

УДК 532.61:537.84

© 1992 г. В. В. КИРЮШИН, О. Р. ПАРАСКЕВОПУЛО

ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ КАПЛИ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ОСТРИЯ МАГНИТНОГО КЛИНА

В настоящее время широко исследуются возможности применения магнитных жидкостей [1, 2]. Для этих целей особый интерес представляет вопрос об удержании магнитной жидкости сильными неоднородными магнитными полями, которые легко создаются на практике намагниченным клином. Ряд теоретических работ посвящен исследованию формы свободной поверхности магнитной жидкости в однородных полях [2]. В работах [3—6] рассматривалось равновесие магнитных жидкостей в неоднородных полях, создаваемых проводником с током.

В данной работе рассматривается плоская задача о форме свободной поверхности магнитной жидкости в поле сил тяжести, внешнего однородного магнитного поля и неоднородного поля намагниченного металлического клина. Представлены результаты численного расчета формы свободной поверхности капли магнитной жидкости, удерживаемой магнитным полем намагничивающего клина на наклонной плоскости. Исследованы изменения формы свободной поверхности бесконечного объема магнитной жидкости, расположенной около острия клина, при увеличении внешнего поля. Показано, что при некоторой критической величине поля происходит отрыв части магнитной жидкости с прилипанием его к острию клина. Представлены экспериментальные результаты по определению максимальной площади сечения капли, удерживаемой магнитным полем клина, и критической высоты подъема магнитной жидкости относительно уровня вне поля. Экспериментальные и теоретические результаты согласуются между собой.

1. Неоднородное магнитное поле H создается металлическим клином, намагниченным внешним однородным горизонтальным магнитным полем H_0 . Сечение клина представляет собой равнобедренный треугольник с углом α при вершине и высотой L (фиг. 1). Плоскость подложки образует угол β с вертикалью. Требуется найти зависимость максимальной площади S_{\max} , при которой возможно равновесие капли на наклонной плоскости в воздухе, от задаваемого магнитного поля H_0 .

Введем декартову систему координат x, y с началом в вершине клина. Направление оси x совпадает с направлением вектора ускорения свободного падения. Поверхность капли описывается уравнением $y = h(x)$, где h — неизвестная функция.

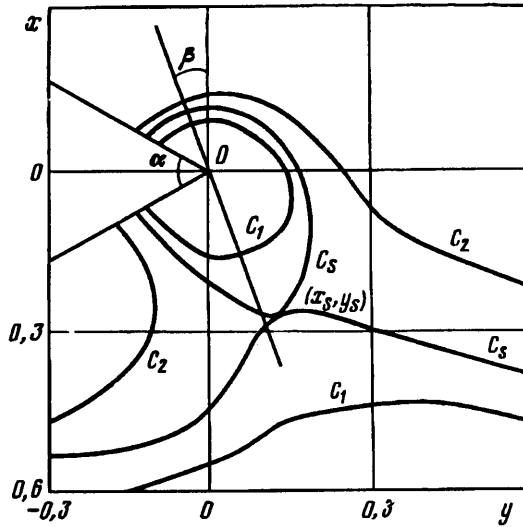
Система уравнений, определяющих форму капли магнитной жидкости и напряженность магнитного поля, состоит из уравнений равновесия воздуха, жидкости и уравнений Максвелла

$$\nabla_j p_\gamma^j + \rho_\gamma g_i = 0, \quad \gamma = 1, 2 \quad (1.1)$$

$$p_\gamma^j = -p_\gamma \delta^{ij} + \frac{H_\gamma^i B_\gamma^j}{4\pi} - \frac{H_\gamma^2}{8\pi} \delta^{ij}$$

$$\text{rot } H_\gamma = 0, \quad \text{div } B_\gamma = 0, \quad \gamma = 1, 2, 3$$

$$B_\gamma = H_\gamma + 4\pi M_\gamma$$



Фиг. 1

Здесь ρ_γ , p_γ , M_γ — плотность, давление, намагниченность γ -й фазы, H_γ , B_γ — напряженность и магнитная индукция магнитного поля в рассматриваемой области. Индексом $\gamma = 1, 2, 3$, обозначены параметры в воздухе, внутри капли и в клине соответственно.

Условиями на поверхности разрыва для магнитного поля являются непрерывность тангенциальной к поверхности раздела компоненты напряженности магнитного поля H_τ и нормальной компоненты индукции B_n . Граничное условие для скачка нормальной составляющей потока импульса на поверхности раздела жидкости и воздуха для плоской задачи имеет вид

$$\{p'' n, n_i\}_2^1 = - \frac{\sigma h''}{(1 + h^2)^{3/2}} \quad (1.2)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Условие на поверхности раздела жидкость — воздух в проекции на касательную к поверхности разрыва плоскости $\{p'' n, \tau_i\}_2^1 = 0$ тождественно выполняется.

Давление внутри и снаружи капли определяется из уравнений гидростатики с точностью до постоянной, которая определяется условиями на бесконечности. Кроме этого, задается площадь сечения капли

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x) dx = S \quad (1.3)$$

Здесь x_1 и x_2 — абсциссы линии пересечения контура капли с плоскостью подложки.

Влияние поверхностного натяжения характеризуется параметром $K = \sigma / l^2 (\rho_2 - \rho_1) g$, где l — характерный размер капли. Для типичных магнитных жидкостей $\sigma \sim 30$ дин/см, $\rho_2 \sim 1$ г/см³, $l \sim 1$ см, $K \sim 3 \cdot 10^{-2}$. Поэтому влиянием поверхностного натяжения пренебрегаем. В этом случае не требуются граничные условия на линии контакта поверхности магнитной жидкости и плоскости подложки.

Намагниченность магнитной жидкости M_2 является функцией напряженности магнитного поля H и направлена вдоль H . Предполагается, что намагниченность материала клина M_3 линейно зависит от поля с постоянной магнитной восприимчивостью χ .

Проинтегрировав уравнение равновесия и подставив полученные выражения для p_1, p_2 в граничное условие (1.2) без учета поверхностного натяжения, получим

$$C + x + \int_0^H M_2 dH + 2\pi M_n^2 = 0 \quad (1.4)$$

Здесь C — константа интегрирования.

Рассмотрим случай сильных магнитных полей, когда магнитная жидкость находится в состоянии насыщения: $M_2 = M_s$. Для типичных магнитных жидкостей намагниченность насыщения $M_s \sim 3-20$ Гс наступает при полях порядка $\geq 10^3$ Э. Намагниченность насыщения жидкости M_s мала по сравнению с напряженностью магнитного поля, при котором наступает насыщение: $M_s \ll H_0$; в этом случае последним слагаемым в уравнении (1.4) можно пренебречь по сравнению с предпоследним. Уравнение (1.4) принимает вид

$$C + x + M_s H = 0 \quad (1.5)$$

Физически это означает, что влияние магнитного поля на каплю существенно, а искажение внешнего поля, которое вносит капля магнитной жидкости, мало по сравнению с внешним магнитным полем.

В случае сильных магнитных полей система уравнений (1.1) с граничными условиями для напряженности магнитного поля и формы свободной поверхности капли магнитной жидкости расщепляется на две. Первая система уравнений и граничных условий определяет напряженность магнитного поля $H(x, y)$ в отсутствие капли. Вторая система уравнений определяет форму свободной поверхности капли $h(x)$ в поле $H(x, y)$. В безразмерной форме эта система имеет вид

$$C^* + x^* + FH^*(x^*, h^*(x^*)) = 0$$

$$\int_{x_1^*}^{x_2^*} h^*(x^*) dx^* = S^* \quad (1.6)$$

$$h^*(x_1^*) = 0, \quad h^*(x_2^*) = 0$$

$$x_i^* = \frac{x_i}{L} \quad (i = 1, 2), \quad H^* = \frac{H}{H_0}, \quad S^* = \frac{S}{L^2}, \quad C^* = \frac{C}{(\rho_2 - \rho_1)gL}$$

$$F = H_0 M_s / (\rho_2 - \rho_1) gL, \quad \varphi^* = \varphi L / H_0$$

Далее звездочки при безразмерных переменных опущены.

Решение задачи (1.6) определяется безразмерными параметрами S, F .

2. Напряженность магнитного поля намагниченного клина определялась при помощи конформного отображения. Введем комплексный потенциал Ψ напряженности магнитного поля H , действительной частью которого является скалярный потенциал φ . Считаем, что $\chi \gg 1$. В этом приближении магнитное поле внутри клина равно нулю, для распределения поля вне клина имеем

$$H = -\vec{\nabla}\varphi, \quad \Delta\varphi = 0 \quad (2.1)$$

$$-\vec{\nabla}\varphi|_{\infty} = e, \quad \varphi|_{\Sigma} = \text{const}$$

Здесь Σ — контур треугольника, образованный сечением клина, e — единичный вектор вдоль направления поля в бесконечности.

При помощи конформного преобразования Шварца — Кристоффеля, отображающего внешность единичного круга на внешность треугольника, задача сводится к определению комплексного потенциала Φ_c для напряженности поля вне бесконечного круглого цилиндра с однородным полем H_c на бесконечности. На основании известного решения [2] имеем

$$\varphi = \operatorname{Re} \{ \Phi_c (f(z)) \}, \quad \Phi_c (w) = \frac{\bar{H}_c}{w} - H_c w \quad (2.2)$$

$$\varphi_c = \operatorname{Re} \{ \Phi_c (w) \}, \quad f(z) = \lambda^{-1}(w)$$

$$z = \lambda(w) = D \int_{w_0}^w (\tau - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\tau - a_2)^{\alpha_2 - 1} (\tau - a_3)^{\alpha_3 - 1} \frac{d\tau}{\tau^2} + D_1$$

$$z = x + iy, \quad w = u + iv, \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j = 5$$

Здесь Φ_c, Ψ — комплексные потенциалы в плоскости сечения цилиндра w и клина z соответственно; $a_j = u_j + iv_j$ ($|a_j| = 1$) — точки единичной окружности в плоскости w , соответствующие вершинам треугольника; α_j — величины внешних углов треугольника, α_j — действительные числа.

Постоянные a_1, a_2, D, D_1 определяются расположением вершин треугольника A, B, C в плоскости z . Точка a_1 на единичной окружности задается произвольно.

Вектор напряженности магнитного поля H с компонентами H_x и H_y можно представить одним комплексным числом $H = H_x + iH_y$. Тогда комплексно сопряженная величина \bar{H} выражается через комплексный потенциал $\Psi(z)$ по формуле

$$\bar{H} = - \frac{d\Psi}{dz} = \left(\frac{\bar{H}_c}{w^2} + H_c \right) \frac{df(z)}{dz} \quad (2.3)$$

Комплексная постоянная H_c берется такой, чтобы выполнялось условие (2.1). Выражение для H_c имеет вид

$$H_c = e D a_1^{\alpha_1 - 1} a_2^{\alpha_2 - 1} a_3^{\alpha_3 - 1}$$

Таким образом, для определения вектора напряженности магнитного поля H , создаваемого клином ($\chi = \infty$) в однородном магнитном поле H_0 , необходимо знать обратную к преобразованию Шварца — Кристоффеля функцию, отображающую внешность треугольника на внешность единичной окружности. В общем случае эта функция аналитически не выражается, она была рассчитана численно (разд. 4).

3. Асимптотику напряженности магнитного поля вблизи острия намагничивающегося клина во внешнем однородном поле можно найти аналитически. Найдя главный член разложения подынтегральной функции интеграла Шварца — Кристоффеля в окрестности точки a_1 , соответствующей острию клина, и взяв получившийся интеграл, имеем

$$z = \lambda(w) = D (w - a_1)^{\alpha_1} (a_1 - a_2)^{\alpha_2 - 1} (a_1 - a_3)^{\alpha_3 - 1} a_1^{-2} \alpha_1^{-1}$$

Учитывая выражение (2.3), найдем модуль вектора напряженности магнитного поля вблизи острия клина:

$$|H| = B (x^2 + y^2)^{(1-\alpha_1)/2\alpha_1}$$

$$B = 2 |H_c| \alpha_1^{2\alpha_1} \alpha_1^{(1-\alpha_1)/\alpha_1} (a_1 - a_2)^{(1-\alpha_2)/\alpha_1} (a_1 - a_3)^{(1-\alpha_3)/\alpha_1}$$

Отметим, что константа D определяется из полного решения задачи и зависит от величин всех углов треугольника и расположения его вершин. Для клина, сечением которого является равносторонний треугольник ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 5/3$), численным расчетом найдено $D = -0,48i$.

Уравнение равновесия (1.6) в этом случае в декартовых координатах имеет вид

$$G - 1 - x' - G(x'^2 + y'^2)^{-1/2} = 0$$

$$x' = x/l, \quad y' = y/l$$

Здесь вместо постоянной C введена постоянная l — расстояние от острия клина до самой верхней точки капли магнитной жидкости: $x = -l$ при $y = 0$. В переменных x', y' форма свободной поверхности капли определяется одним безразмерным параметром $G = FB(L/l)^{3/5}$. Замкнутая поверхность капли существует только для значений G , меньших некоторого G_c . При $G = G_c$ достигается максимальная площадь сечения капли, которую можно удержать на острие клина. Можно показать, что

$$G_c = \frac{x_c^7 + x_c^2}{x_c^2 - 1}$$

Здесь x_c — единственный вещественный корень многочлена

$$5x^5 - 10x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 4x - 2 = 0$$

Расстояние от острия клина до самой нижней точки капли с максимальной площадью сечения равняется x_c^5 .

Максимальная площадь сечения капли S_{\max} , отвечающая значению G_c , имеет степенную зависимость от произведения BF

$$S_{\max} = L^2 (BF)^{10/7} \kappa$$

$$\kappa = G_c^{-10/7} \int_{-1}^{x_c^5} \left(\frac{G_c^5}{(G_c - 1 - x_c)^5} - x_c^2 \right)^{1/2} dx \approx 0,119$$

4. В качестве примера найдена форма поверхности магнитной жидкости в магнитном поле намагниченного клина, сечением которого является равнобедренный треугольник. Свободная поверхность магнитной жидкости, как видно из (1.6), совпадает с линиями постоянных значений функции

$$g(x, y) = -x - FH(x, y)$$

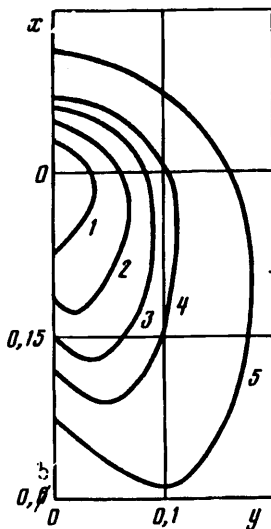
Полученные в результате численного расчета при $F = 1$, линии $g(x, y) = \text{const}$ изображены на фиг. 1.

Из фиг. 1 видно, что существует седловая точка x_s, y_s , в которой $g(x_s, y_s) = C_s$. Очевидно, что если $C < C_s$, то соответствующая поверхность состоит из двух несвязанных поверхностей: первую поверхность образует контур капли около вершины клина (1), вторая поверхность принадлежит бесконечному объему жидкости (2). В случае $C = C_s$, поверхности 1 и 2 соприкасаются в седловой точке x_s, y_s , образуя около поверхности клина площадь, не занятую жидкостью, — «дырку». Если $C > C_s$, то свободные поверхности принадлежат одной бесконечной области.

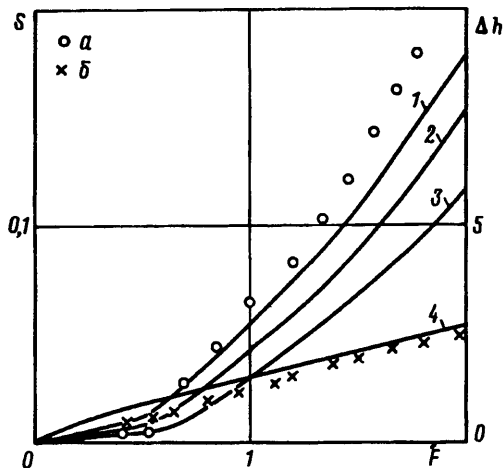
Рассмотрим каплю, находящуюся на наклонной плоскости, расположенной под углом β к вертикали и проходящей через вершину клина. Свободная поверхность капли совпадает с линиями постоянных значений функции $g(x, y)$ до точек пересечения этих линий с плоскостью. В пренебрежении поверхностным натяжением свободная поверхность магнитной жидкости в кювете, трубке или другом сосуде совпадает с линиями постоянных значений функции $g(x, y)$ до точек пересечения этих линий со стенками сосуда. Размеры капли, лежащей на плоскости, монотонно растут с увеличением параметра C .

Рассмотрим случай, когда седловая точка x_s, y_s лежит правее плоскости. В этом случае максимальная площадь сечения капли определяется параметром $C_c = C_s$. При $C > C_c$ объем капли становится бесконечным; свободная поверхность состоит из двух частей: бесконечной поверхности жидкости и конечной поверхности полости дырки около плоскости.

В случае, когда седловая точка лежит левее плоскости, максимальный размер капли определяется параметром C_c , при котором линия $g(x, y) = C_c$ касается плоскости. В этом случае при увеличении параметра C не происходит образования



Фиг. 2



Фиг. 3

полости в объеме жидкости. Максимальная площадь сечения капли достигается при $C = C_c$.

На фиг. 2 изображены рассчитанные численно для разных значений F формы свободной поверхности капель магнитной жидкости с максимальной площадью сечения на вертикальной стенке. Кривые 1—5 соответствуют $F = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,7$. При малых F самая низкая точка капли расположена на стенке, с увеличением F эта точка отходит от стенки.

На фиг. 3 видно, что максимальные капли, удерживаемые на наклонной плоскости, в рассматриваемых полях меньше, чем на вертикальной плоскости в том же поле. Объяснить это можно следующим образом: большая часть капли расположена ниже острия клина, поэтому наклонная плоскость отсекает снизу большую часть капли, чем добавляет сверху. Кривые 1—3 рассчитаны при $\beta = 0, \pi/12, \pi/6$ соответственно.

Из фиг. 1 видно, что если к острию намагниченного клина поднести бесконечную поверхность магнитной жидкости, то жидкость будет изменять свою первоначальную плоскую поверхность. Искривление поверхности при заданном значении напряженности магнитного поля зависит от расстояния h_0 между острием клина и первоначальной невозмущенной поверхностью магнитной жидкости. При уменьшении расстояния h_0 магнитная жидкость приближается к острию клина. Однако существует некоторое критическое значение h_{0c} , при котором магнитная жидкость резко, скачком, поднимается к острию клина, образуя вокруг него каплю.

На фиг. 3 приведены теоретические результаты для величины $\Delta h = h_{0c} - F$. На основании уравнения (1.6) можно показать, что разница высот магнитной жидкости в однородном поле и вне его равна F . Поэтому величина Δh — критическая высота подъема магнитной жидкости относительно уровня жидкости вне поля.

5. Эксперименты по определению размеров максимальной капли, удерживаемой полем на вертикальной плоской подложке, и критической высоты подъема жидкости относительно уровня вне поля выполнялись на установке, которая создавала однородное магнитное поле с помощью двух горизонтально расположенных соленоидов, имеющих общую ось. В соленоиды вставлялись цилиндрические стержни из мягкой стали, оканчивающиеся плоскими насадками диаметром 10 см. Расстояние между плоскими насадками можно изменять от 0 до 11 см. Соленоиды подключались к источнику постоянного напряжения, величина которого могла изменяться от 0 до 30 В; сила тока

при этом менялась от 0 до 1,87 А. В рассматриваемом диапазоне полей магнитное поле, создаваемое между плоскими параллельными плоскостями насадок, пропорционально напряжению источника или силе тока в соленоидах. При расстоянии между насадками 11 см и при напряжении 30 В напряженность магнитного поля на поверхности насадок равнялась 1000 Э. Напряженность поля в центре пространства между насадками 970 Э. Неоднородность поля, таким образом, не превышала 3%.

Неоднородное магнитное поле создавалось клином из мягкой стали АРМКО. Сечение клина представляло собой равносторонний треугольник с высотой 4 см. Длина клина 10 см. Клин закреплялся вместо одной плоской насадки.

В экспериментах использовалась магнитная жидкость, представляющая собой коллоидную суспензию магнетита в тетрадекане. Объемная концентрация магнетита составляла около 1%, плотность жидкости 0,85 г/см³, намагниченность насыщения 7 Гс.

В пространстве между плоским наконечником и клином на штативе закреплялась прямоугольная кювета с магнитной жидкостью. Одна сторона кюветы касалась острия клина. Кювета сделана из органического стекла, толщина стенок 0,3 см. Внешние размеры кюветы 14×8×5 см³. Капля магнитной жидкости, наблюдаемая в эксперименте, имела длину 5 см, ее профиль был практически постоянен по всей длине. Поверхностное натяжение сказывалось только вблизи боковых стенок кюветы на расстоянии порядка 0,1 см.

Подбиралось минимальное магнитное поле при котором заданный объем магнитной жидкости удерживается на стенке кюветы около острия клина. На фиг. 3 приведены экспериментальные точки *a*, оказавшиеся достаточно близкими к теоретической кривой *I*.

Экспериментально определялось критическое расстояние, при котором начинался спонтанный подъем жидкости. Измерения проводились в неоднородном магнитном поле клина с системой из двух вертикальных стеклянных трубок. Одна стеклянная трубка касалась острия клина, закрепленного вместо одной плоской насадки. Вторая стеклянная трубка выносилась за пределы магнитного поля. С увеличением магнитного поля до некоторого критического значения разность высот в трубках монотонно увеличивается. При некотором критическом значении магнитного поля часть магнитной жидкости, отрываясь от объема жидкости, поднималась по трубке к острию магнита и прилипала к нему, образуя каплю. Измерялось расстояние между острием клина и свободной поверхностью магнитной жидкости вне поля в момент отрыва жидкости. На фиг. 3 экспериментальные точки *b* достаточно близки к теоретической кривой 4.

Авторы благодарят В. В. Гогосова за полезное обсуждение и интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей//Итоги науки и техники. ВИНТИ. Мех. жидкости и газа. 1981. Т. 16. С. 76—208.
2. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
3. Кирюшин В. В., Чыонг За Бинь. Фигуры равновесия намагничивающейся жидкости в магнитном поле//Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 123—128.
4. Берковский Б. М., Смирнов Н. Н. Некоторые решения уравнения поверхности намагничивающейся жидкости//Магнит. гидродинамика. 1984. № 1. С. 15—20.
5. Krueger D. A., Jones T. B. Hydrostatic profile of ferrofluid around a vertical current-carrying wire//Phys. Fluids. 1974. V. 17. № 10. P. 1831—1833.
6. Bacri T.-C., Perzynski R., Salin O., Tourinho F. Magnetic wetting transition//Europhys. Lett. 1988. V. 5. № 6. P. 547—552.

Москва

Поступила в редакцию
18.VII.1990