

УДК 532.516.013.4

© 1992 г. С. В. МАНУЙЛОВИЧ

О ВОСПРИИМЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ К ВИБРАЦИИ СТенок КАНАЛА

Исследования процессов генерации волн неустойчивости в течениях вязкой жидкости приобрели актуальность в связи с проблемой предсказания ламинарно-турбулентного перехода. Важным фактором, ответственным за возбуждение в потоке таких волн, является вибрация обтекаемой поверхности [1]. В [2, 3] явление восприимчивости вязких течений к вибрации стенки изучалось в предположении бесконечно большого числа Рейнольдса R , причем диапазон исследуемых частот соответствовал окрестности нижней ветви нейтральной кривой. Построенная там асимптотическая теория качественно верно описывает некоторые свойства нестационарных вязких течений при конечных числах R , однако количественные характеристики могут отличаться от точных в несколько раз [4, 5]. Исследование восприимчивости ламинарного пограничного слоя при конечных R методом Фурье [5, 6] также сопряжено с определенными допущениями: здесь приходится пренебрегать неоднородностью пограничного слоя в продольном направлении (а также связанной с ней непараллельностью основного течения), что приводит к ошибкам порядка нескольких процентов. Идеальной моделью для изучения восприимчивости представляется плоское течение Пуазейля, обладающее наряду со свойством неустойчивости важным свойством продольной однородности, что позволяет произвести точное количественное исследование нестационарных возмущений с помощью преобразования Фурье по продольной координате. Изучению восприимчивости плоского течения Пуазейля к локализованным двумерным гармоническим колебаниям стенок канала посвящена данная работа.

1. Система уравнений и краевые условия. Будем изучать нестационарные двумерные возмущения плоского течения Пуазейля (течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными плоскостями под действием постоянного продольного градиента давления). В качестве основных единиц измерения будем использовать плотность жидкости, максимальную скорость невозмущенного течения и полуширину канала; число Рейнольдса обозначим R .

Введем декартову систему координат с началом в центре канала, ось x направим вдоль вектора скорости невозмущенного течения, а ось y — перпендикулярно стенкам. Предположим, что возмущения течения вызваны колебаниями верхней и нижней стенок канала, точки которых перемещаются в вертикальном направлении по законам

$$y_{+,-} = \pm 1 + \sigma \operatorname{Re} [f_{+,-}(x) \exp(-i\omega t)], \quad 0 < \sigma \ll 1 \quad (1.1)$$

Здесь t — время, $\omega > 0$ — частота вибрации, σ — ее амплитуда; функции $f_{+,-}$ задают продольные распределения интенсивности колебаний стенок (индекс плюс соответствует верхней, а минус — нижней стенке).

Возмущения компонент вектора скорости и давления обозначим $\sigma \operatorname{Re} [q(x, y) \exp(-i\omega t)]$, $q = v_x, v_y, p$. Функции q удовлетворяют линеаризованной системе уравнений Навье — Стокса

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$-i\omega v_x + (1 - y^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} - 2yv_y + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)$$

$$-i\omega v_y + (1 - y^2) \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right)$$

Первая группа краевых условий для системы (1.2) является следствием линеаризации условий прилипания, записанных для стенок (1.1)

$$v_x(x, \pm 1) = \pm 2f_{+,-}(x), \quad v_y(x, \pm 1) = -i\omega f_{+,-}(x) \quad (1.3)$$

Вторая группа краевых условий должна быть выставлена при $x \rightarrow \pm \infty$. Вопрос об этих условиях будет подробно обсуждаться в разд. 3 и 4.

Основное течение симметрично относительно плоскости $y=0$. В связи с этим будем разделять возмущение на симметричную и антисимметричную части: $q = q_s + q_a$. Функции $q_{s,a}$ порознь удовлетворяют системе (1.2). Разделяя краевые условия (1.3) на симметричную и антисимметричную части, получим

$$v_{x_s,a}(x, 1) = 2f_{s,a}(x), \quad v_{y_s,a}(x, 1) = -i\omega f_{s,a}(x) \quad (1.4)$$

Здесь символами $f_{s,a}$ обозначены функции, определяющие симметричную и антисимметричную компоненты колебаний (1.1): $f_{s,a} = (f_+ \mp f_-)/2$. Использование условий (1.4) совместно с условиями симметрии

$$v_{x_s,a}(x, 0) = v_{y_s,a}(x, 0) = \frac{\partial^2 v_{x_s,a}}{\partial y^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 v_{y_s,a}}{\partial y^2}(x, 0) = 0 \quad (1.5)$$

позволяет переформулировать краевую задачу для полосы $-\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq 1$.

2. Метод Фурье. Коэффициенты системы (1.2) зависят лишь от переменной y . Используя это свойство, представим искомое решение задачи в виде интеграла Фурье (в отдельных случаях понимаемого в обобщенном смысле)

$$q_{s,a} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{s,a}^*(k) q_{s,a}^*(y; k) \exp(ikx) dk \quad (2.1)$$

$$f_{s,a}^* = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{s,a}(x) \exp(-ikx) dx$$

Здесь величины фурье-амплитуд возмущений ради удобства нормированы на величины фурье-образов функций, задающих форму колебаний стенок канала. Введем функции $\varphi_{s,a}(y)$, положив $v_{y_s,a}^* = -ik\varphi_{s,a}^*$. В результате задачи (1.2), (1.4), (1.5) сведутся к неоднородным краевым задачам для уравнения Орра — Зоммерфельда

$$\left(1 - y^2 - \frac{\omega}{k}\right) \left(\frac{d^2 \varphi_{s,a}}{dy^2} - k^2 \varphi_{s,a}\right) + 2\varphi_{s,a} = \frac{1}{ikR} \left(\frac{d^4 \varphi_{s,a}}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2 \varphi_{s,a}}{dy^2} + k^4 \varphi_{s,a}\right) \quad (2.2)$$

$$\varphi_{s,a}(1) = \frac{\omega}{k}, \quad \frac{d\varphi_{s,a}}{dy}(1) = 2$$

$$\varphi_s(0) = \frac{d\varphi_a}{dy}(0) = \frac{d^2 \varphi_s}{dy^2}(0) = \frac{d^3 \varphi_a}{dy^3}(0) = 0$$

Обозначим посредством $\varphi_{0,1,2,3}$ решения уравнения Орра — Зоммерфельда, удовлетворяющие условиям $d^m \varphi_n / dy^m = \delta_{mn}$ при $y=0$ (δ_{mn} — символ Кронекера; $m, n = 0, 1, 2, 3$). С помощью равенств $\varphi_{s,a} = c_{1,0} \varphi_{1,0} + c_{3,2} \varphi_{3,2}$ решение краевых задач (2.2) сводится к решению задач Коши. Коэффициенты $c_{0,1,2,3}$ однозначно определяются краевыми условиями, задаваемыми при $y=1$.

Решение сформулированной задачи проиллюстрируем на примере треугольного вибратора, установленного на верхней стенке

$$f_+ = 1 - |x|/l, \quad |x| \leq l; \quad f_+ = 0, \quad |x| > l; \quad f_- \equiv 0$$

Вибраторы такого типа реализуются в экспериментах по исследованию восприимчивости вязких течений [1]. Этот класс вибраторов удобен и для теоретического анализа. Во-первых, колебания одной из стенок приводят к возбуждению в потоке как симметричных, так и антисимметричных возмущений. Во-вторых, продольное распределение интенсивности этих колебаний описывается финитной функцией, что упрощает анализ структуры возмущений вверх и вниз по потоку от вибратора (т. е. при $|x| > l$). В-третьих, варьирование величины параметра $l > 0$ позволяет изучить зависимость интенсивности генерируемых возмущений от длины вибрирующего участка.

Для изучения характеристик возмущенного движения, задаваемого интегралом (2.1), необходимо исследовать свойства фурье-амплитуд как функций комплексного переменного k . Проведенная нормировка фурье-гармоник явно выделяет зависимость фурье-образов возмущений от геометрических параметров $f_{s,a}^*$, поскольку краевые задачи (2.2) не содержат этих величин. В случае вибраторов рассматриваемого типа функции $f_s^* = f_a^* = (1 - \cos kl)/k^2 l$ не имеют особых точек, так что все особые точки фурье-образов возмущений порождены особыми точками решений задач (2.2), поэтому иллюстрируемые ниже свойства возмущенного движения обусловлены не особенностями граничных условий, а структурой линейризованной системы уравнений Навье — Стокса.

Анализ решений задач (2.2) в предельном случае $|k| \rightarrow \infty$, проведенный методом ВКБ [7], показывает сходимость интегралов (2.1) в окрестности бесконечно удаленной точки. Одновременно он дает асимптотическую формулу для особых точек подынтегральных выражений: в случае как симметричных ($j_T = 1$), так и антисимметричных возмущений ($j_T = -1$) у фурье-амплитуд существует четыре бесконечные последовательности полюсов первого порядка, расположенных в разных квадрантах плоскости k и определяемых равенствами

$$\operatorname{Re} k = \frac{1}{2} j_R \ln(4\pi |I| n) + o(1), \quad I = \int_0^1 \cos \left[\frac{R}{2} \left(\xi - \frac{\xi^3}{3} \right) \right] d\xi$$

$$\operatorname{Im} k = j_I \pi \left(n + \frac{1}{4} j_T \right) - \frac{1}{6} R + \frac{1}{2} j_R \arg I + o(1)$$

Здесь натуральное $n \rightarrow \infty$, $j_R = \operatorname{sign}(\operatorname{Re} k) = \pm 1$, $j_I = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} k) = \pm 1$; кроме того, считаем $I(R) \neq 0$.

Ввиду принципиальных различий в свойствах симметричных и антисимметричных возмущений дальнейшее их изучение целесообразно вести по отдельности.

3. Симметричные возмущения. Колебания распада. Решения краевых задач (2.2) имеют особенность в точке $k = 0$. Асимптотический анализ, проведенный для случая симметричных возмущений, показывает, что поведение нормированной фурье-гармоники при $k \rightarrow 0$ описывается разложением

$$\varphi_s \sim \frac{\omega}{k} \frac{\operatorname{sh} \beta y - y \beta \operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh} \beta - \beta \operatorname{ch} \beta}, \quad \beta = (-i\omega R)^{1/2} \quad (3.1)$$

В силу (3.1) величина v_{ys}^* не имеет особенности при $k = 0$, поэтому амплитуда пульсаций вертикальной компоненты скорости v_{ys} представима в виде классического преобразования Фурье и удовлетворяет условиям затухания при $x \rightarrow \pm \infty$.

Изучим асимптотические свойства функции v_{xs} , характеризующей пульсации горизонтальной компоненты скорости. При $f_s^*(0) \neq 0$ ее фурье-образ в точке $k = 0$ имеет особенность типа k^{-1} . Эта особенность по физическому смыслу совершенно

аналогична той, что имеет место в задаче о восприимчивости пограничного слоя несжимаемой жидкости к вибрации локализованного участка обтекаемой поверхности [8]: она связана с вытесняющим действием симметричных колебаний стенок канала. Из закона сохранения массы следует, что при локальном периодическом сужении и расширении канала течение несжимаемой жидкости далеко вверх и вниз по потоку совершает незатухающие продольные осцилляции, т. е. функция v_x при $x \rightarrow \pm \infty$ и фиксированном y стремится к постоянным значениям. Именно таким функциям соответствуют обобщенные фурье-образы с особенностью упомянутого вида. При изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ функция v_x испытывает приращение, равное умноженному на i коэффициенту при k^{-1} из асимптотического представления ее фурье-образа в окрестности точки $k=0$.

Конвективные члены системы (1.2) не оказывают влияния на формирование особенности (3.1). Это означает асимптотическую эквивалентность направлений вверх и вниз по потоку, поэтому симметричные возмущения должны удовлетворять условию

$$v_x(+\infty, y) = -v_x(-\infty, y) \quad (3.2)$$

С учетом (3.2) выпишем асимптотический вид амплитуды пульсаций горизонтальной компоненты скорости

$$v_x(\pm\infty, y) = \pm \frac{Q\beta}{2} \frac{\operatorname{ch} \beta y - \operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh} \beta - \beta \operatorname{ch} \beta}, \quad Q = i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(x) dx \quad (3.3)$$

Здесь Q обозначает амплитуду пульсаций расхода жидкости. Формула (3.3) описывает колебания течения вязкой жидкости в канале под действием пульсирующего градиента давления [9]

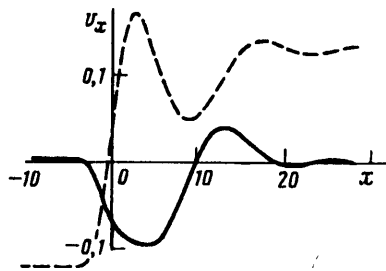
$$\frac{\partial p_s}{\partial x}(\pm\infty, y) = \mp \frac{Q}{2} \frac{i\omega\beta \operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh} \beta - \beta \operatorname{ch} \beta} = \pm \operatorname{const}$$

Этот градиент индуцируется симметричными колебаниями стенок.

В асимптотической ($R \rightarrow \infty, \omega \sim R^{-3/7}$) постановке аналогичная задача восприимчивости исследовалась ранее в [3]. В рассмотренном там приближении симметричные возмущения удовлетворяли условиям $v_{x,y} \rightarrow 0, p_s \rightarrow \pm \operatorname{const}$ при $x \rightarrow \pm \infty$. Поскольку независимые переменные и параметры возмущенного течения имели специально выбранные масштабы по числу R , в [3] делался вывод о том, что затухание пульсаций давления проявляется на более крупномасштабном интервале изменения продольной переменной. Как показывают приведенные выше соображения, в случае $Q \neq 0$ симметричные возмущения вообще не являются затухающими, хотя при $x \rightarrow \pm \infty$ они действительно имеют качественно иную структуру, нежели на масштабе $|x| \sim R^{1/7}$ при $R \rightarrow \infty$ [3].

Другое существенное отличие точного решения от асимптотического [3] заключается в отсутствии точек ветвления у фурье-амплитуд. Это свойство является математическим следствием того факта, что у плоского течения Пуазейля не существует собственных возмущений в классе непрерывного спектра [10]. Таким образом, обнаруженное в [3] ветвление фурье-образов возмущения течения Пуазейля является дефектом рассматриваемой там асимптотической постановки. При $R \gg 1$ одно из линейно независимых решений уравнения Орра — Зоммерфельда быстро затухает с ростом y . Условия симметрии, которые должны быть наложены на этот линейно независимый интеграл, в рамках модели [3] заменялись асимптотическим условием затухания на внешней границе критического слоя, что и приводило к упомянутому ветвлению.

Приведем результаты численного исследования симметричных возмущений в окрестности вибрирующего участка. В качестве параметра, характеризующего интенсивность симметричных возмущений, будем рассматривать величину $v_x(x, 0)$. Для расчета этой функции сначала производилось вычисление ее производной, представимой классическим интегралом Фурье (линейно независимые решения уравнения Орра — Зоммерфельда $\varphi_{0,1,2,3}$ строились методом Рунге — Кутта с



Фиг. 1

применением процедуры ортогонализации [11], интеграл Фурье рассчитывался с помощью метода, описанного в [12]). Затем функция $v_x(x, 0)$ восстанавливалась интегрированием по x с использованием асимптотического условия (3.3), задаваемого вверх по потоку (ввиду быстрого затухания функции $\partial v_x/\partial x$ при $x \rightarrow -\infty$). Результаты расчета для случая $R = 10\,000$, $\omega = 0,16$, $l = 3$ показаны на фиг. 1 (здесь и далее действительная часть комплексной функции отмечена сплошной, мнимая — штриховой линией).

Исследуем более детально структуру возмущенного течения вверх и вниз по потоку от вибратора. Проводимый ниже анализ применим для случаев как симметричных, так и антисимметричных возмущений, поэтому далее опускаем индексы, указывающие тип симметрии (везде, где они не являются необходимыми). Пусть функция q представима интегралом Фурье (2.1). Если $x > l$, этот интеграл, взятый по контуру $C^+ = \{k: |k| = r, \text{Im } k > 0\}$, затухает при $r \rightarrow \infty$, а для $x < -l$ затухает интеграл, взятый по контуру $C^- = \{k: |k| = r, \text{Im } k < 0\}$. В силу этого при $|x| > l$ для функции q справедливо представление

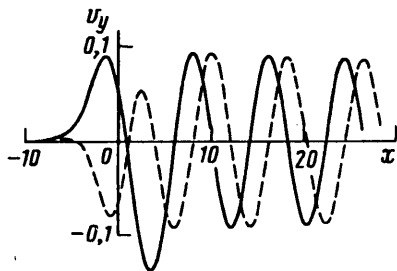
$$q = \text{sign } x \sum_{k=k_n} f(k_n) \text{res} [iq^*(y; k)] \exp(ik_n x) \quad (3.4)$$

где суммирование ведется по бесконечному множеству полюсов k_n , удовлетворяющих условию $\text{sign } \text{Im } k_n = \text{sign } x$. Функции $\text{res } \varphi$ являются собственными решениями однородной краевой задачи для уравнения Орра — Зоммерфельда. Таким образом, вниз и вверх по потоку от вибратора возмущенное течение представляет собой суперпозицию дискретных мод.

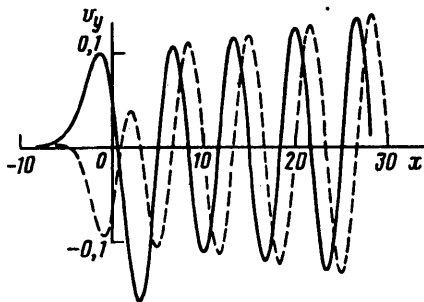
Численный поиск, выполненный в квадрате $|Re k| \leq 1$, $|Im k| \leq 1$, позволил выявить 25 полюсов у функции v_{xx} при $R = 10000$, $\omega = 0,16$. Особенность в точке $k = 0$ подробно обсуждалась выше. Бегущая вниз по течению волна с длиной ~ 15 , отчетливо различимая на фоне пульсаций расхода при $3 < x < 20$ (см фиг. 1), обусловлена полюсом в точке $k = 0,4477 + i 0,0988$. Еще ниже по потоку она оказывается размытой группой колебаний с длиной волны $\sim 25-35$, имеющих на порядок меньшую начальную амплитуду, но зато медленнее затухающих. Наименьший декремент затухания имеет волна с $k = 0,1742 + i 0,0153$. Вверх по потоку отличные от (3.3) возмущения очень быстро затухают: наименьший декремент имеет волна с $k = -0,0366 - i 2,6941$.

4. Антисимметричные возмущения. Генерация волны неустойчивости. Плоское течение Пуазейля начиная с некоторого значения числа Рейнольдса, называемого критическим ($R_c = 5772$ [13]), теряет устойчивость по отношению к антисимметричным возмущениям особого вида — волнам Толлмина — Шлихтинга [14]. С точки зрения фурье-анализа, проведенного в разд. 2, неустойчивость течения Пуазейля означает существование у функций q_n^* полюса $k_0(\omega, R)$, мнимая часть которого может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это обстоятельство должно быть учтено в рассматриваемой задаче при формулировке краевых условий вверх и вниз по потоку для антисимметричных возмущений.

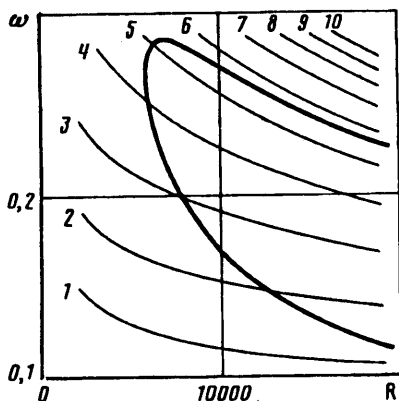
Пусть пара параметров ω, R принадлежит области устойчивости ($\text{Im } k_0(\omega, R) > 0$). В этом случае антисимметричные возмущения, порождаемые вибратором, затухают



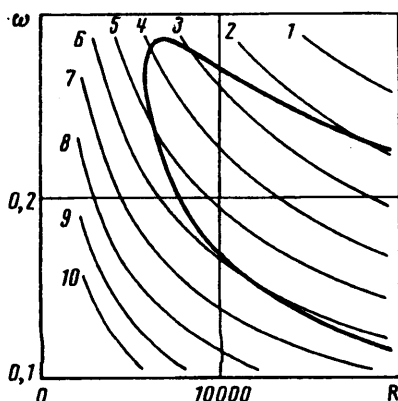
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

при $x \rightarrow +\infty$ и описываются интегралом Фурье q_F (2.1). При приближении точки ω, R к нейтральной кривой, задаваемой соотношением $\text{Im}k_0(\omega, R) = 0$, скорость затухания интеграла q_F при $x \rightarrow +\infty$ уменьшается и поведение антисимметричных возмущений вниз по потоку от вибратора определяется слагаемым из (3.4), соответствующим неустойчивой моде:

$$q_{TS} = f_a(k_0) \text{res}_{k=k_0} [iq_a^*(y; k)] \exp(ik_0 x) \quad (4.1)$$

Расчет, выполненный для этого случая, проиллюстрирован на фиг. 2 ($R = 10\,000$, $\omega = 0,16$, $l = 3$); в качестве характеристики интенсивности антисимметричных возмущений выбрана функция $v_y(x, 0)$.

Численное исследование особых точек функции v_{y0}^* при $R = 10\,000$, $\omega = 0,16$ дает для неустойчивой моды значение $k_0 = 0,7680 + i0,0048$. Кроме нее в квадрате $|Rek| \leq 1$, $|Imk| \leq 1$ было выявлено еще 25 полюсов; 22 из них соответствуют волнам с длиной $\sim 20-30$, распространяющимся вниз по потоку. Все эти волны имеют на 2-5 порядков меньшую начальную амплитуду, чем волна Толмина — Шлихтинга, и быстрее затухают (наименьший декремент у волны с $k = 0,1853 + i0,0297$), поэтому волна неустойчивости на фиг. 2 столь ярко выражена. Вверх по потоку от вибратора возмущения быстро затухают; здесь доминирует мода с волновым числом $k = -0,2693 - i0,7373$.

Если точка ω, R пересекает нейтральную кривую и входит в область неустойчивости ($\text{Im}k_0(\omega, R) < 0$), то интеграл q_F меняется скачком [15]: при $x \rightarrow +\infty$ он становится быстро затухающим, а при $x \rightarrow -\infty$ затухает слабо и определяется выражением $-q_{TS}$.

Таким образом, решение поставленной задачи, построенное с помощью интеграла Фурье, противоречит физическому смыслу: оно описывает волну неустойчивости, набегающую из области $x < 0$ и гасящуюся вибратором, в то время как истинной картине возмущенного течения должна соответствовать генерация

волны вибратором и распространение ее вниз по потоку. Указанного противоречия можно избежать, если изменить математическую постановку задачи: следуя [15], откажемся от условия затухания антисимметричных возмущений при $x \rightarrow +\infty$ и потребуем, чтобы волна Толлмина — Шлихтинга отсутствовала в набегающем потоке. В результате решение задачи для этого случая приобретет вид

$$q_a = q_F + q_{TS}$$

Пример расчета задачи о возбуждении вибратором волны Толлмина — Шлихтинга, растущей вниз по потоку, показан на фиг. 3 ($R = 10\,000$, $\omega = 0,22$, $l = 3$). В случае $\text{Im}k_0 < 0$ построенное решение линейной задачи не является равномерно пригодным: при фиксированном σ условие малости возмущения фактически ограничивает рассматриваемую область течения неравенством $x \ll \ln\sigma/\text{Im}k_0$.

В заключение исследуем зависимость интенсивности генерируемой волны от параметров задачи. Не ограничивая общности, зафиксируем величины $R = 10\,000$, $\omega = 0,16$. В этом случае комплексная амплитуда волны Толлмина — Шлихтинга определяется геометрическим параметром $f_a^*(k_0)$, зависящим от длины вибрирующего участка. В силу $|\text{Im}k_0| \ll \text{Re}k_0$ имеем $|\arg f_a^*(k_0)| \ll 1$, поэтому фаза генерируемой волны слабо зависит от размера вибратора. В то же время амплитуда волны, пропорциональная $|f_a^*(k_0)|$, сильно зависит от параметра l . При малых l наблюдается монотонный рост амплитуды генерируемой волны с увеличением длины вибратора. Первый (и абсолютный) максимум расположен вблизи точки $l = 3$; в этом случае характерный размер вибратора равен половине длины волны неустойчивости. При дальнейшем увеличении l интенсивность генерируемой волны уменьшается, достигая минимума вблизи значения $l = 8$; при этом амплитуда волны падает до величины $\sim 10^{-2}$ от максимальной. Далее амплитуда вновь монотонно растет вплоть до $l = 12$ — точки второго максимума, и т. д.

Зависимость амплитуды волны Толлмина — Шлихтинга от параметров ω , R проявляется как через величину $f_a^*[k_0(\omega, R)]$, так и через универсальную функцию $A(\omega, R) = \text{res}[iv_j^*(0, k)]$ (см. (4.1)). На фиг. 4 показаны линии уровня функции $|A|$: на кривых $l = 10$ эта функция принимает значения от 0,08 до 0,26 с шагом 0,02. Линии уровня $\arg A$ показаны на фиг. 5: на кривых $l = 10$ эта функция принимает значения от $-0,4$ до 0,5 с шагом 0,1. На обеих фигурах жирной линией обозначена нейтральная кривая. При $R = 10\,000$ и $\omega = 0,16$, $|A| = 0,1038$, $\arg A = 0,1181$. Как показывают результаты расчетов (фиг. 4), в рассматриваемой области величина $|A|$ возрастает с ростом ω и R .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 151 с.
2. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе в дозвуковом пограничном слое//ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1049—1055.
3. Bogdanova E. V., Ryzhov O. S. Free and induced oscillations in Poiseuille flow//Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1983. V. 36. № 2. P. 271—287.
4. Мануйлович С. В. Волны неустойчивости пространственного типа в пограничном слое при больших числах Рейнольдса//Уч. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18. № 5. С. 35—40.
5. Мануйлович С. В. О возбуждении волн Толлмина — Шлихтинга вибрирующим участком обтекаемой поверхности//Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 46—51.
6. Федоров А. В. Возбуждение волн Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое периодическим внешним воздействием, локализованным на обтекаемой поверхности//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 36—41.
7. Федорук М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
8. Мануйлович С. В. Формирование волнового пакета в пограничном слое несжимаемой жидкости под действием импульсного колебания стенки//Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 3. С. 56—60.

9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. Lin C. C. Some mathematical problems in the theory of the stability of parallel flows//J. Fluid Mech. 1961. V. 10. Pt. 3. P. 430—438.
11. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений//Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171—174.
12. Мануйлович С. В. О восприимчивости дозвукового течения к осциллирующим воздействиям, локализованным на дне пограничного слоя//Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 63—69.
13. Orszag S. A. Accurate solution of Orr — Sommerfeld stability equation//J. Fluid Mech. 1971. V. 50. Pt 4. P. 689—703.
14. Линь Цзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
15. Богданова Е. В., Рыжов О. С. О возмущениях, генерируемых осцилляторами в потоке вязкой жидкости на закритических частотах//ПМТФ. 1982. № 4. С. 65—72.

Москва

Поступила в редакцию
5.II.1991