

УДК 532.529:532.517.4

© 1992 г. А. А. ВИНБЕРГ, Л. И. ЗАЙЧИК,
В. А. ПЕРШУКОВ

РАСЧЕТ ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА И ТЕПЛА В ТУРБУЛЕНТНЫХ ГАЗОДИСПЕРСНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Известные методы расчета турбулентных двухфазных потоков могут быть разделены на две группы. К первой группе относятся работы, основанные на смешанном эйлерово-лагранжевом описании движения среды: уравнения движения и энергии сплошной несущей фазы представляются и решаются в эйлеровых переменных, а уравнения движения и теплопереноса дисперсной фазы записываются и решаются в лагранжевых переменных. Вторая группа объединяет работы, использующие эйлерово представление уравнений движения и энергии для обеих фаз.

Наибольшие успехи в моделировании турбулентных струйных течений газовзвеси в рамках эйлерова подхода достигнуты в [1—5]. Одной из главных проблем в этом случае является определение турбулентных напряжений и турбулентного теплового потока в дисперсной фазе. В [1, 2] корреляционные моменты пульсаций скоростей дисперсной фазы непосредственно выражаются через рейнольдсовы напряжения несущего потока. Эти выражения получены в рамках локально-однородного приближения и поэтому справедливы для относительно мелких частиц при отсутствии в потоке больших градиентов скоростей твердой фазы. В [3—5], в некоторых других работах, например [6—8], для определения турбулентных напряжений в дисперсной фазе используются соотношения градиентного типа, аналогичные гипотезе Буссинеска в однофазном турбулентном потоке. Так как модели градиентного типа строятся в основном чисто феноменологическим путем на основе аналогии с соответствующими характеристиками переноса в однофазном потоке, то, как правило, они содержат большое количество эмпирических постоянных.

В настоящей работе для расчета струйных течений газовзвеси в рамках эйлерова подхода используются уравнения для вторых моментов пульсаций скорости и температуры дисперсной фазы. Целесообразность привлечения уравнений для вторых моментов пульсаций скорости частиц достаточно убедительно была продемонстрирована ранее на примерах расчета пристеночных газодисперсных течений в каналах [9—11]. В работе рассматриваются потоки с небольшой объемной концентрацией твердой примеси, когда столкновениями частиц между собой можно пренебречь и, следовательно, стохастическое движение частиц обусловлено только вовлечением их в пульсационное движение несущего потока. В расчетную схему наряду с уравнениями для турбулентной энергии газа и ее диссипации включаются уравнения для турбулентной энергии и турбулентного теплового потока твердой фазы, однако построенная модель не содержит дополнительных эмпирических постоянных, связанных с присутствием частиц в потоке.

1. Уравнения баланса массы, импульса и энергии несущей и дисперсной фаз при условиях постоянства физических свойств и небольшой концентрации частиц ($\varphi \ll 1$) в рамках механики взаимопроникающих сред [12] запишутся в виде

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\rho_p \varphi}{\rho} (u_i - v_i) + F_i \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial t}{\partial t} + u_k \frac{\partial t}{\partial x_k} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{C_p \rho_p \varphi}{C_p} (t - \theta)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi v_k}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi v_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi v_i v_k}{\partial x_k} &= \varphi \left(\frac{u_i - v_i}{\tau_u} + F_i \right) \\ \frac{\partial \varphi \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi v_k \theta}{\partial x_k} &= \varphi \frac{t - \theta}{\tau_t}\end{aligned}\quad (1.2)$$

где τ — время; u_i, v_i, t, θ — скорости и температуры газовой и дисперсной фаз; φ — объемная концентрация частиц; ρ, ρ_p, C, C_p — плотности и теплоемкости газовой и дисперсной фаз; τ_u, τ_t — времена динамической и тепловой релаксации частиц.

Уравнения (1.1), (1.2) вследствие того, что плотность материала частиц существенно больше плотности газа ($\rho_p \gg \rho$), учитывают только одну силу межфазного взаимодействия и межфазный теплообмен в квазистационарном приближении. Времена динамической релаксации частиц определяются соотношениями

$$\tau_u = \frac{\rho_p d_p^2}{18 \rho \nu (1 + 0,15 \text{Re}_p^{0,687})}, \quad \tau_t = \frac{C_p \rho_p d_p^2}{6 C_p a \text{Nu}_p}$$

$$\text{Re}_p = d_p |u - v|/\nu, \quad \text{Nu}_p = 2 + 0,6 \text{Re}_p^{1/2} \text{Pr}^{1/3}, \quad \text{Pr} = \nu/a$$

где d_p — диаметр частиц.

Осредним уравнения (1.1), (1.2) по ансамблю турбулентных реализаций; при этом для членов, содержащих объемную концентрацию примеси ψ , требуется выполнение условия $\langle \psi v_i' \rangle = \langle \psi v' \rangle = 0$, т. е. φ используется в качестве весовой функции, что аналогично известному способу осреднения Фавра в теории однофазных течений с переменной плотностью. Таким образом, осредненные уравнения баланса массы, импульса и энергии газодисперсного потока примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_k}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial U_i}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i' u_k' \rangle - \frac{\rho_p}{\rho \tau_u} [\Phi (U_i - V_i) + \langle \varphi' u_i' \rangle] + F_i\end{aligned}\quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_k' t' \rangle - \frac{C_p \rho_p}{C_p \tau_t} [\Phi (T - \Theta) + \langle \varphi' t' \rangle]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi V_k}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi U_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi V_i V_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Phi \langle v_i' v_k' \rangle}{\partial x_k} + \Phi \left(\frac{U_i - V_i}{\tau_u} + F_i \right) + \frac{\langle \varphi' u_i' \rangle}{\tau_u}\quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \Phi \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi \Theta V_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Phi \langle v_k' \theta' \rangle}{\partial x_k} + \Phi \frac{T - \Theta}{\tau_t} + \frac{\langle \varphi' t' \rangle}{\tau_t}$$

Турбулентное напряжение и тепловой поток в газовой фазе определяются соотношениями

$$\langle u_i' u_k' \rangle = \frac{2}{3} \delta_{ik} K - \nu_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right), \quad \langle u_i' t' \rangle = -\frac{\nu_T}{\text{Pr}_T} \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Коэффициент турбулентной вязкости газа рассчитывается на основе духпараметрической ($K-\epsilon$) модели турбулентности, в соответствии с которой $\nu_T = c_\mu K^2/\epsilon$.

Для корреляций $\langle \varphi' u_i' \rangle$ и $\langle \varphi' t' \rangle$, входящих в (1.3) и (1.4), имеют место следующие градиентные представления [13, 14]:

$$\begin{aligned} \langle \varphi' u_i' \rangle &= -\tau_u g_u \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \quad g_u = \frac{1}{\tau_u} \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{s}{\tau_u}\right) \right] F_u(s) ds \\ \langle \varphi' t' \rangle &= -\tau_u g_{ut} \langle u_k' t' \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \quad g_{ut} = \frac{1}{\tau_u} \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{s}{\tau_u}\right) \right] F_{ut}(s) ds \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$F_u(s) = \frac{\langle u_i'(\tau) u_k'(\tau+s) \rangle}{\langle u_i'(\tau) u_k'(\tau) \rangle}, \quad F_{ut}(s) = \frac{\langle u_i'(\tau) t'(\tau+s) \rangle}{\langle u_i'(\tau) t'(\tau) \rangle}$$

где $F_u(s)$, $F_{ut}(s)$ — двухвременные корреляционные функции пульсаций скорости и температуры газа вдоль траекторий частиц.

С учетом соотношений (1.5) уравнения (1.4) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi V_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi V_i V_k}{\partial x_k} &= -\frac{\partial \Phi \langle v_i' v_k' \rangle}{\partial x_k} + \Phi \left(\frac{U_i - V_i}{\tau_u} + F_i \right) - g_u \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \Phi \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi V_k \Theta}{\partial x_k} &= -\frac{\partial \Phi \langle v_k' \Theta' \rangle}{\partial x_k} + \Phi \frac{T - \Theta}{\tau_t} - \frac{\tau_u}{\tau_t} g_{ut} \langle u_k' t' \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Уравнения для осредненных скорости и температуры (1.6) включают члены, описывающие турбулентные напряжения и турбулентный тепловой поток в дисперсной фазе, возникающие вследствие вовлечения частиц в пульсационное движение несущего потока, а также турбулентный диффузионный перенос импульса и тепла, обусловленный неоднородностью распределения частиц в пространстве. Эти уравнения совпадают с соответствующими уравнениями для V_i и θ , полученными в [15] из уравнения для совместной плотности вероятности скорости и температуры частиц в турбулентном потоке. Последние члены в уравнениях (1.6) играют существенную роль только для мелких частиц, так как $g_u, g_{ut} \sim T_p/\tau_u$ при $\tau_u/T_p \rightarrow 0$ (T_p — время взаимодействия частиц с турбулентными пульсациями газа); напротив, для крупных частиц вклад этого члена становится несущественным, так как $g_u, g_{ut} \sim (T_p/\tau_u)^2$ при $\tau_u/T_p \rightarrow \infty$. Поэтому с целью упрощения записи системы уравнений движения и тепломассопереноса представим осредненные скорость и температуру дисперсной фазы в виде

$$\begin{aligned} V_i &= V_{ci} - \tau_u g_u \langle u_i' \mu_k' \rangle \frac{\partial \ln \Phi}{\partial x_k} \\ \Theta &= \Theta_c - \tau_u g_{ut} \langle u_k' t' \rangle \frac{\partial \ln \Phi}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Подставляя выражения (1.7) в (1.6), получим уравнения для величин V_{ci} и θ_c .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi V_{ci}}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi V_{ci} V_{ck}}{\partial x_k} &= -\frac{\partial \Phi \langle v_i' v_k' \rangle}{\partial x_k} + \Phi \left(\frac{U_i - V_{ci}}{\tau_u} + F_i \right) \\ \frac{\partial \Phi \Theta_c}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi V_{ck} \Theta_c}{\partial x_k} &= -\frac{\partial \Phi \langle v_k' \Theta' \rangle}{\partial x_k} + \Phi \frac{T - \Theta_c}{\tau_t} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Вторые члены в правых частях соотношений (1.7) описывают «диффузионную скорость» и «диффузионную температуру» мелких частиц, и вклад их в полные скорость V_i и температуру Θ с ростом инерционности частиц уменьшается.

С учетом (1.7) уравнение для концентрации дисперсной фазы в (1.4) записывается в форме уравнения диффузии

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi V_{ck}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ik}^* \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) \quad (1.9)$$

Здесь $D_{ik}^* = \tau_u g_u \langle u'_i u'_k \rangle = \tau_u g_u D_{ik} / T_L$, $D_{ik} = T_L \langle u'_i u'_k \rangle$ — тензор турбулентной диффузии безынерционной примеси; T_L — временной лагранжев макромасштаб турбулентности.

С учетом (1.7) члены, обусловленные обратным влиянием частиц на движение и теплоперенос несущего потока в уравнениях (1.3), примут вид

$$A_{ui} = \frac{\rho_p}{\rho \tau_u} [\Phi (U_i - V_i) + \langle \varphi' u'_i \rangle] = \frac{\rho_p \Phi}{\rho \tau_u} (U_i - V_i) \quad (1.10)$$

$$A_T = \frac{C_p \rho_p}{C \rho \tau_i} [\Phi (T - \Theta) + \langle \varphi' t' \rangle] = \frac{C_p \rho_p \Phi}{C \rho \tau_i} (T - \Theta)$$

Для определения турбулентных напряжений в дисперсной фазе $\langle v'_i v'_j \rangle$ используется уравнение переноса вторых моментов, получающееся из (1.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial \tau} + V_k \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial x_k} + \langle v'_i v'_k \rangle \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \langle v'_j v'_k \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \\ + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v'_i v'_j v'_k \rangle}{\partial x_k} = \frac{\langle v'_i u'_j \rangle + \langle v'_j u'_i \rangle - 2 \langle v'_i v'_j \rangle}{\tau_u} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Смешанный корреляционный момент пульсаций скоростей твердой и газовой фаз в рамках локально-однородного приближения связан с рейнольдсовыми напряжениями газа известным соотношением [2, 13]

$$\langle v'_i u'_j \rangle = f_u \langle u'_i u'_j \rangle, \quad f_u = \frac{1}{\tau_u} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{s}{\tau_u} \right) F(s) ds \quad (1.12)$$

Из (1.11) с учетом (1.12) следует

$$\begin{aligned} \langle v'_i v'_j \rangle = f_u \langle u'_i u'_j \rangle - \frac{\tau_u}{2} \left(\langle v'_i v'_k \rangle \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \langle v'_j v'_k \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial \tau} + V_k \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v'_i v'_j v'_k \rangle}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

В выражении (1.13) вместо V_i вводится V_{ci} ; эта замена не приводит к заметной погрешности, так как вообще вклад в $\langle v'_i v'_j \rangle$ членов в круглых скобках пропорционален τ_u и, следовательно, становится существенным только для относительно крупных частиц, когда разница между V_i и V_{ci} исчезает.

С целью упрощения выражения (1.13) для его членов в правой части примем изотропные представления

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial \tau} + V_{ck} \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\partial x_k} = \\ & = \frac{\delta_{ij}}{3} \left(\frac{\partial \langle v_n' v_n' \rangle}{\partial \tau} + V_{ck} \frac{\partial \langle v_n' v_n' \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v_n' v_n' v_k' \rangle}{\partial x_k} \right) \\ & \langle v_i' v_j' \rangle = \frac{\delta_{ij}}{3} \langle v_n' v_n' \rangle \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений выражение (1.13) для турбулентных напряжений в дисперсной фазе примет вид

$$\langle v_i' v_j' \rangle = \frac{2}{3} \delta_{ij} K_p - \nu_p \left(\frac{\partial V_{ci}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{cj}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial V_{ck}}{\partial x_k} \right) \quad (1.14)$$

$$\nu_p = f_u \nu_T + \frac{1}{3} \tau_u K_p, \quad K_p = \frac{1}{2} \langle v_n' v_n' \rangle$$

Согласно (1.14), для турбулентной вязкости дисперсной фазы справедливы следующие предельные соотношения:

$$\nu_p \rightarrow \nu_T, \quad \frac{\tau_u}{T_p} \rightarrow 0 \quad (f_u \rightarrow 1); \quad \nu_p \rightarrow \frac{1}{3} \tau_u K_p, \quad \frac{\tau_u}{T_p} \rightarrow \infty \quad (f_u \rightarrow \frac{T_p}{\tau_u})$$

Последнее соотношение совпадает с выражением, полученным в [10] для коэффициента турбулентной вязкости инерционной примеси из решения уравнения для плотности вероятности скорости частиц методом малого параметра.

Согласно (1.14), для расчета тензора турбулентных напряжений необходимо определить турбулентную энергию дисперсной фазы K_p . Для замыкания получаемого из (1.11) уравнения для K_p , т. е. для нахождения диффузионного члена, привлекается уравнение для третьих моментов пульсаций скорости дисперсной фазы

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\partial \tau} + V_n \frac{\partial \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\partial x_n} + \langle v_i' v_k' v_n' \rangle \frac{\partial V_j}{\partial x_n} + \langle v_j' v_k' v_n' \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_n} + \\ & + \langle v_i' v_j' v_n' \rangle \frac{\partial V_k}{\partial x_n} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial}{\partial x_n} \Phi \langle v_i' v_j' v_k' v_n' \rangle + \frac{3}{\tau_u} \langle v_i' v_j' v_k' \rangle - \\ & - \frac{1}{\Phi} \left(\langle v_i' v_k' \rangle \frac{\partial \Phi \langle v_j' v_n' \rangle}{\partial x_n} + \langle v_j' v_k' \rangle \frac{\partial \Phi \langle v_i' v_n' \rangle}{\partial x_n} + \langle v_i' v_j' \rangle \frac{\partial \Phi \langle v_k' v_n' \rangle}{\partial x_n} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

С целью получения простого алгебраического соотношения для третьих моментов пренебрегаем в уравнении (1.15) нестационарным и конвективным членами, а также членами, содержащими производные осредненной скорости

$$\langle v_i' v_j' v_k' \rangle = - \frac{\tau_u}{3} \left(\langle v_i' v_n' \rangle \frac{\partial \langle v_j' v_k' \rangle}{\partial x_n} + \langle v_j' v_n' \rangle \frac{\partial \langle v_i' v_k' \rangle}{\partial x_n} + \langle v_k' v_n' \rangle \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial x_n} \right) \quad (1.16)$$

При получении (1.16) из (1.15) использована также гипотеза М. Д. Миллионщикова о нормальном законе распределения пульсаций, в соответствии с которой четвертые моменты пульсаций выражаются через сумму произведений вторых.

Выражение (1.16) получено в рамках предположения, что основной

вклад в производство третьих моментов пульсаций дают градиенты вторых моментов, а не осредненной скорости. Аналогичное по форме соотношение получено в [16] для третьих моментов пульсаций скорости в однофазной среде. Суммируя по повторяющимся индексам в (1.16), получаем выражение для диффузионного члена в уравнении для турбулентной энергии дисперсной фазы

$$\langle v_n' v_n' v_k' \rangle = - \frac{20}{27} \tau_u K_p \frac{\partial K_p}{\partial x_k} \quad (1.17)$$

Соотношение (1.17) совпадает с формулой, полученной из решения уравнения для плотности вероятности скорости частиц [10].

С учетом (1.12) и (1.17) из (1.11) получается следующее уравнение для турбулентной энергии частиц:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_p}{\partial \tau} + V_{ck} \frac{\partial K_p}{\partial x_k} = & - \langle v_i' v_k' \rangle \frac{\partial V_{ci}}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Phi \Lambda_p \frac{\partial K_p}{\partial x_k} \right) + \frac{2}{\tau_u} (f_u K - K_p), \\ \Lambda_p = & \frac{10}{27} \tau_u K_p \end{aligned} \quad (1.18)$$

Для определения турбулентного теплового потока в дисперсной фазе используется уравнение переноса $\langle v_i' \theta' \rangle$, получающееся из (1.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v_i' \theta' \rangle}{\partial \tau} + V_k \frac{\partial \langle v_i' \theta' \rangle}{\partial x_k} + \langle v_i' v_k' \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} + \langle v_k' \theta' \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \\ + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v_i' v_k' \theta' \rangle}{\partial x_k} = \frac{\langle u_i' \theta' \rangle}{\tau_u} + \frac{\langle v_i' t' \rangle}{\tau_i} - \left(\frac{1}{\tau_u} + \frac{1}{\tau_i} \right) \langle v_i' \theta' \rangle \end{aligned} \quad (1.19)$$

Смешанные корреляционные моменты пульсаций скорости и температур твердой и газовой фаз в рамках локально-однородного приближения связаны с турбулентным тепловым потоком в газе соотношениями [14]

$$\langle v_i' t' \rangle = f_{ui} \langle u_i' t' \rangle, \quad f_{ui} = \frac{1}{\tau_u} \int_0^\infty \exp \left(-\frac{s}{\tau_u} \right) F_{ui}(s) ds \quad (1.20)$$

$$\langle v_i' \theta' \rangle = f_{ui} \langle u_i' t' \rangle, \quad f_{ui} = \frac{1}{\tau_i} \int_0^\infty \exp \left(-\frac{s}{\tau_i} \right) F_{ui}(s) ds$$

Для определения диффузионного члена в (1.14) привлекается уравнение переноса третьих моментов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v_i' v_j' \theta' \rangle}{\partial \tau} + V_k \frac{\partial \langle v_i' v_j' \theta' \rangle}{\partial x_k} + \langle v_i' v_j' \theta' \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \langle v_j' v_k' \theta' \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \\ + \langle v_i' v_j' v_k' \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi \langle v_i' v_j' v_k' \theta' \rangle + \left(\frac{2}{\tau_u} + \frac{1}{\tau_i} \right) \langle v_i' v_j' \theta' \rangle - \\ - \frac{1}{\Phi} \left(\langle v_i' \theta' \rangle \frac{\partial \Phi \langle v_j' v_k' \rangle}{\partial x_k} + \langle v_j' \theta' \rangle \frac{\partial \Phi \langle v_i' v_k' \rangle}{\partial x_k} + \langle v_i' v_j' \rangle \frac{\partial \Phi \langle v_k' \theta' \rangle}{\partial x_k} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

В рамках предположения, что основной вклад в производство третьих моментов пульсаций связан с градиентами вторых моментов, из (1.21) с учетом аналога гипотезы М. Д. Миллионщикова для корреляции $\langle v_i' v_j' v_k' \theta' \rangle$ получаем

$$\langle v_i' v_j' \theta' \rangle = - \frac{\tau_u \tau_i}{\tau_u + 2\tau_i} \left(\langle v_i' v_k' \rangle \frac{\partial \langle v_j' \theta' \rangle}{\partial x_k} + \langle v_j' v_k' \rangle \frac{\partial \langle v_i' \theta' \rangle}{\partial x_k} + \langle v_k' \theta' \rangle \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial x_k} \right) \quad (1.22)$$

Соотношения (1.20) и (1.22) замыкают уравнение (1.19). В уравнении (1.19) вместо V_i и θ могут быть введены V_α и θ_c , так как вклад левой части (1.19) в баланс $\langle v_i' \theta' \rangle$ существен только для инерционных частиц, когда разница между этими величинами исчезает.

С целью получения простого градиентного представления для турбулентного теплового потока в дисперсной фазе в уравнении (1.19) пренебрегаем нестационарным, конвективным и диффузионным членами, а также членом, описывающим порождение $\langle v_i' \theta' \rangle$ за счет градиента осредненной скорости, т. е. учитываем только члены, обусловленные взаимодействием частиц с турбулентными пульсациями газа и порождением $\langle v_i' \theta' \rangle$ за счет градиента осредненной температуры. В этом случае из (1.19) с учетом (1.22) следует

$$\langle v_i' v' \rangle = - \left[\frac{(\tau_u f_u + \tau_i f_i) v_T}{(\tau_u + \tau_i) \text{Pr}_T} + \frac{2\tau_u \tau_i}{3(\tau_u + \tau_i)} K_p \right] \frac{\partial \Theta_c}{\partial x_i} = - \frac{v_p}{\text{Pr}_p} \frac{\partial \Theta_c}{\partial x_i} \quad (1.23)$$

$$\text{Pr}_p = \frac{(\tau_u + \tau_i) (f_u v_T + \tau_u K_p / 3)}{(\tau_u f_u + \tau_i f_i) v_T / \text{Pr}_T + 2\tau_u \tau_i K_p / 3}, \quad (1.24)$$

Согласно (1.24), $\text{Pr}_p \rightarrow \text{Pr}_T$ при $\tau_u, \tau_i / T_p \rightarrow 0$ и $\text{Pr}_p \rightarrow (\tau_u + \tau_i) / 2\tau_i$ при $\tau_u, \tau_i / T_p \rightarrow \infty$.

Уравнения для турбулентной энергии газа и ее диссипации в присутствии частиц следует из (1.1); они совпадают с соответствующими уравнениями для однофазного потока, за исключением дополнительных членов, обусловленных межфазным взаимодействием,

$$\begin{aligned} A_K &= \frac{\rho_p}{\rho v_u} [\langle \varphi u_k' u_k' \rangle - \langle \varphi v_k' u_k' \rangle + (U_k - V_k) \langle \varphi' u_k' \rangle] \\ A_\varepsilon &= \frac{2\rho_p \nu}{\rho \tau_u} \left[\Phi \left\langle \frac{\partial (u_i' - v_i')}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi' (u_i' - v_i')}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. + (U_i - V_i) \left\langle \frac{\partial \varphi'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle (u_i' - v_i') \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \left\langle \varphi' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial (U_i - V_i)}{\partial x_k} \right] \end{aligned} \quad (1.25)$$

Для определения корреляций, входящих в (1.25), примем

$$\langle \varphi u_k' u_k' \rangle = 2\Phi K + \langle \varphi' u_k' \rangle^2 / \Phi, \quad \langle \varphi' v_k' u_k' \rangle = \Phi \langle v_k' u_k' \rangle \quad (1.26)$$

$$\left\langle \frac{\partial v_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle = f_\varepsilon \left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle, \quad f_\varepsilon = \frac{1}{\tau_u} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{\tau_u}\right) F_\varepsilon(s) ds$$

где $F_\varepsilon(s)$ — двухвременная корреляционная функция производных пульсаций скорости газа

$$F_\varepsilon(s) = \left\langle \frac{\partial u_i'(\tau)}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'(\tau+s)}{\partial x_k} \right\rangle / \left\langle \frac{\partial u_i'(\tau)}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'(\tau)}{\partial x_k} \right\rangle$$

Для определения второго члена в (1.25) положим

$$\left\langle \frac{\partial \varphi' (u_i' - v_i')}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\langle \varphi' u_i' \rangle}{\Phi} \quad (1.27)$$

Для определения третьего члена в (1.25) представим пульсации скорости частиц и скорости газа функциями (F, G) можно получить выражение

$$\left\langle \frac{\partial \varphi'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle = -\tau_u g_i \left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \quad (1.28)$$

$$g_i = \frac{1}{\tau_u} \int_0^\infty \left[1 - \exp \left(-\frac{s}{\tau_u} \right) \right] F_i(s) ds$$

где в соответствии с предположением об изотропности мелкомасштабного турбулентного движения при больших числах Рейнольдса можно принять

$$\left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{\delta_{ii}}{3} \left\langle \frac{\partial u_n'}{\partial x_k} \frac{\partial u_n'}{\partial x_k} \right\rangle \quad (1.29)$$

Двумя последними членами во втором соотношении (1.25) при больших числах Рейнольдса можно пренебречь. Таким образом, с учетом соотношений (1.5), (1.7), (1.26) — (1.29) члены межфазного взаимодействия (1.25) запишутся в виде

$$A_K = \frac{\rho_p}{\rho \tau_u} \left[2\Phi (1 - f_u) K - \tau_u g_u \langle u_i' u_k' \rangle (U_i - V_{ci}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right] \quad (1.30)$$

$$A_i = \frac{2\rho_p \varepsilon}{\rho \tau_u} \left[\Phi (1 - f_i) - \frac{1}{3} \tau_u g_u (U_k - V_{ck}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right]$$

Первые члены в квадратных скобках выражений (1.30) обусловлены пульсационным межфазным скольжением, а вторые — осредненным скольжением и неоднородностью распределения частиц. Проведенные анализ и расчеты показывают, что влиянием вторых членов по сравнению с первыми в рассматриваемых условиях струйных течений можно пренебречь.

Аппроксимируя $F_u(s)$, $F_{ii}(s)$ и $F_i(s)$, как и в [13, 14, 17], ступенчатыми функциями, получаем следующие выражения для коэффициентов вовлечения частиц в макро- и микропульсационное движение несущего потока:

$$f_u = 1 - \exp \left(-\frac{\tau_u}{T_p} \right), \quad g_u = g_{ui} = \frac{T_p}{\tau_u} - 1 + \exp \left(-\frac{\tau_u}{T_p} \right), \quad f_i = 1 - \exp \left(-\frac{\tau_i}{T_p} \right)$$

$$f_e = 1 - \exp \left(-\frac{\tau_u}{T_e} \right), \quad g_e = \frac{T_e}{\tau_u} - 1 + \exp \left(-\frac{\tau_u}{T_e} \right)$$

Время взаимодействия частиц с энергоемкими пульсациями газа определяется аппроксимационной формулой

$$T_p = \frac{T_L}{\sqrt{1 + (T_L |U - V_c| / L)^2}}, \quad L = \left(\frac{2}{3} K \right)^{1/2} T_L$$

$$T_p \rightarrow T_L, \quad \frac{T_L |U - V_c|}{L} \rightarrow 0; \quad T_p \rightarrow \frac{L}{|U - V_c|}, \quad \frac{T_L |U - V_c|}{L} \rightarrow \infty$$

где L — пространственный макромасштаб турбулентности.

Временной микромасштаб турбулентности в предположении об изотропности мелкомасштабного пульсационного движения определяется соотношением $T_e = (15\nu / \varepsilon)^{1/2}$.

2. Представим систему уравнений для расчета стационарного осесимметричного течения газозвеси в приближении теории пограничного слоя. Система уравнений, включающая уравнения переноса массы, импульса, тепла и пульсационной энергии газовой и твердой фаз, с учетом замыкающих соотношений запишется в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r U_r}{\partial r} = 0 \\
& U_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r (\nu + \nu_T) \frac{\partial U_x}{\partial r} \right] - \frac{\rho_p \Phi}{\rho \tau_u} (U_x - V_{cx}) + F_x \\
& U_x \frac{\partial T}{\partial x} + U_r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial T}{\partial r} \right] - \frac{C_p \rho_p \Phi}{C \rho \tau_i} (T - \Theta_c) \\
& \frac{\partial \Phi V_{cx}^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \Phi V_{cx} V_{cx}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Phi \nu_p \frac{\partial V_{cx}}{\partial r}) + \Phi \left(\frac{U_x - V_{cx}}{\tau_u} + F_x \right) \\
& \frac{\partial \Phi V_{cx} V_{cr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \Phi V_{cr}^2}{\partial r} = - \frac{2}{3} \frac{\partial \Phi K_p}{\partial r} + \Phi \left(\frac{U_r - V_{cr}}{\tau_u} + F_r \right) \quad (2.1) \\
& \frac{\partial \Phi V_{cx} \Theta_c}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \Phi V_{cr} \Theta_c}{\partial r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Phi \langle v_r' \theta' \rangle)}{\partial r} + \Phi \frac{T - \Theta_c}{\tau_i} \\
& \frac{\partial \Phi V_{cx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \Phi V_{cr}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\tau_u}{T_L} g_u D_T \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \\
& U_x \frac{\partial K}{\partial x} + U_r \frac{\partial K}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial K}{\partial r} \right) + \nu_T \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon - \\
& - \frac{\rho_p}{\rho \tau_u} \left[2 \Phi (1 - f_u) K + \tau_u g_u (U_x - V_{cx}) \nu_T \frac{\partial U_x}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] \\
& U_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + U_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{K} \nu_T \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2 - C_2 \frac{\varepsilon^2}{K} + C_3 \frac{\varepsilon^2}{K} \frac{1}{4} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right)^3 \frac{U_r}{r} - \\
& - \frac{2 \rho_p \varepsilon}{\rho \tau_u} \left\{ \Phi (1 - f_s) - \frac{\tau_u g_u}{3} \left[(U_x - V_{cx}) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (U_r - V_{cr}) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] \right\} \\
& V_{cx} \frac{\partial K_p}{\partial x} + V_{cr} \frac{\partial K_p}{\partial r} = \nu_p \left(\frac{\partial V_{cx}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial}{\partial r} (r \Phi \Lambda_p \frac{\partial K_p}{\partial r}) + \frac{2}{\tau_u} (f_u K - K_p)
\end{aligned}$$

где $D_T = \nu_T / Sc_T$ — коэффициент турбулентной диффузии безынерционной примеси.

Для записи системы уравнений (2.1) учитывается, что структура пульсационных характеристик струйных течений близка к изотропной, в соответствии с чем используются соотношения

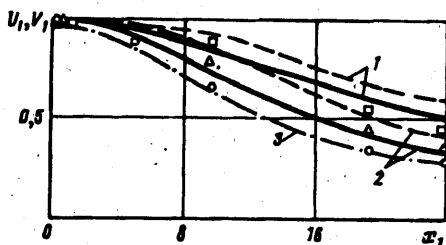
$$\langle u_r'^2 \rangle = \frac{2}{3} K, \quad \langle v_r'^2 \rangle = \frac{2}{3} K_p, \quad D_T = \frac{2}{3} T_L K$$

Временной макромасштаб пульсаций скорости газа определяется выражением $T_L = \alpha K / \varepsilon$, $\alpha = 3 C_\mu / 2 Sc_T$.

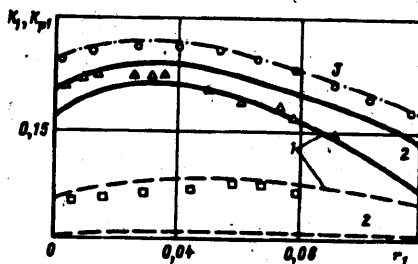
Уравнение для турбулентного радиального потока тепла дисперсной фазы запишется в виде

$$\begin{aligned}
& V_{cx} \frac{\partial \langle v_r' \theta' \rangle}{\partial x} + V_{cr} \frac{\partial \langle v_r' \theta' \rangle}{\partial r} = - \frac{2}{3} K_p \frac{\partial \Theta_c}{\partial r} + \frac{2 \tau_u \tau_i}{3 (\tau_u + 2 \tau_i) r \Phi} \frac{\partial}{\partial r} \times \\
& \times \left[r \Phi \left(2 K_p \frac{\partial \langle v_r' \theta' \rangle}{\partial r} + \partial \langle v_r' \theta' \rangle \frac{\partial K_p}{\partial r} \right) + \left(\frac{f_i}{\tau_u} + \frac{f_u}{\tau_i} \right) \langle u_r' t' \rangle - \left(\frac{1}{\tau_u} + \frac{1}{\tau_i} \right) \langle v_r' \theta' \rangle \right] \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Постоянные в (2.1) имеют стандартные значения [18, 19] $C_\mu = 0,09$; $\sigma_k = 1,0$; $\sigma_\varepsilon = 1,3$; $C_1 = 1,44$; $C_2 = 1,92$; $C_3 = 0,79$. Турбулентные числа



Фиг. 1



Фиг. 2

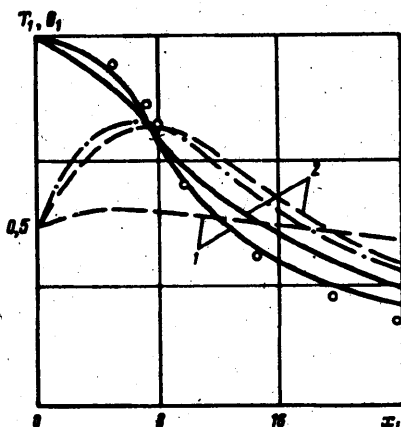
Прандтля и Шмидта в соответствии с экспериментальными данными для диффузии безынерционной примеси в осесимметричных струях приняты равными 0,8.

В качестве граничных условий на оси струи использовалось требование симметрии потока, а на внешней границе — равенство осредненных характеристик несущей и дисперсной фаз параметрам спутного потока. Для определения граничных условий для пульсационных характеристик несущего потока использовалось решение задачи о вырождении однородной турбулентности в газодисперсном потоке [17]. Начальные условия определялись или на основе экспериментальных данных, или с использованием решения на развитом участке трубы для осредненных и пульсационных характеристик несущей фазы и предположения об однородности распределения характеристик дисперсной фазы.

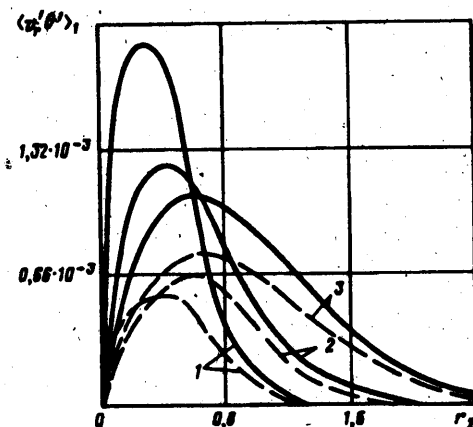
На фиг. 1 представлено сравнение расчетных и экспериментальных данных [20] по затуханию осевых скоростей газа и частиц диаметром $d_p = 50$ мкм по длине струи. Безразмерные параметры равны $U_1 = U/U_0$, $V_1 = V/U_0$, $x_1 = x/D$, где U_0 — скорость газа на срезе сопла, D — диаметр сопла. Кривые 1—3 получены соответственно при начальной массовой концентрации твердой фазы $\chi_0 = \rho_2 \Phi_0 / \rho = 0,85; 0,32; 0$. Присутствие дисперсной фазы приводит к увеличению дальности струи (сплошные линии на фиг. 1) по сравнению с однофазным течением, что определяется ламинаризацией потока и увеличением его полного импульса [6, 21]. В силу инерционности дисперсной примеси затухание продольной скорости частиц (штриховые линии на фиг. 1) происходит медленнее, чем скорости газа. Следует отметить, что использование для расчета турбулентной энергии частиц уравнения (2.2) приводит к уменьшению различия скоростей несущей и дисперсной фаз. Однако в силу изотропности пульсаций скорости в струйных потоках [21] учет нелокальности при расчете K_p не оказывает существенного влияния.

На фиг. 2 представлены результаты расчета изменения пульсационных энергий газа и частиц по сечению струи при $X/D = 20$. Безразмерные параметры $K_1 = \sqrt{K}/U_0$, $K_{p1} = \sqrt{K_p}/U_0$, $r_1 = r/x$. Кривая 1 соответствует частицам $d_p = 50$ мкм, $\chi_0 = 0,85$ (эксперимент [20]), 2 — $d_p = 170$ мкм, $\chi_0 = 0,86$ ([22]), 3 — однофазная струя ([20]); сплошные линии отражают изменение турбулентной энергии газа K , штриховые — K_p . С увеличением массовой концентрации частиц происходит подавление пульсаций как несущей, так и дисперсной фаз, что согласуется с результатами работ других авторов [3—7]. Пульсационная энергия твердой фазы существенно зависит от размера частиц. Для крупнодисперсной примеси K_p практически равна нулю, что обусловлено невовлечением крупных частиц в пульсационное движение газа, являющегося единственным источником их стохастического движения. Важно отметить, что при этом уменьшается и обратное влияние частиц на осредненные и пульсационные характеристики несущего потока, динамика которых мало отличается от случая однофазного течения. Это свидетельствует о консервативности пульсационной структуры газовой фазы по отношению к присутствию в потоке крупнодисперсной примеси.

Результаты расчетов тепловых характеристик в струйных потоках приведены на фиг. 3 и 4. На фиг. 3 показана зависимость безразмерных температур газа $T_1 = (T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$ и частиц $\Theta_1 = (\Theta - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$ (T_0 — температура газа на срезе сопла, T_∞ — на бесконечности) от осевой координаты $x_1 = x/D$. Кривые 1 — соответствуют расчету для $d_p = 50$ мкм, $\chi_0 = 0,32$; кривые 2 — $d_p = 500$ мкм, $\chi_0 = 0,36$. В случае крупнодисперсной примеси температуры частиц (штриховые линии) практически постоянны по длине, в то время как для мелкой дисперсной фазы (сплошные линии) происходит в соответствии с законом диффузии осредненное выравнивание температур газа и частиц с экспериментальными данными [22]. Уменьшение разности температур приводит к интенсификации теплообмена



Фиг. 3



Фиг. 4

теплообмена, что приводит к достаточно быстрому выравниванию температур фаз, после чего происходит автомодельное затухание температуры по закону $1/x$. На автомодельном участке струи температура частиц всегда превышает температуру газа, что обусловлено их тепловой инерционностью.

Расчеты, выполненные с использованием уравнения баланса для турбулентного теплового потока в твердой фазе (2.1), показали, что влияние конвективного и диффузионного переноса $\langle v_i' \theta_i' \rangle$ в наибольшей степени проявляется в случае умеренной тепловой инерционности частиц. Учет нелокального характера корреляции $\langle v_i' \theta_i' \rangle$ приводит к более быстрому выравниванию температур несущей и дисперсной фаз. Этот эффект проявляется в основном вблизи оси струи, что продемонстрировано на фиг. 3 (штрихпунктирная линия).

На фиг. 4 представлены кривые изменения турбулентного теплового потока $\langle v_i' \theta_i' \rangle_1 = \langle v_i' \theta_i' \rangle / U_0(T_0 - T_{0ф})$ в различных сечениях двухфазной струи ($d_p = 50$ мкм; $x/D = 5, 10, 20$ — кривые 1—3) в зависимости от координаты $r_2 = r/D$. С ростом размера частиц происходит уменьшение интенсивности турбулентного теплового потока, что определяется преобладанием детерминированного проведения инерционных частиц и невовлечением их в пульсационное движение газа.

Следует отметить существенное различие изменения $\langle v_i' \theta_i' \rangle$ в случаях остывания и нагрева дисперсной фазы (соответственно сплошные и штриховые линии на фиг. 4). Данное обстоятельство определяется знаком градиента осредненной температуры частиц, в соответствии с чем в случае подачи более холодных, чем газ, частиц минимальный турбулентный тепловой поток наблюдается на начальном участке струи, а при подаче более горячих частиц — на автомодельном.

Таким образом, предложена модель переноса импульса и тепла в турбулентных газодисперсных потоках, использующая для описания характеристик частиц уравнения баланса турбулентной энергии и турбулентного теплового потока. Апробация модели, проведенная для широкого диапазона изменения размеров и массовой концентрации частиц, свидетельствует о достаточно удовлетворительном совпадении расчетных и экспериментальных данных по осредненным и пульсационным характеристикам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bulzan D. L., Shuen J.-S., Faeth G. M. Particle-laden swirling free jets: measurements and predictions//AIAA Pap. 1987. № 303. P. 20.
2. Desjonqueres P., Berlemont A., Gouesbet G. A lagrangian approach for the prediction of particle dispersion in turbulent flows//J. Aerosol Sci. 1988. V. 19. № 1. P. 99—103.
3. Adeniji-Fashola A., Chen C. P. Comprehensive modeling of turbulent particulate flows using Eulerian and Lagrangian schemes//AIAA Pap. 1987. № 1347. P. 1—8.
4. Mostafa A. A., Mongia H. C. On the modeling of turbulent evaporating sprays: Eulerian versus Lagrangian approach//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1987. V. 30. № 12. P. 2583—2593.
5. Гасин Л. Б., Наумов В. А. Влияние дисперсной примеси на турбулентную структуру струи//Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 2. С. 336—339.

6. Шрайбер А. А., Гасин Л. Б., Наумов В. А., Яценко В. П. Турбулентные течения газозвеси. Киев: Наук. думка, 1987. 239 с.
7. Chen C. P., Wood P. E. Turbulence closure modeling of the dilute gas-particle axisymmetric jet//AIChE Journal. 1986. V. 32. № 1. P. 163—166.
8. Pourahmadi F., Humphrey J. A. C. Modeling solid-fluid turbulent flows with application to predicting erosive wear//Phys. Chem. Hydrodyn. 1983. V. 4. № 3. P. 191—219.
9. Dobrowolski B. A computational model for the prediction of two-dimensional non-equilibrium turbulent recirculating two-phase flow//Arch. Mech. 1986. V. 38. № 5—6. P. 611—634.
10. Rizk M. A., Elghobashi S. E. A two-equation turbulence model for dispersed dilute confined two-phase flows//Int. J. Multiphase. Flow. 1989. V. 15. № 1. P. 119—133.
11. Кондратьев Л. В., Шор В. В. Исследование турбулентного течения газозвеси в трубе с учетом соударения со стенкой и вращения частиц//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 56—64.
12. Деревич И. В., Ерошенко В. М. Расчет осредненного скоростного скольжения фаз при турбулентном течении дисперсных потоков в каналах//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 2. С. 69—78.
13. Гусев И. Н., Зайчик Л. И. Моделирование динамики частиц в пристеночной области газодисперсного турбулентного потока//Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 1. С. 50—60.
14. Нугматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
15. Derevich I. V., Yeroshenko V. M., Zaichik L. I. Hydrodynamics and heat transfer of turbulent gas suspension flows in tubes. 1. Hydrodynamics//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1989. V. 32. № 12. P. 2329—2339.
16. Hanjalic K., Launder B. E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows//J. Fluid Mech. 1972. V. 52. № 4. P. 609—638.
17. Зайчик Л. И., Першуков В. А. Влияние частиц на начальную стадию вырождения однородной турбулентности//Инж.-физ. журн. 1990. Т. 58. № 4. С. 556—560.
18. Launder B. E., Spalding D. B. The numerical computation of turbulent flows//Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1974. V. 3. № 2. P. 269—289.
19. Поуп С. Б. Объяснение аномальной разницы в распространении осесимметричной и плоской турбулентных струй//Ракетная техника и космонавтика. 1978. Т. 16. № 3. С. 109—111.
20. Modarress D., Tan H., Elghobashi S. Two-component LDA measurement in a two-phase turbulent jet//AIAA Journal. 1984. V. 22. № 5. P. 624—630.
21. Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А., Крашенинников С. Ю. и др. Теория турбулентных струй. М.: Наука, 1984. 716 с.
22. Tsuji Y., Morikawa Y., Karimine K., Tanaka T., Nishida S. Measurement of an axisymmetric jet laden with coarse particles//Int. J. Multiphase Flow. 1988. V. 14. № 5. P. 565—574.
23. Голубев В. А., Клишкин В. Ф. Исследование турбулентных затопленных струй газа различной плотности//Инж.-физ. журн. 1978. Т. 34. № 3. С. 493—499.

Москва

Поступила в редакцию
4.VI.1991