

УДК 533.69.01:517.9

© 1992 г. Д. Н. ГОРЕЛОВ

## ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ

Краевые задачи обтекания профиля сводятся обычно к решению сингулярных интегральных уравнений. Эти уравнения имеют помимо сингулярной параметрическую особенность. В роли параметра выступает максимальная толщина профиля  $\delta$ . Проявляется эта особенность в том, что по мере утоньшения профиля уменьшается расстояние между соседними точками на верхней и нижней сторонах его контура. В результате уравнения, записанные отдельно для верхней и нижней сторон профиля, при  $\delta \rightarrow 0$  становятся одинаковыми. Именно это обстоятельство создает серьезные трудности при численном решении интегральных уравнений в случае тонкого профиля, а также в окрестности задней кромки для профиля произвольной толщины. Так, например, при решении задач обтекания профиля методом дискретных вихрей, который широко применяется в практических расчетах, по мере утоньшения профиля приходится беспредельно увеличивать число дискретных вихрей [1].

В настоящей работе получена система интегральных уравнений относительно касательных составляющих скоростей на верхней и нижней сторонах профиля, которая не имеет указанной параметрической особенности. Приведен пример решения этих уравнений методом дискретных вихрей, который показал высокую их эффективность для решения задач обтекания профиля любой толщины, включая и сколь угодно малую.

1. Рассмотрим в плоскости комплексного переменного потенциальное течение несжимаемой жидкости около неподвижного произвольного замкнутого контура  $L$  с одной угловой точкой в задней кромке (фиг. 1). Соответствующая краевая задача для комплексной скорости  $\bar{v}(z) = v_x(x, y) - iv_y(x, y)$ , являющейся аналитической функцией, сводится к следующему интегральному уравнению относительно касательной составляющей скорости  $v_t(z)$  на  $L$ :

$$\sqrt{2} v_t(z) = e^{i\theta(z)} \bar{v}_0(z), \quad z \in L \quad (1.1)$$

$$\bar{v}_0(z) = v_{0x} - iv_{0y} = \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{v_t(\xi) e^{-i\theta(\xi)} d\xi}{\xi - z}, \quad z \in L \quad (1.2)$$

Здесь  $\bar{v}_\infty = \bar{v}(\infty)$ ,  $\theta(z)$  — угол между касательной к контуру  $L$  в точке  $z$  и осью  $x$ .

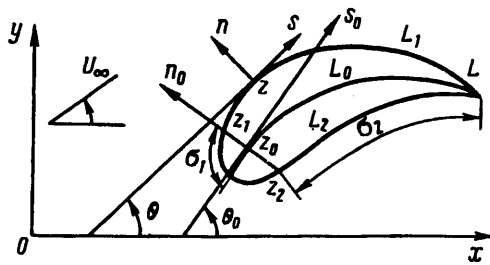
Интеграл в правой части (1.2) понимается в смысле главного значения по Коши, а комплексная скорость  $\bar{v}_0(z)$  равна полусумме предельных значений  $\bar{v}(z)$  на контуре  $L$  при подходе к нему из внешней и внутренней областей. При этом предполагается, что внутри контура  $L$  находится жидкость, которая, как следует из (1.1) и условия непротекания, покоится.

Разделяя в (1.1) вещественную и мнимую части, получим два равносильных сингулярных интегральных уравнения:

$$\text{Im} \{e^{i\theta(z)} \bar{v}_0(z)\} = 0, \quad z \in L \quad (1.3)$$

$$\sqrt{2} v_t(z) = \text{Re} \{e^{i\theta(z)} \bar{v}_0(z)\} d, \quad z \in L \quad (1.4)$$

Можно показать, что в (1.3) ядро имеет особенность типа Коши, а в (1.4) — слабую особенность.



Фиг. 1

Если ввести вектор  $v_0$  с компонентами  $v_{0x}, v_{0y}$ , определяемые выражением (1.2), то уравнения (1.3), (1.4) можно записать в виде

$$v_0(z) n(z) = 0, \quad v_0(z) s(z) = \frac{1}{2} v_t(z) \quad (1.5)$$

Таким образом, интегральные уравнения (1.3) и (1.4) налагают условия на нормальную и касательную составляющие вектора  $v_0$  соответственно. Искомой функцией в обоих уравнениях является касательная составляющая скорости жидкости  $v_t(z)$  на контуре  $L$ . Выбор уравнения проводится с учетом специфики рассматриваемой задачи. При этом циркуляция скорости вокруг профиля находится с помощью постулата Жуковского.

Следует отметить, что исходная краевая задача может быть сведена к иным интегральным уравнениям, равносильным (1.3) и (1.4) (см., например, [2]).

2. Запишем уравнения (1.3), (1.4) отдельно для верхней и нижней сторон профиля. Пусть средняя линия  $L_0$  разделяет контур  $L$  на два разомкнутых контура  $L_1$  и  $L_2$ . Положение точки  $z_k \in L_k, k = 1, 2$  определяем дуговой координатой  $\sigma_k$ , полагая, что  $\sigma_1$  отсчитывается от передней кромки вдоль  $L_1$ , а  $\sigma_2$  — от задней кромки вдоль  $L_2$  по часовой стрелке (фиг. 1).

Тогда уравнения (1.3), (1.4), записанные отдельно для верхнего  $L_1$  и нижнего  $L_2$  контуров, принимают вид

$$\text{Im} \{ e^{i\theta_k(\sigma_k)} \bar{v}_{0k}(\sigma_k) \} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (2.1)$$

$$-\frac{1}{2} \gamma_k(\sigma_k) = \text{Re} \{ e^{i\theta_k(\sigma_k)} \bar{v}_{0k}(\sigma_k) \}, \quad k = 1, 2 \quad (2.2)$$

$$\gamma_k(\sigma_k) = -v_t(z_k), \quad \theta_k(\sigma_k) = \theta(z_k)$$

$$\bar{v}_{0k}(\sigma_k) = \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\gamma_1(s_1) ds_1}{z_k(\sigma_k) - \xi_1(s_1)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\gamma_2(s_2) ds_2}{z_k(\sigma_k) - \xi_2(s_2)} \quad k = 1, 2 \quad (2.3)$$

Системы уравнений (2.1) и (2.2) можно решать независимо друг от друга, а искомыми функциями в них являются  $\gamma_1(\sigma_1), \gamma_2(\sigma_2)$ .

Предположим теперь, что между точками  $z_1, z_2$  установлено некоторое соответствие, при котором с уменьшением максимальной толщины профиля  $\delta$ , до нуля точки  $z_1, z_2$  переходят в одну точку  $z_0 \in L_0$ . Такое соответствие можно установить, выбирая, например, точки  $z_1, z_2$  на пересечении нормали к  $L_0$  в точке  $z_0$  с контурами  $L_1, L_2$ .

Сделаем линейные преобразования в каждой системе (2.1), (2.2), складывая и вычитая уравнения, из которых они составлены. В результате системы (2.1) и (2.2) перейдут в системы интегральных уравнений соответственно

$$\operatorname{Im} \{e^{i\theta_1(\sigma_1)} \bar{v}_{01}(\sigma_1) \pm e^{i\theta_2(\sigma_2)} \bar{v}_{02}(\sigma_2)\} = 0 \quad (2.4)$$

$$-\frac{1}{2} [\gamma_1(\sigma_1) \pm \gamma_2(\sigma_2)] = \operatorname{Re} \{e^{i\theta_1(\sigma_1)} \bar{v}_{01}(\sigma_1) \pm e^{i\theta_2(\sigma_2)} \bar{v}_{02}(\sigma_2)\} \quad (2.5)$$

В соответствии с (1.3)—(1.5) и (2.1)—(2.3) уравнения (2.4) определяют собой сумму и разность нормальных составляющих скорости  $v_0$  на контурах  $L_1, L_2$  в точках  $z_1, z_2$ , а (2.5) — сумму и разность касательных составляющих  $v_0$  в тех же точках контуров  $L_1, L_2$ .

Исследуем уравнения (2.4) и (2.5) при  $\delta_s \rightarrow 0$ . Прежде всего отметим, что в формулу (2.3) для  $\bar{v}_{0k}$  входят как интегралы типа Коши ( $z_k \notin L_m, k \neq m; k, m = 1, 2$ ), так и особые интегралы ( $z_k \in L_k; k = 1, 2$ ), понимаемые в смысле главного значения по Коши. Предельные значения интегралов типа Коши при  $\delta_s \rightarrow 0$  ( $z_k \rightarrow z_m, k \neq m$ ) можно получить по формулам Сохоцкого — Племели [3]. Учитывая, что  $ds_k = d\zeta_k \exp(-i\theta_k)$ , имеем

$$\lim_{z_k \rightarrow z_m} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_m} \frac{\gamma_m(s_m) ds_m}{z_k(\sigma_k) - \zeta_m(s_m)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_m} \frac{\gamma_m(s_m) ds_m}{z_m(\sigma_k) - \zeta_m(s_m)} + \frac{1}{2} \gamma_m(\sigma_m) e^{-i\theta_m(\sigma_m)},$$

$$k \neq m; k, m = 1, 2 \quad (2.6)$$

Кроме того, следует учесть, что при  $\delta_s \rightarrow 0$  контуры  $L_1, L_2$  переходят в  $L_0$ , точки  $z_1, z_2$  — в  $z_0$ , а

$$\lim_{\delta_s \rightarrow 0} \theta_1 = \theta_0, \quad \lim_{\delta_s \rightarrow 0} \theta_2 = \pi + \theta_0 \quad (2.7)$$

В результате, используя соотношения (2.6) и (2.7), получим

$$\lim_{\delta_s \rightarrow 0} [e^{i\theta_1} \bar{v}_{01} + e^{i\theta_2} \bar{v}_{02}] = -\frac{1}{2} [\gamma_1(\sigma_0) + \gamma_2(l_0 - \sigma_0)] \quad (2.8)$$

$$\lim_{\delta_s \rightarrow 0} [e^{i\theta_1} \bar{v}_{01} - e^{i\theta_2} \bar{v}_{02}] = 2e^{i\theta_0(\sigma_0)} \left[ \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\gamma_1(s_0) + \gamma_2(l_0 - s_0)}{z_0(\sigma_0) - \zeta_0(s_0)} ds_0 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} [\gamma_1(\sigma_0) - \gamma_2(l_0 - \sigma_0)] \quad (2.9)$$

Здесь  $0 < \sigma_0 < l_0, l_0$  — длина средней дужки  $L_0$ .

Переходя в (2.4), (2.5) к пределу при  $\delta_s \rightarrow 0$  и учитывая выражения (2.8), (2.9), получим, что два уравнения в системах (2.4) и (2.5), определяющие суммы касательных и нормальных составляющих вектора  $v_0$  на контурах  $L_1$  и  $L_2$ , обращаются в тождества, а два других переходят в уравнения

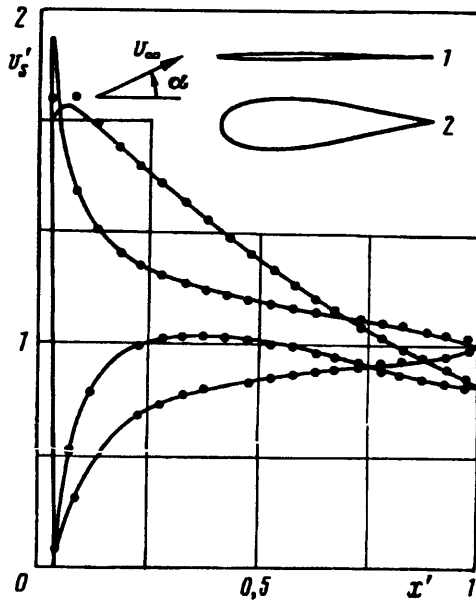
$$\operatorname{Im} \left\{ e^{i\theta_0(\sigma_0)} \left[ \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\gamma_1(s_0) + \gamma_2(l_0 - s_0)}{z_0(\sigma_0) - \zeta_0(s_0)} ds_0 \right] \right\} = 0, \quad z_0 \in L_0 \quad (2.10)$$

$$-\frac{1}{2} [\gamma_1(\sigma_0) - \gamma_2(l_0 - \sigma_0)] =$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta_0(\sigma_0)} \left[ \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\gamma_1(s_0) + \gamma_2(l_0 - s_0)}{z_0(\sigma_0) - \zeta_0(s_0)} ds_0 \right] \right\}, \quad z_0 \in L_0 \quad (2.11)$$

Таким образом, в предельном случае бесконечно тонкого профиля в системах уравнений (2.4) и (2.5) остается только по одному уравнению относительно функций  $\gamma_1, \gamma_2$ . Эти уравнения можно записать иначе, в более привычной форме. Введем обозначения

$$\gamma(\sigma_0) = \gamma_1(\sigma_0) + \gamma_2(l_0 - \sigma_0), \quad v_{0s}(\sigma_0) = -\frac{1}{2} [\gamma_1(\sigma_0) - \gamma_2(l_0 - \sigma_0)]$$



Фиг. 2

Тогда оставшиеся при  $\delta_* \rightarrow 0$  уравнения принимают вид

$$\text{Im} \left\{ e^{i\theta_0(\sigma_0)} \left[ \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\gamma(s_0) ds_0}{z_0(\sigma_0) - \xi_0(s_0)} \right] \right\} = 0, \quad z_0 \in L_0 \quad (2.12)$$

$$v_{0r}(\sigma_0) = \text{Re} \left\{ e^{i\theta_0(\sigma_0)} \left[ \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\gamma(s_0) ds_0}{z_0(\sigma_0) - \xi_0(s_0)} \right] \right\}, \quad z_0 \in L_0 \quad (2.13)$$

Выражение (2.12) представляет собой интегральное уравнение относительно интенсивности присоединенного вихревого слоя  $\gamma(s_0)$ , к которому сводится краевая задача обтекания бесконечно тонкой криволинейной дужки  $L_0$ , а (2.13) определяет скорость обтекания присоединенных вихрей, моделирующих эту дужку.

Итак, проведенный анализ показал, что одно из уравнений в каждой системе (2.4) и (2.5) при  $\delta_* \rightarrow 0$ , вырождается в тождество. Именно это обстоятельство мешает проводить расчет обтекания профилей произвольной толщины, вплоть до бесконечно малой, на основе интегральных уравнений (1.3) или (1.4). В то же время при  $\delta_* \rightarrow 0$  в системах (2.4) и (2.5) остается по одному уравнению относительно функций  $\gamma_1, \gamma_2$ , которые не вырождаются при  $\delta_* \rightarrow 0$ .

Эти уравнения имеют вид

$$\text{Im} \{ e^{i\theta_1(\sigma_1)} \bar{v}_{01}(\sigma_1) - e^{i\theta_2(\sigma_2)} \bar{v}_{02}(\sigma_2) \} = 0 \quad (2.14)$$

$$-\frac{1}{2} [\gamma_1(\sigma_1) - \gamma_2(\sigma_2)] = \text{Re} \{ e^{i\theta_1(\sigma_1)} \bar{v}_{01}(\sigma_1) - e^{i\theta_2(\sigma_2)} \bar{v}_{02}(\sigma_2) \} \quad (2.15)$$

где  $\bar{v}_{01}, \bar{v}_{02}$  связаны с искомыми функциями  $\gamma_1, \gamma_2$  формулой (2.3).

Эффективность полученной системы уравнений проверялась на решении тестовой задачи обтекания симметричного профиля Жуковского. Интегральные уравнения (2.14), (2.15) решались методом дискретных вихрей путем аппроксимации интегральных выражений соответствующими квадратурными формулами. Число вихрей  $N$  на каждой стороне профиля варьировалась от 5 до 25. Результаты расчета распределений касательной составляющей скорости вдоль профиля с 1 и 25% толщиной при  $N = 20$  и угле атаки  $\alpha = 10^\circ$  приведены на фиг. 2. Сплошные линии соответствуют точному

решению (по методу конформных отображений), а точки — приближенному,  $v_2' = |v_2| / v_\infty$ ,  $x' = x/b$ , где  $b$  — хорда профиля. Эти данные показывают малую погрешность расчета  $v_2$  на всем контуре, которая практически не зависит (при  $N = \text{const}$ ) от толщины профиля.

Иная картина наблюдается при расчете тех же вариантов методом дискретных вихрей исходя из уравнений (1.3) или (1.4). В этом случае погрешность расчета  $v_2$  при  $N = \text{const}$  существенно зависит от толщины профиля, что требует беспредельного увеличения числа вихрей по мере утоньшения профиля. В частности, по данным работы [1], для расчета распределения скорости вдоль профиля с 1%-ной толщиной на основе уравнения (1.3) требуется не менее 200 дискретных вихрей (при относительной погрешности расчета около 1%), тогда как применение уравнений (2.14), (2.15) сокращает необходимое число вихрей до 20.

Таким образом, тестовый расчет показал высокую эффективность предлагаемой системы интегральных уравнений для решения задач обтекания телесного профиля любой, включая сколь угодно малой, толщины. Полученные результаты могут быть обобщены на крыло конечного размаха, а также на случай нестационарного обтекания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров Р. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988. 231 с.
2. Павловец Г. А. Методы расчета обтекания сечений крыла идеальным несжимаемым потоком // Тр. ЦАГИ. 1971. Вып. 1344. С. 72.
3. Мухомелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Омск

Поступила в редакцию  
17.XII. 1990