_i$$

Введем новую зависимую переменную

$$\psi_i = \varphi_i - (m_i / kT) \nabla c_i \equiv \varphi_i - \varphi_i^{(0)} \quad (1.3)$$

причем, по определению, ψ_i не дает вклада в V_i , т. е.

$$n_i V_i \equiv (\varphi_i, c_i) = (\varphi_i^{(0)}, c_i), \quad (\psi_i, c_i) = 0 \quad (1.4)$$

Умножим (1.1) на $m_i c_i$ и проинтегрируем по c_i . В результате получим

$$d_i = \frac{1}{\rho} (R_i^{(0)} + R_i^{(1)}) \quad (1.5)$$

$$R_i^{(0)} \equiv \left(\frac{L_i(\varphi^{(0)})}{f_i^{(0)}}, m_i c_i \right) = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^K m_j n_j [w_j, w_i]_{ij} (V_j - V_i)$$

$$R_i^{(1)} \equiv \left(\frac{L_i(\psi)}{f_i^{(0)}}, m_i c_i \right)$$

Исключив d_i из (1.1) с помощью (1.5) и с учетом (1.3), найдем, что ψ_i удовлетворяют системе уравнений

$$f_i^{(0)} \left(w_i^2 - \frac{5}{2} \right) c_i \nabla \ln T - L_i^*(\varphi^{(0)}) = L_i^*(\psi) \quad (1.6)$$

$$L_i^*(\chi) \equiv L_i(\chi) - f_i^{(0)} c_i \frac{1}{x_i \rho} \left(\frac{L_i(\chi)}{f_i^{(0)}}, m_i c_i \right)$$

В неоднородной части (1.6) в качестве свободных параметров вместо ∇T и

d_i стоят ∇T и V_r . Следовательно, ψ_i выражаются через эти величины, а равенства (1.5) представляют собой соотношения Стефана — Максвелла, где d_i есть линейная комбинация ∇T и V_r . Аналогичные по структуре и свойствам уравнения для неравновесных поправок к максвелловским распределениям встречаются в варианте [10—12] обобщенного метода Чепмена — Энскога, примененного к однотемпературной многоскоростной смеси газов при $V_i \sqrt{m_i/kT} \ll 1$. Эквивалентность разных вариантов этого метода показана в [9]. Решение системы (1.6), как можно показать, существует и в случае выполнения условий (1.2) и (1.4) единственно. Разлагая $L_i(\varphi^{(0)})$ по ортогональным полиномам около $f_i^{(0)}$, преобразуем (1.6) к виду

$$f_i^{(0)} \left[\left(w_i^2 - \frac{5}{2} \right) c_i \nabla \ln T - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=1}^K \gamma_{ij}^{(p)} S_{3/2}^{(p)}(w_i^2) c_i (V_i - V_j) \right] = L_i^*(\psi) \quad (1.7)$$

$$\gamma_{ij}^{(p)} = - \frac{m_i n_j}{2kT} \frac{\sqrt{\pi} p!}{\Gamma(p + 5/2)} [S_{3/2}^{(p)}(w_i^2) w_i, w_j]_{ij}$$

Здесь $S_{3/2}^{(p)}$ — полиномы Сонина; интегральные скобки определены аналогично [1], отличаясь перестановкой членов от определения, данного в [2]; Γ — гамма-функция.

Обозначим через ψ_i^T решение, соответствующее первому члену левой части (1.7). Учитывая в разложениях по $S_{3/2}^{(p)}$ члены вплоть до N -го порядка включительно, находим

$$\psi_i^T = -A_i(w_i^2) c_i \nabla \ln T, \quad A_i = - \frac{m_i}{kT} \sum_{p=1}^N a_{ip}^{(N)} S_{3/2}^{(p)}$$

Для коэффициентов $a_{ip}^{(N)}$ обычным способом можно получить систему уравнений

$$\sum_{j=1}^K \sum_{p=1}^N q_{ij}^{mp} a_{jp}^{(N)} = \frac{15}{4} x_i \rho_{im}; \quad m = 1, \dots, N; \quad i = 1, \dots, K \quad (1.8)$$

$$q_{ij}^{mp} = \frac{n}{kT} \sqrt{m_i m_j} \left\{ \delta_{ij} \sum_{h=1}^K x_i x_h [S_{3/2}^{(m)}(w_i^2) w_i, S_{3/2}^{(p)}(w_j^2) w_j]_{ih} + \right. \\ \left. + x_i x_j [S_{3/2}^{(m)}(w_i^2) w_i, S_{3/2}^{(p)}(w_j^2) w_j]_{ij} \right\}$$

Она отличается от аналогичной в обычном варианте метода Чепмена — Энскога [1, 2] отсутствием слагаемых при $p=0$, $m=0$, что является следствием условия (1.4).

Рассмотрим теперь решение ψ_i^V , индуцируемое вторым слагаемым слева в (1.7), которое может быть записано следующим образом:

$$\psi_i^V = - \sum_{h=1}^K D_i^h(w_i^2) c_i W_h, \quad \rho_i V_i \equiv \sum_{h=1}^K \left(\delta_{ih} - \frac{\rho_i}{\rho} \right) W_h \quad (1.9)$$

Векторы W_h введены ввиду линейной зависимости V_r . В (1.9) функции $D_i^h(w_i^2)$ определяются следующими из (1.7), (1.9) уравнениями

$$-f_i^{(0)} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^K \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_{ij}^{(p)} S_{3/2}^{(p)} c_i (\delta_{ij} - \delta_{ji}) = \sum_{l=1}^K x_i x_l I_l(D_i^h \rho_c) \quad (1.10)$$

и в силу (1.4) обладают свойством

$$\int f_i^{(0)} D_i^h w_i^2 d c_i = 0, \quad i = 1, \dots, K \quad (1.11)$$

Суммируя (1.10) по l , найдем

$$\sum_{i=1}^K x_i x_j J_{ij} \left(\sum_{i=1}^K D_i^h \rho_i \right) = 0$$

Следовательно, без уменьшения общности можно положить, что

$$\sum_{i=1}^K D_i^h \rho_i = 0 \quad (1.12)$$

С учетом (1.12) и связи между V_i и W_h решение для ψ_i^V представим в виде

$$\psi_i^V = - \sum_{h=1}^K D_i^h \rho_h c_i V_h \quad (1.13)$$

В N -м приближении по полиномам Сонина

$$D_i^h (w_i^2) \rho_h = \frac{m_i}{kT} \sum_{p=1}^N d_{ip}^{h(N)} S_{3/2}^{(p)}(w_i^2) \quad (1.14)$$

Здесь учтено (1.11): разложение D_i^h по полиномам Сонина начинается с $p=1$. Для $d_{ip}^{h(N)}$ получается система уравнений

$$\sum_{j=1}^K \sum_{p=1}^N q_{ij}^{rp} d_{jp}^{h(N)} = q_{ih}^0 \quad (1.15)$$

$$i = 1, \dots, K; \quad h = 1, \dots, K; \quad r = 1, \dots, N$$

При записи правых частей (1.15) использован закон сохранения импульса сталкивающихся молекул. В силу этого закона имеем также [5] $\sum_h q_{ih}^0 = 0$. Поэтому, суммируя (1.15) по h , находим, что равенство

$$\sum_{h=1}^K d_{ip}^{h(N)} = 0; \quad i = 1, \dots, K; \quad p = 1, \dots, N \quad (1.16)$$

являющееся следствием (1.12) и (1.14), есть условие совместности системы (1.15).

Таким образом, ψ_i найдены. Теперь по ним можно вычислить соотношения Стефана — Максвелла и тепловой поток q . Результат имеет известный вид [5]

$$d_i = \sum_{j=1}^K \frac{x_j x_i}{D_{ij}(1) f_{ij}(N)} (V_j - V_i) - \frac{2}{3} \sum_{i=1}^K \sum_{p=1}^N \alpha_{ip}^{(N)} q_{ij}^{0p} \nabla \ln T \quad (1.17)$$

$$f_{ij}^{-1}(N) = 1 + \frac{2}{3} \frac{D_{ij}(1)}{x_i x_j} \sum_{h=1}^K \sum_{r=1}^N d_{hr}^{(N)} q_{ij}^{0r}, \quad D_{ij}(1) = \frac{3kT}{16n\mu_{ij}\Omega_{ij}^{(1,1)}}$$

$$q = \sum_{i=1}^K \frac{m_i}{2} \int f_i^{(0)} \varphi_i c_i^2 c_i dc_i = \frac{5}{2} kT \sum_{i=1}^K n_i V_i - \lambda \nabla T + nkT \sum_{i=1}^K k_{Ti} V_i$$

$$\lambda = \frac{5}{2} nk \sum_{i=1}^K x_i \alpha_{ii}^{(N)}, \quad k_{Ti} = \frac{5}{2} \sum_{j=1}^K x_j d_{ji}^{(N)} \quad (1.18)$$

Здесь λ и k_{Ti} — истинный коэффициент теплопроводности смеси и термодиффузионные отношения, рассчитываемые соответственно по ψ_i^T и ψ_i^V ; $D_{ij}(1)$ — коэффициент бинарной диффузии в первом приближении по полиномам Сонина. Уравнения (1.8), (1.15) совпадают с уравнениями (2.18), (2.19) для коэффициентов α_{ip} и β_{ijp} работы [5], т. е. $\alpha_{ip}^{(N)} = \alpha_{ip}$, $d_{ip}^{(N)} = \beta_{ijp}$. Для экономии места здесь не приводим выписанные в [5] через определители решения для

этих коэффициентов. С их помощью можно убедиться в совпадении приведенных выше в (1.18) и полученных в [5] выражений для λ и k_{T_i} , а также в том, что коэффициент при $\nabla \ln T$ в (1.17) равен k_{T_i} .

2. Рассмотрим случай смесей многоатомных газов. При локальном равновесии по внутренним степеням свободы решение с формальной точки зрения близко изложенному в разд. 1: в результате получаются соотношения Стефана — Максвелла, связывающие d_i с ∇T и V_p , а также выражение для потока тепла q как функции ∇T и V_p . Отличия связаны с появлением новой независимой переменной $E_{i\alpha}$ — внутренней энергии молекул сорта i в состоянии α и дополнительного слагаемого

$$\frac{1}{kT} [E_{i\alpha} - E_i(T)] \left(n_i E_i(T) \equiv \sum_{\alpha} n_{i\alpha}^{(0)} E_{i\alpha} \right)$$

в круглых скобках при $\nabla \ln T$ слева в (1.1). Здесь $n_{i\alpha}^{(0)}$ — равновесное значение $n_{i\alpha}$ — числовой плотности молекул i -го сорта в α -м состоянии, $E_i(T)$ — равновесное значение средней внутренней энергии молекул сорта i .

Ситуация становится существенно иной в случае неравновесного возбуждения молекул. Рассмотрим ее в часто используемом предположении, что вероятности неупругих столкновений малы по сравнению с вероятностями упругих столкновений молекул. Уравнения для усеченной аналогично разд. 1 неравновесной поправки $f_{i\alpha}^{(0)} \varphi_{i\alpha}$, где $f_{i\alpha}^{(0)} = X_{i\alpha} f_i^{(0)}$, $X_{i\alpha} = n_{i\alpha} / n_i$, в данном случае имеют вид

$$X_{i\alpha} f_i^{(0)} \left[\left(w_i^2 - \frac{5}{2} \right) c_i \nabla \ln T + \frac{n}{n_{i\alpha}} d_{i\alpha} c_i \right] = L_{i\alpha}^e(\varphi) \quad (2.1)$$

$$d_{i\alpha} = X_{i\alpha} d_i + x_i \nabla X_{i\alpha}$$

где $L_{i\alpha}^e(\varphi)$ — сумма линеаризованных интегралов упругих столкновений.

Вводя индекс $I \equiv i\alpha$, решение (2.1) можно формально свести к изложенному в разд. 1. Однако более эффективен следующий подход, допускающий различные дальнейшие обобщения.

С помощью скалярного произведения

$$\langle A, B \rangle_i \equiv \sum_{\alpha} X_{i\alpha} A_{i\alpha} B_{i\alpha}$$

систему уравнений (2.1) и следующие из нее равенства

$$d_{i\alpha} = \frac{1}{p} \left(\frac{L_{i\alpha}^e(\varphi)}{f_i^{(0)}}, m_i c_i \right)$$

можно представить в эквивалентной форме — в проекциях на единицу и ортогональное дополнение к ней

$$f_i^{(0)} \left[\left(w_i^2 - \frac{5}{2} \right) c_i \nabla \ln T + \frac{1}{x_i} d_i c_i \right] = L_i^e(\varphi) \equiv \sum_{\alpha} L_{i\alpha}^e(\varphi) \quad (2.2)$$

$$d_i = \frac{1}{p} \left(\frac{L_i^e(\varphi)}{f_i^{(0)}}, m_i c_i \right) \quad (2.3)$$

$$f_i^{(0)} c_i \nabla X_{i\alpha} = L_{i\alpha}^e(\varphi) - X_{i\alpha} L_i^e(\varphi) \equiv L_{i\alpha}^0(\varphi) \quad (2.4)$$

$$\nabla X_{i\alpha} = \frac{1}{x_i p} \left(\frac{L_{i\alpha}^0(\varphi)}{f_i^{(0)}}, m_i c_i \right) \quad (2.5)$$

Входящие в $L_{i\alpha}^e(\varphi)$ дифференциальные сечения $d\sigma_{i\alpha\beta}$ упругих столкновений

запишем в виде $d\sigma_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} d\sigma_{ij}$, где множитель $S_{\alpha\beta}$ воспроизводит зависимость сечения от возбуждения частиц. В отсутствие такой зависимости $S_{i\alpha} = \delta_{i\alpha}$.

Из анализа (2.2), (2.4) следует, что $\varphi_{i\alpha}$ можно представить как сумму $\varphi_i^* + \theta_{i\alpha}$, где $\theta_{i\alpha}$ обладает свойством $L_i^*(\theta) = 0$, а φ_i^* — решение системы (1.1), если в (1.1) сечения $d\sigma_{ij}$ заменить эффективными величинами $d\sigma_{ij}^*$

$$d\sigma_{ij}^* = S_{ij}^* d\sigma_{ij}, \quad S_{ij}^* \equiv \sum_{\alpha\beta} X_{i\alpha} X_{j\beta} S_{\alpha\beta} \quad (2.6)$$

Для $\theta_{i\alpha}$ справедлива система уравнений, следующая из (2.4)

$$f_i^{(0)} c_i \nabla X_{i\alpha} - L_{i\alpha}^{*e}(\varphi^*) = L_{i\alpha}^*(\theta) \quad (2.7)$$

где в $L_{i\alpha}^{*e}(\varphi^*)$ вместо $d\sigma_{\alpha\beta}$ стоит величина

$$S_{\alpha\beta}^* d\sigma_{ij} \equiv \left(S_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma} X_{i\gamma} S_{\gamma\beta} \right) d\sigma_{ij}$$

Уравнения (2.2) для φ_i^* есть результат усреднения (2.1) по внутренним состояниям молекул, а их решение описывает соответствующим образом усредненную по этим состояниям неравновесную поправку $\varphi_{i\alpha}$. Существенно, что результат усреднения $\varphi_{i\alpha}$, т. е. φ_i^* , дается решением для смеси газов с замороженными внутренними степенями свободы молекул, описанным в разд. 1, но с поправкой (2.6) на многоатомность и возбуждение частиц. То же самое, естественно, справедливо и в отношении получающейся из (2.3) части соотношений Стефана — Максвелла, а также определяемого φ_i^* вклада в «поступательную» часть потока тепла. Это обстоятельство упрощает решение и сокращает объем необходимых вычислений.

Уравнения (2.4) или (2.7) определяют $\theta_{i\alpha}$ — отклонение $\varphi_{i\alpha}$ от φ_i^* . При записи решений для φ_i^* и $\theta_{i\alpha}$ через ∇T , V_j^* и $v_{j\beta}^* = V_{j\beta} - V_j^*$ из (2.5) получается вторая часть соотношений Стефана — Максвелла, т. е. отсутствующая в [5] поправка к этим соотношениям на «многоатомность». Эти соотношения объясняют появление в рассматриваемом случае именно двух групп соотношений Стефана — Максвелла.

Следует заметить, что в случае смеси многоатомных газов количество групп соотношений Стефана — Максвелла, равное двум, — это минимум, так как при разделении внутреннего состояния молекул на различные «моды» (вращения, колебания и т. п.), когда $\alpha \equiv \alpha_1, \alpha_2, \dots$, целесообразно проведение дополнительных операций усреднения (и проецирования) уравнений (2.7) и их решений по части состояний многоатомных молекул. Выполняемые аналогично, эти преобразования здесь не рассматриваются.

Вернемся к вычислению $\theta_{i\alpha}$. Кардинальные упрощения здесь возникают при использовании предположения о независимости сечений упругих столкновений от возбуждения частиц, что является хорошим приближением в условиях, когда верхние энергетические уровни молекул слабо заселены (достаточно низкие значения температуры смеси). При этом $S_{\alpha\beta} = 1$, $S_{\alpha\beta}^* \equiv 0$, $\varphi_i^* = \varphi_i$, а в уравнениях (2.7) $L_{i\alpha}^{*e}(\varphi^*) \equiv 0$.

Решение получившейся упрощенной системы уравнений для $\theta_{i\alpha}$ может быть получено аналогично изложенному в разд. 1 с помощью введения новой зависимой переменной $\lambda_{i\alpha} = \theta_{i\alpha} - \theta_{i\alpha}^{(0)}$, $\theta_{i\alpha}^{(0)} \equiv (m_i/kT) c_{i\alpha}$. Однако здесь воспользуемся тем, что это решение фактически известно и соответствует обобщенному неравновесному приближению Эйкена [8, 9]. Оно имеет вид

$$\theta_{i\alpha} = -H_i(w_i^2) c_i \nabla \ln X_{i\alpha} \quad (2.8)$$

Функции H_i удовлетворяют уравнениям

$$f_i^{(0)} c_i = \sum_{j=1}^K \int f_i^{(0)} f_j^{(0)} (H_i c_i - H_i' c_i') g_{ij} d\sigma_{ij} dc_j$$

где g_{ij} — относительная скорость сталкивающихся молекул. Представляя H_i в виде разложения по полиномам Сонина

$$H_i(w_i^2) = \sum_{p=0}^N h_{ip}^{(N)} S_{3/2}^{(p)}(w_i^2) \quad (2.9)$$

для коэффициентов $h_{ip}^{(N)}$ в этом разложении имеем систему

$$\sum_{j=1}^K \sum_{p=0}^N n_j h_{jp}^{(N)} [S_{3/2}^{(q)}(w_i^2) w_{ip}, S_{3/2}^{(p)}(w_i^2) w_{ij}] = \frac{3}{2} \delta_{0q}$$

$$i = 1, \dots, K; q = 0, 1, \dots, N$$

так что

$$h_{ip}^{(0)} = \left[\sum_{j=1}^K \frac{x_j kT}{m_j D_{ij}(1)} \right]^{-1}$$

В силу изложенного

$$v_{i\alpha} \equiv V_{i\alpha} - V_i = -h_{ip}^{(N)} \frac{kT}{m_i} \nabla \ln X_{i\alpha}$$

а обращение этого равенства дает вторую часть соотношений Стефана — Максвелла, т. е. (2.5)

$$\nabla X_{i\alpha} = - \frac{m_i}{kT h_{ip}^{(N)}} X_{i\alpha} (V_{i\alpha} - V_i) \quad (2.10)$$

Таким образом, в рамках обычно используемого на практике неравновесного приближения Эйкена (малость вероятностей неупругих столкновений, $S_{in\beta} = 1$) имеем две группы соотношений Стефана — Максвелла (1.17), (2.10), поток тепла [8, 9]

$$q = q_t + q_E, \quad q_E = \sum_{i\alpha} n_{i\alpha} E_{i\alpha} V_{i\alpha}$$

Здесь q_t дается выражением (1.18).

Наконец, с учетом (2.6) — (2.10) решение для $\theta_{i\alpha}$ можно записать как функцию $v_{i\alpha}$

$$\theta_{i\alpha} = \frac{m_i}{kT} \sum_{p=0}^N \frac{h_{ip}^{(N)}}{h_{ip}^{(0)}} S_{3/2}^{(p)}(w_i^2) c_i v_{i\alpha} \quad (2.11)$$

Введенная ранее новая зависимая переменная $\lambda_{i\alpha} = \theta_{i\alpha} - \theta_{i\alpha}^{(0)}$ представляется аналогичным выражением, но с суммой по p от 1 до N .

Формула (2.11) служит хорошей иллюстрацией особенностей решения в рамках предлагаемой модификации и обобщенного метода Чепмена — Энскога. Поскольку в (2.11) справа входит отношение коэффициентов h , малость в сравнении с единицей величины $\theta_{i\alpha}$ обеспечивается следующими из уравнений переноса условиями на макропараметры $v_{i\alpha}$; эти условия здесь совпадают с соотношениями Стефана — Максвелла (2.10).

В общем случае, когда не выполняются указанные выше предположения о сечениях столкновений, необходимо исходить из уравнений обобщенного метода Чепмена — Энскога. В частности, вместо (2.1) — (2.5) будем иметь соотношения, получающиеся заменой $L_{i\alpha}^*(\varphi)$ на $L_{i\alpha}^*(\varphi) + L_{i\alpha}^v(\varphi)$, где $L_{i\alpha}^v(\varphi)$ — линейный симметризованный оператор неупругих столкновений [8, 9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гирифельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 929 с.
2. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
3. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
4. Cipolla J. W. Jr., Lang H., Loyalka S. K. Temperature and partial pressure jumps during evaporation and condensation of a multicomponent gas mixture//Rarefied Gas Dynamics. V. 2. Gottingen, 1974. P. F 4/1 — F 4/10.
5. Колесников А. Ф., Тирский Г. А. Уравнения гидродинамики для частично ионизованных смесей газов с коэффициентами переноса в высших приближениях//Молекул. газодинам. М.: Наука, 1982. С. 20—44.
6. Гершбейн Э. А., Пейгин С. В., Тирский Г. А. Сверхзвуковое обтекание тел при малых и умеренных числах Рейнольдса//Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Мех. жидкости и газа. 1985. Т. 19. С. 3—85.
7. Пилюгин Н. Н., Тирский Г. А. Динамика ионизованного излучающего газа. М.: Изд-во МГУ, 1989. 309 с.
8. Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К. Обобщенный метод Чепмена — Энскога. 1. Уравнения неравновесной газодинамики//Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 5. С. 66—76.
9. Kogan M. N., Galkin V. S., Makashev N. K. Generalized Chapman — Enskog method: derivation of the nonequilibrium gasdynamic equations//Rar. Gas Dynamics. Pap. 11th Int. Symp. Cannes, 1978. V. 2. Paris, 1979. P. 693—734.
10. Мацук В. А., Рыков В. А. О методе Чепмена — Энскога для многоскоростной многотемпературной реагирующей смеси газов//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18. № 5. С. 1230—1242.
11. Мацук В. А., Рыков В. А. Распространение метода Чепмена — Энскога на смеси реагирующих газов//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18. № 1. С. 167—182.
12. Колесниченко Е. Г., Лосев С. А. Кинетика релаксационных процессов в движущихся средах//Химия плазмы. Вып. 6. М.: Атомиздат, 1979. С. 209—229.
13. Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К. Область применимости и основные особенности обобщенного метода Чепмена — Энскога//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 126—136.

Москва

Поступила в редакцию
2.VII.1990