

УДК 532.595

© 1992 г. Г. Н. ПОСТНИКОВ, С. В. ЧАХЛОВ

## О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В ПРОРУБИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Предлагается численный метод определения собственных частот и форм малых колебаний идеальной жидкости в полупространстве, ограниченном сверху твердой плоскостью с отверстием произвольной формы. Учитывая монотонную зависимость собственных значений от формы области, можно утверждать, что собственные значения для полупространства суть универсальные верхние границы для соответствующих собственных значений баков с произвольной границей, но имеющих ту же самую свободную поверхность.

Для отверстий в форме полосы и круга задача решалась в [1—5] вариационными методами.

Математически задача формулируется так [1]

$$z < 0: \Delta\Phi = 0 \quad (1)$$

$$(x, y, z) \in S: \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$$

$$(x, y, z) \in \Sigma: \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \lambda\Phi \left( \lambda = \frac{\omega^2 a}{g} \right)$$

$$R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty: \Phi = O(R^{-1})$$

Здесь  $\Phi(x, y, z)$  — безразмерный потенциал скорости жидкости,  $\lambda$  — собственное значение,  $g$  — ускорение сил тяжести, направленное противоположно оси  $z$ ,  $a$  — характерный размер поверхности  $\Sigma$ ,  $\omega$  — собственная частота колебаний жидкости,  $S$  — смоченная поверхность плоскости  $z = 0$ .

Используя функцию Грина уравнения Лапласа для задачи Неймана в полупространстве  $z < 0$ , получим из (1) интегральное уравнение

$$\Phi(P) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{\Phi(M)}{R(P, M)} d\Sigma \quad (2)$$

вместе с условием разрешимости задачи Неймана

$$\int_{\Sigma} \Phi(M) d\Sigma = 0 \quad (3)$$

Здесь  $R(P, M)$  — расстояние от произвольной точки  $P$  полупространства  $z \leq 0$  до текущей точки  $M$  на  $\Sigma$ .

Пусть замкнутая граница области  $\Sigma$  описывается параметрическими уравнениями

$$x = \xi(l), \quad y = \eta(l), \quad l \in [0, L]$$

где  $l$  — длина дуги.

Задачу (2), (3) будем решать итерационным методом. Возьмем произвольные значения  $\Phi_i = \Phi(x_i, y_i, 0)$ , ( $i = 1, \dots, N$ ) потенциала в узлах  $(x_i, y_i)$  квадратуры Гаусса для области  $\Sigma$ . В практических расчетах брались значения  $\Phi_i$ , линейно

зависящие только от одной из переменных  $x$  или  $y$ . Веса этой квадратуры обозначим  $\gamma_i$ . Тогда вместо условия (3) имеем

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i \Phi_i = b$$

Теперь можно задать начальные значения  $\Phi_i^*$ , приближенно удовлетворяющие условию (3)

$$\Phi_i^* = \Phi_i - \frac{b^*}{s} \quad (i = 1, \dots, N), \quad s = \sum_{i=1}^N \gamma_i$$

где  $s$  — площадь области  $\Sigma$ .

Следующие приближения  $\Phi_i^n$  ( $i = 1, \dots, N$ ) к первой собственной форме колебаний определяются из итерационного процесса

$$\Phi_i^{n+1} = \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j (\Phi_j^n - \Phi_j^n)}{[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]^{1/2}} + \Phi_i^n \delta_i \right] \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4)$$

$$\alpha^{n+1} = \sum_{i=1}^N \gamma_i (\Phi_i^{n+1})^2, \quad b^{n+1} = \sum_{i=1}^N \gamma_i \Phi_i^{n+1}$$

$$\lambda^{n+1} = \left[ \alpha^{n+1} - \frac{(b^{n+1})^2}{s} \right]^{-1/2} \quad (5)$$

$$\Phi_i^{n+1} = \lambda^{n+1} \left( \Phi_i^{n+1} - \frac{b^{n+1}}{s} \right) \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$\begin{aligned} \delta_i &= \int_0^L \frac{[\eta(l) - y_i] \xi'(l) - [\xi(l) - x_i] \eta'(l)}{([\eta(l) - y_i]^2 + [\xi(l) - x_i]^2)^{1/2}} dl \approx \\ &\approx \sum_{q=1}^M g_q \frac{[\eta(l_q) - y_i] \xi'(l_q) - [\xi(l_q) - x_i] \eta'(l_q)}{([\eta(l_q) - y_i]^2 + [\xi(l_q) - x_i]^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\lambda^{n+1}$  — приближение к первому собственному значению задачи (1),  $\Phi_i^{n+1}$ ,  $\alpha^{n+1}$ ,  $b^{n+1}$ ,  $\delta_i$  — вспомогательные величины,  $g_q$ ,  $l_q$  — веса и узлы квадратуры Гаусса для интервала длины дуги  $[0, L]$ . Здесь штрих (') означает взятие производной по длине дуги  $l$ . Формулы (4) и (6) получены выделением особенности и ее интегрированием в полярных координатах с центром в точке  $(x, y)$ . Итерации (4)–(6) выполнялись до тех пор, пока  $|\lambda^{n+1} - \lambda^n| > 10^{-4}$ .

Для получения приближения ко второй собственной форме необходимо заменить (5) на

$$c^{n+1} = \sum_{i=1}^N \gamma_i \Phi_i^{n+1} \Phi_i^1, \quad \lambda^{n+1} = \left[ \alpha^{n+1} - \frac{(b^{n+1})^2}{s} - c^{n+1} \right]^{-1/2}$$

$$\Phi_i^{n+1} = \lambda^{n+1} \left( \Phi_i^{n+1} - \frac{b^{n+1}}{s} - c^{n+1} \Phi_i^1 \right) \quad (i = 1, \dots, N)$$

т. е. на каждой итерации дополнительно проводится ортогонализация к ранее определенной первой собственной форме  $\Phi^1$ . Аналогично с помощью ортогонализации к уже найденным собственным формам вычисляются и все последующие формы колебаний.

Если область  $\Sigma$  делится на две симметричные части, то можно ограничиться рассмотрением только одной из частей, предполагая для другой либо симметрию, либо антисимметрию потенциала скорости.

n	m				
	0	1	2	3	4
I	4,1210	2,75474	4,12129	5,40008	6,6305
	4,1213	2,75476	4,12132	5,40005	6,6304
II	7,339	5,891	7,340	8,720	10,044
	7,342	5,892	7,342	8,718	10,046
III	10,51	9,028	10,51	11,93	13,31
	10,52	9,033	10,52	11,94	13,32
IV	13,65	12,16	13,65	15,10	16,50
	13,68	12,17	13,68	15,13	16,54
V	16,75	15,27	16,77	18,2	19,6
	16,83	15,32	16,83	18,3	19,7
VI	19,8	18,4	19,8	21,3	22,7
	20,0	18,5	20,0	21,5	22,9

Когда же  $\Sigma$  — кольцо с единичным внешним радиусом и внутренним радиусом  $0 \leq r < I$ , потенциал  $\Phi$  можно представить в цилиндрических координатах  $\rho, z, \beta$

$$\Phi(\rho, z, \beta) = \Psi_m(\rho, z) \frac{\sin}{\cos}(m\beta) \quad (m = 0, 1, \dots)$$

а для  $\Psi_m$  из (2), (3) следует интегральное уравнение

$$\Psi_m(\rho, z) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_r^I \Psi_m(\mu, 0) G_m(\rho, z, \mu) d\mu \quad (7)$$

с условием разрешимости для  $m = 0$

$$\int_r^I \Psi_m(\mu, 0) \mu d\mu = 0$$

Для ядра  $G_m$  можно получить рекуррентную формулу

$$G_0(\rho, z, \mu) = \frac{4K(d)}{R_1}, \quad G_1(\rho, z, \mu) = \frac{2}{\rho\mu R_1} [(\rho^2 + \mu^2 + z^2)K(d) - R_1^2 E(d)]$$

$$(2m + 1)G_{m+1} = \frac{2m(2 - d^2)}{d^2} G_m - (2m - 1)G_{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

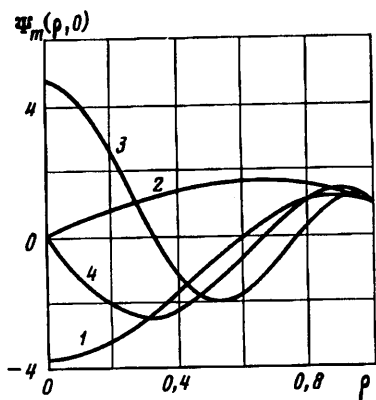
$$R_1^2 = (\rho + \mu)^2 + z^2, \quad d = \frac{2(\rho\mu)^{1/2}}{R_1}$$

где  $K(d), E(d)$  — полные эллиптические интегралы.

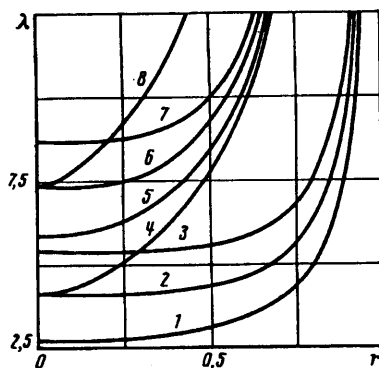
Уравнение (7) также решалось итерационным методом, причем для вычисления интеграла использовалась квадратура Гаусса с 29 узлами и предварительное выделение логарифмической особенности в ядре  $G_m(\rho, 0, \mu)$  при  $\mu \rightarrow \rho$ .

В таблице приведены собственные значения для круга единичного радиуса, определенные указанным методом (сверху) и заимствованные из [2] (снизу). Нижний индекс — номер тона,  $m = 0, 1, \dots$  означает число узлов собственной формы колебания в окружном направлении, а верхний индекс — номер формы,  $n = I, II, \dots$  соответствует числу узлов в радиальном направлении.

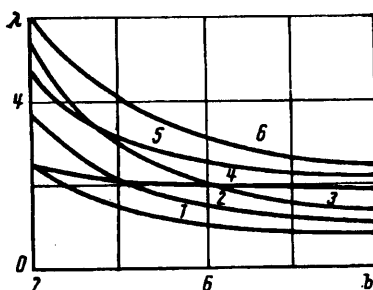
Видим, что результаты совпадают с точностью от трех до пяти значащих цифр и рассогласование увеличивается с номером формы. На фиг. 1 кривые 1 — 4 — соответственно первая и вторая формы свободной поверхности для осесиммет-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ричного и антисимметричного колебаний. Формы нормированы так, что амплитуда на кромке отверстия равна единице. Характерной особенностью всех форм колебаний является наличие локального минимума формы непосредственно около кромки отверстия.

На фиг. 2 приведена зависимость собственных значений  $\lambda_m^k$  от внутреннего радиуса кольца  $r$ . Кривые 4, 8 соответствуют собственным значениям первой и второй формы нулевого тона; 1—3 и 5—7 — соответственно второму и третьему тону первых трех форм. Видно, что наличие диска с радиусом менее 0,25 на свободной поверхности слабо меняет низшие частоты колебаний, за исключением осесимметричных  $\lambda_0^I, \lambda_0^{II}$ .

Расчеты по формулам (4)—(6) для круга единичного радиуса и  $N = 288$  дали, как и ожидалось, менее точные результаты для собственных частот:  $\lambda_1^I = 2,7515$ ,  $\lambda_0^I = 4,1109$ ,  $\lambda_2^I = 4,1125$ .

На фиг. 3 показана зависимость шести низших частот колебаний жидкости в прямоугольной проруби шириной 2 единицы от ее длины  $b$ . Кривые 1 и 4 соответствуют первой антисимметричной форме колебаний в направлении стороны длиной  $b$  и стороны длиной 2 единицы соответственно. Кривая 2 соответствует первой форме колебаний, симметричной по обоим направлениям. Кривая 3 — вторая антисимметричная форма колебаний по направлению стороны  $b$ , кривые 5 и 6 — первые формы для третьего и пятого тона соответственно. Все эти результаты получены для  $N = 144$ .

Для проруби в форме равностороннего треугольника со стороной 2 при  $N = 288$  получено  $\lambda^I = 3,7486$ ,  $\lambda^{II} = 3,7510$ ,  $\lambda^{III} = 5,0085$ .

Сравнивая предлагаемый итерационный метод с вариационным [1—5], следует заметить, что погрешность от итерации к итерации не накапливается и определяется не аппроксимационными свойствами базисных функций [1], а только точностью вычисления интеграла в (2). Кроме того, итерационный метод суще-

ственно быстрее работает, требует меньше памяти ЭВМ и пригоден для областей произвольной формы. К его недостаткам следует отнести уменьшение точности расчетов с ростом номера тона и зависимость скорости сходимости итераций от близости начального приближения к соответствующей собственной моде колебания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барняк М. Я., Луковский И. А. Определение частот и форм собственных колебаний идеальной жидкости в сосуде при большой относительной глубине // Прикл. механика. 1974. Т. 10. № 5. С. 109—115.
2. Henrici R., Troesch B. A., Wuytack L. Sloshing frequencies for a halfspace with circular or strip-like aperture // Z. angew. Math. und Phys. 1970. V. 21. № 3. P. 285—318.
3. Miles J. W. On the eigenvalue problem for fluid sloshing in a half-space // Z. angew. Math. und Phys. 1972. V. 23. № 6. P. 861—869.
4. Troesch B. A. Sloshing frequencies in a half-space by Kelvin inversion // Pacif. J. Math. 1973. V. 47. № 2. P. 539—552.
5. Troesch B. A., Troesch H. R. A remark on the sloshing frequencies for a half-space // Z. Angew. Math. und Phys. 1972. V. 23. № 4. P. 703—711.

Томск

Поступила в редакцию  
25.XII.1989