

УДК 532.529

© 1992 г. В. Л. ЗЕЛЕНКО, В. П. МЯСНИКОВ

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ПРИ БАРБОТАЖЕ ГАЗА В КОЛОННЕ С ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ВСТАВКАМИ

Неустойчивость барботажного слоя с однородным распределением пузырей рассмотрена в [1,2]. Стационарные состояния с разрывным распределением газосодержания исследованы в [3]. Восходящий газожидкостный поток, возникающий либо вследствие неустойчивости, либо благодаря неравномерному подводу газа, обычно также неустойчив [4—6]. Вместе с тем в [7] с помощью вертикальных вставок, отходящих с боковой поверхности колонны в ее внутреннюю часть, удалось получить стационарную осесимметричную циркуляцию жидкости с пузырями, содержащимися лишь в восходящем потоке. В работах [8—10] приведены экспериментальные данные о влиянии протока жидкости через сечение колонны на однородность распределения пузырей по сечению. В настоящей статье исследуется влияние вертикальных вставок и протока жидкости через горизонтальное сечение колонны на циркуляцию жидкости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим без учета концевых эффектов класс прямолинейно-параллельных течений в высокой вертикальной цилиндрической барботажной колонне с произвольно заданным поперечным сечением Ω_0 . Газовые пузыри равномерно подводятся в область Ω_2 , расположенную в бесконечно удаленном сечении, а в сечении на развитом участке пузыри занимают область Ω_1 .

Пусть W — скорость всплытия одиночного пузыря, R — горизонтальный масштаб, совпадающий с радиусом колонны, когда Ω_0 — круг, d — диаметр пузыря, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости, g — ускорение силы тяжести, q_0 — газосодержание во входном по газу сечении, e — единичный вектор вертикального направления. На основе введенных величин составим безразмерные критерии: Архимеда $Ar = q_0 g R^2 / \nu W$, Фруда $F = W(Rg)^{-1/2}$, Рейнольдса $Re = Wd/\nu$, и далее в качестве масштабов длины и скорости используем R и W .

В предположении несжимаемости фаз показано [3], что при $F \ll 1$ безразмерные скорости V_z и V газовой и жидкой фаз связаны простейшим соотношением $V_z = V + e$, а газосодержание на линии тока газовой фазы постоянно и равно q_0 . Предположим, что $q_0 \ll 1$, $Re \ll 1$. При этом увеличение эффективной вязкости газожидкостной смеси в сравнении с молекулярной вязкостью жидкости можно описать без учета скольжения фаз [11] с помощью известной «поправки Эйнштейна» [12], имеющей порядок q_0 . С другой стороны, поскольку в дальнейшем задача рассматривается в рамках приближения Буссинеска [13], в соответствии с которым изменение плотности среды учитывается лишь в члене с подъемной силой в уравнении движения, то указанным изменением вязкости можно пренебречь. Таким образом, предполагая движение стационарным, запишем с точностью до членов порядка q_0 уравнение движения жидкой фазы и условия равенства расходов фаз во входном сечении и на развитом участке в виде [3]

$$\Delta V = \frac{dP}{dZ} - Ar \chi(\Omega_1) \quad (1.1)$$

$$\int_{\Omega_0} (V - \kappa) ds = 0, \int_{\Omega_1} (V + 1) ds = \int_{\Omega_2} (1 + \kappa) ds \quad (1.2)$$

где P — безразмерное возмущение гидростатической составляющей давления, $\chi(\Omega_j)$ — функция множества области Ω_j , κ — заданная во входном сечении скорость жидкости, Z — координата вдоль оси колонны.

В силу линейности (1.1) V можно представить в виде

$$V = -\frac{dP}{dZ} u_0 + \text{Ar} u_1, \quad (1.3)$$

где u_1 — скорость жидкости, индуцируемая силой единичной плотности, распределенной в Ω_r . Таким образом, предполагая выполненным условие прилипания на границе Γ области Ω_0 , имеем задачу

$$\Delta u_1 = -\chi(\Omega_j), \quad u_1(\Gamma) = 0 \quad (1.4)$$

Подставляя (1.3) в (1.2), получим систему двух уравнений относительно Ar и dP/dZ , после решения которой с учетом (1.3) имеем

$$\text{Ar} = \frac{(s_2 - s_1) B_{00} + \kappa (s_2 B_{00} - s_0 B_{01})}{B_{00} B_{11} - B_{01}^2} \quad (1.5)$$

$$V = \text{Ar} \left(u_1 - \frac{B_{01}}{B_{00}} u_0 \right) + \frac{\kappa s_0}{B_{00}} u_0, \quad B_y = \int_{\Omega_j} u_j ds \quad (1.6)$$

где s_i — площадь Ω_i .

Предположим, что кривая, ограничивающая Ω_1 , описывается известным однопараметрическим семейством функций, следующим либо из наблюдений, либо принятым в качестве упрощающего допущения. При этом если решение задачи (1.4) известно, то известны также зависимости B_y от параметра, задающего границу области Ω_1 . Подстановка B_y в (1.5) позволяет найти по заданному Ar возможные значения этого параметра, а значит, и заполненную газовыми пузырями область Ω_1 и поле скорости V .

Независимо от вида областей Ω_0 , Ω_1 и скорости протока κ условия равенства расходов фаз (1.2) позволяют сделать весьма общий вывод. Действительно, вводя средние скорости жидкости внутри пузырьковой дорожки $\langle V_+ \rangle$ и в области, свободной от пузырей $\langle V_- \rangle$, с помощью (1.2) нетрудно получить

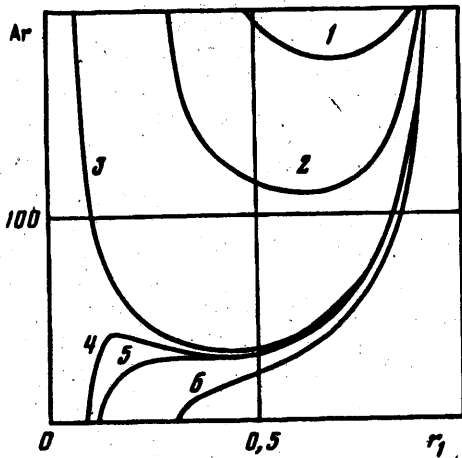
$$\langle V_+ \rangle = \frac{(\kappa + 1) s_2}{s_1} - 1; \quad \langle V_- \rangle = -1 + \frac{(\kappa + 1)(s_0 - s_2)}{s_0 - s_1}$$

$$\langle V_+ \rangle = \frac{1}{s_1} \int_{\Omega_1} V ds; \quad \langle V_- \rangle = \frac{1}{s_0 - s_1} \int_{\Omega_3} V ds, \quad (1.7)$$

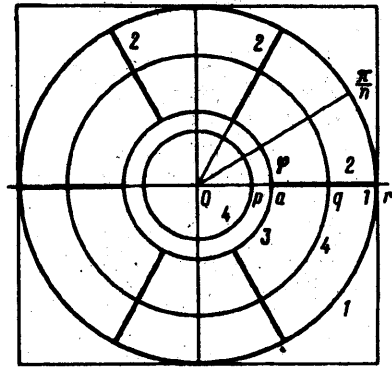
$$\Omega_3 = \Omega_0 / \Omega_1$$

В случае равномерного подвода газа $s_2 = s_0$ и $\langle V_- \rangle = -1$. Последнее равенство вследствие неравномерности профиля скорости требует существования в области, свободной от пузырей, некоторой подобласти, в которой скорость опускного движения жидкости превосходит скорость всплытия одиночного пузыря. Благодаря этому возможно существование самоподдерживающейся циркуляции за счет оттеснения пузырей в восходящий поток.

2. Осесимметричные течения в колонне формы кругового цилиндра.



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть Ω_i — концентрические круги радиусов r_i , причем $r_0 = 1, r_1, r_2 \leq 1$. В этом случае имеем

$$s_i = \pi r_i^2, \quad B_{00} = \sqrt{8}\pi, \quad B_{01} = \sqrt{8}\pi r_1^2 (2 - r_1^2)$$

$$B_{11} = \sqrt{8}\pi r_1^4 (1 - 4 \ln r_1), \quad u_0 = \sqrt{4} (1 - r_1^2)$$

$$u_1 = \sqrt{4} (r_1^2 (1 - 2 \ln r_1) - r_1^2)$$

при $r \leq r_1$ и $u_1 = -1/2 r_1^2 \ln r$ при $r_1 < r$, r — текущий радиус полярной системы координат (r, φ) . Подстановка полученных соотношений в (1.5), (1.6) дает

$$Ag = \frac{8 [(1 - r_1^2)(1 + \kappa (1 - r_1^2)) - (1 + \kappa)(1 - r_2^2)]}{r_1^4 (-r_1^4 + 4r_1^2 - 4 \ln r_1 - 3)} \quad (2.1)$$

$$V_+ = \sqrt{4} Ag [(r_1^2 - r^2) - 2r_1^2 \ln r - r_1^2 (2 - r_1^2)(1 - r^2)] + 2\kappa (1 - r^2)$$

$$V_- = \sqrt{4} Ag [-2r_1^2 \ln r - r_1^2 (2 - r_1^2)(1 - r^2)] + 2\kappa (1 - r^2) \quad (2.2)$$

При заданных Ag, r_2, κ из (2.1) следует радиус пузырьковой дорожки на развитом участке. Далее, с помощью (2.2) определяется скорость жидкости V внутри пузырьковой дорожки и во внешней области без пузырей, обозначенная соответственно через V_+ и V_- . Заметим, что (2.1) и (2.2) совпадают при $\kappa = 0, r_2 = 1$ с соответствующими формулами, полученными в [3].

На фиг. 1 показаны графики зависимости Ag от r_1 при $r_2 = 1$ и различных κ . Кривым с номерами от 1 до 6 соответствуют значения $\kappa = 0, 2, 0, -1, -1, 01, -1, 021, -1, 1$. Причем кривые 3 и 5 являются сепаратрисами, разделяющими семейства кривых без экстремума, с одним и двумя экстремумами. Все графики, расположенные выше кривой 3, имеют и притом только один минимум, т. е. при $-1 < \kappa$ существует критическое значение Ag^* , равное минимуму соответствующего графика. При $Ag < Ag^*$ нетривиальные режимы отсутствуют, при $Ag^* < Ag$ возможны два конечно-амплитудных течения с пузырьковыми дорожками, радиусы которых приближаются либо к нулю, либо к единице при $Ag \rightarrow \infty$. Профили скорости, соответствующей этим двум режимам при $\kappa = 0$, даны в [3]. Из фиг. 1 следует, что с увеличением κ растет Ag^* , что качественно описывает

эксперимент [9], в котором циркуляция в барботажном слое с направленным вверх потоком жидкости начиналась при больших газосодержаниях, чем при $\kappa = 0$.

Кривые, расположенные между сепаратрисами 3 и 5, имеют два экстремума — максимум и минимум. В весьма узкой области значений $-1,021 < \kappa - 1$ возможны три нетривиальных режима. Такая множественность стационарных решений позволяет естественным образом интерпретировать экспериментально наблюдаемые нестационарные биения при $\kappa \sim 1$. При $\kappa < -1,021$ и при всех значениях Ag возможен единственный нетривиальный режим, причем с увеличением Ag , r_1 приближается к единице, т. е. пузыри более равномерно распределяются по сечению и скорость циркуляции уменьшается, что соответствует экспериментальным данным [9, 10].

3. Течения в колонне с вертикальными вставками. Рассмотрим случай, когда Ω_0 (фиг. 2) является кругом 1 единичного радиуса с выброшенными симметрично расположенными отрезками 2 длины $1-a$, моделирующими вертикальные вставки, при этом a — радиус окружности 3. Экспериментально в условиях рассматриваемой геометрии колонны и круговой области Ω_2 отличие Ω_1 от круга не наблюдается. Поэтому предположим, что ограничивающая Ω_1 кривая 4 — окружность искомого радиуса r_1 , причем на фиг. 2 показаны два возможных положения этой окружности при $r_1 = p \leq a$ и $r_1 = \varphi a$. Обозначения p и q введены для более ясного указания области применимости формул, вид которых меняется при переходе через точку a .

Решение задачи (1.4) целесообразно представить в виде суперпозиции решений задач Пуассона с источниками, отличными от нуля, либо при $r \leq a$, либо при $a < r$. Таким образом, с учетом симметрии Ω_0 имеем задачу

$$\begin{aligned} \Delta v_{\lambda\rho} &= -\chi_{\lambda\rho} \\ r = 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}, \varphi = 0, a \leq r \leq 1, v_{\lambda\rho} &= 0 \\ \varphi = 0, 0 \leq r < a, \varphi = \frac{\pi}{n}, 0 \leq r < 1, \frac{\partial v_{\lambda\rho}}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\chi_{\lambda\rho} = 1, r \in [\lambda\rho], \chi_{\lambda\rho} = 0, r \notin [\lambda\rho]$$

Представляют интерес два случая: 1) $\lambda = 0, \rho = p \leq a$, 2) $\lambda = q > a, \rho = 1$. Если гладкое решение задачи (3.1) известно, то входящие в (1.3) — (1.6) u_i, B_{ij} можно представить в виде

$$u_0 = v_{0a} + v_{a1}, B_{00} = \Phi_{0a0a} + 2\Phi_{a10a} + \Phi_{a1a1} \quad (3.2)$$

$$u_{1p} = v_{0p}, B_{11p} = \Phi_{0p0p}, B_{01p} = \Phi_{0p0p} + \Phi_{pa0p} + \Phi_{a10p} \quad (3.3)$$

$$u_{1q} = u_0 - v_{q1}, B_{11q} = B_{00} - 2\Phi_{0aq1} - 2\Phi_{aqq1} - \Phi_{q1q1} \quad (3.4)$$

$$B_{01q} = B_{00} - \Phi_{0aq1} - \Phi_{aqq1} - \Phi_{q1q1}$$

$$u_{jp} = u_1, B_{j\rho} = B_{q\rho}, r' = r_1$$

$$\Phi_{bd\lambda\rho} = 2n \int_0^{\alpha_0} d\varphi \int_b^d r v_{bd\lambda\rho} dr, v_{bd\lambda\rho} = v_{\lambda\rho}, b \leq r \leq d, \alpha_0 = \frac{\pi}{n}$$

при этом использовано свойство взаимности потенциальных функций

$\Phi_{\lambda\rho b d} = \Phi_{\lambda\rho b d}$. Запишем с помощью метода Фурье решение задачи (3.1) в виде

$$v_{0\rho 0\rho} = \sqrt{4} (p^2 - r^2) + F_{0\rho}, \quad v_{0a q l} = F_{q l}$$

$$F_{bc} = \frac{1}{2} \alpha_{bc0} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{bc i} \left(\frac{r}{g_i} \right)^{i n} \cos(in\varphi) \quad (3.5)$$

$$v_{\rho a 0\rho} = \frac{1}{2} b_0 + b_{00} \ln r + \sum_{i=1}^{\infty} (b_i r^{i n} + c_i r^{-i n}) \cos(in\varphi) \quad (3.6)$$

$$v_{a b i \rho} = \sum_{i=1}^{\infty} (d_{\lambda\rho i} r^{-\gamma_i} + l_{\lambda\rho i} r^{\gamma_i}) \sin(\gamma_i n \varphi) \quad (3.7)$$

$$\gamma_i = \sqrt{2} (2i - 1), \quad g_i = \min(c, a)$$

Представление (3.7) используется для выражения скоростей с двумя наборами индексов $v_{a i 0\rho}$ и $v_{a q l}$. Вместе с тем необходимая для получения $\Phi_{q l q l}$ и $v_{q l}$ функция $v_{q l q l}$ не допускает аналогичного представления. Это связано с тем, что задача на собственные значения оператора $r^2 d^2/dr^2 + rd/dr$ с нулевыми краевыми условиями, к которой сводится рассматриваемое уравнение Пуассона, имеет пустой спектр. Для нахождения $v_{q l q l}$ применим вариационный метод Л. В. Канторовича [14]. Энергетический функционал задачи (3.1) имеет вид

$$J = \int_0^{a_0} d\varphi \int_r^1 r \left[\left(\frac{\partial v_{q l q l}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_{q l q l}}{\partial \varphi} \right)^2 - 2v_{q l q l} \right] dr$$

Представим скорость в виде

$$v_{q l q l} = \sum_{i=1}^{\infty} R_i(r) \sin(\gamma_i n \varphi) \quad (3.8)$$

После подстановки этого выражения в функционал J нетрудно получить систему уравнений Эйлера вариационной задачи

$$(rR_i)' - \frac{\gamma_i^2 n^2}{r} R_i + \frac{2r}{\pi \gamma_i} = 0, \quad (') = \frac{d}{dr}, \quad 1 \leq i$$

Решение этой задачи, удовлетворяющее условию $r = 1, R_i = 0$, имеет вид

$$R_i = \frac{2}{\pi \gamma_i (n^2 \gamma_i^2 - 4)} (r^2 - r^{-n \gamma_i}) + C_i (r^{n \gamma_i} - r^{-n \gamma_i}) \quad (3.9)$$

При $n = 4$ R_i имеет другой вид, однако этот случай в настоящей работе не рассматривается.

Входящие в (3.5) — (3.9) константы получаются из требования гладкости решения задачи (3.1) всюду в Ω_0 . Условия гладкости имеют вид

$$r = p, \quad v_{0\rho 0\rho} = v_{\rho a 0\rho}, \quad \frac{\partial v_{0\rho 0\rho}}{\partial r} = \frac{\partial v_{\rho a 0\rho}}{\partial r} \quad (3.10)$$

$$r = a, \quad v_{\rho a 0\rho} = v_{a i 0\rho}, \quad \frac{\partial v_{\rho a 0\rho}}{\partial r} = \frac{\partial v_{a i 0\rho}}{\partial r}$$

Из (3.10) следует система, содержащая лишь d_{0pk}

$$\sum_{k=1} (a^{-\eta_k} + a^{\eta_k}) d_{0pk} = \frac{\pi p^2}{2n}$$

$$\sum_{k=1} \gamma_k \left(\frac{a^{-\eta_k}}{\gamma_k - i} + \frac{a^{\eta_k}}{\gamma_k + i} \right) d_{0pk} = 0, \quad i = 1, \dots \quad (3.11)$$

Введем в рассмотрение параметр $\varepsilon^{l/2n}$, который далее будем предполагать малым $\varepsilon \ll 1$. При этом каждую неизвестную величину можно представить в виде разложения в ряд

$$L = \sum_{l=0} L^{(l)} \varepsilon^l \quad (3.12)$$

Подставляя рассматриваемое разложение d_{0pk} в (3.11) и, требуя исчезновения членов, содержащих отрицательные степени ε , имеем $d_{0pk}^{(l)} = 0$ ($l < 2k-1$). С другой стороны, приравнивая последовательно при $l=0, 1, 2, 3$ коэффициенты при ε^l к нулю и заменяя i на $i-1$, с тем чтобы нумерация начиналась не с нуля, а с единицы, получим четыре линейные системы уравнений

$$\sum_{k=1} T_{ik} d_{0pk}^{(2k-1+i)} = M_{il}$$

$$T_{ik} = \frac{\gamma_k}{\gamma_k - i + 1}, \quad M_{i0} = \frac{\pi p^2}{2n}, \quad M_{i\alpha} = 0, \quad i > 1$$

$$M_{i1} = 0, \quad M_{i2} = \frac{d_{0p1}^{(1)}}{2i-1}, \quad M_{i3} = 0$$

Введем матрицу D_{ik} , обратную матрице T_{ik} , и выпишем решение этих систем

$$d_{0pk}^{(2k-1)} = \frac{\pi p^2}{2n} D_{k1}, \quad d_{0pk}^{(2k)} = 0, \quad d_{0pk}^{(2k+1)} = -\frac{\pi G_{1k} D_{11} p^2}{4n}$$

$$d_{0pk}^{(2k+2)} = 0, \quad G_{ik} = \sum_{l=1} \frac{D_{il}}{\gamma_{il}} \quad (3.13)$$

Полученных соотношений достаточно, чтобы составить выражения скоростей и потоков с точностью до ε^4 . После очевидных, хотя и громоздких преобразований получаются выражения для коэффициентов в степенных рядах типа (3.12)

$$\Phi_{0p0p}^{(0)} = \frac{1}{8} \pi p^4 \left(1 + \frac{4A_1}{n} - 8 \ln t \right), \quad \Phi_{0p0p}^{(1)} = 0$$

$$\Phi_{0p0p}^{(2)} = -\frac{\pi p^4 D_{11} (1 + 1/4 A_{11})}{n}, \quad \Phi_{0p0p}^{(3)} = 0$$

$$\Phi_{p\alpha 0p}^{(0)} = \frac{1}{4} \pi p^4 \left[\left(\frac{2A_1}{n} + 1 \right) (t^{-1} - 1) + \ln t \right], \quad \Phi_{p\alpha 0p}^{(1)} = 0 \quad (3.14)$$

$$\Phi_{p\alpha 0p}^{(2)} = (t^{-1} - 1) \Phi_{0p0p}^{(2)}, \quad \Phi_{p\alpha 0p}^{(3)} = 0$$

$$\Phi_{a|0\rho}^{(0)} = \frac{\pi a^2 p^2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{D_{k1}}{\gamma_k (n\gamma_k - 2)}, \quad \Phi_{a|0\rho}^{(1)} = -\frac{8\pi D_{11} p^2}{n^2 - 16}$$

$$\Phi_{a|0\rho}^{(2)} = \frac{\pi a^2 D_{11} p^2}{2n} \left(\frac{8}{n+4} - \sum_{k=1}^n \frac{G_{1k}}{\gamma_k (n\gamma_k - 2)} \right)$$

$$\Phi_{a|0\rho}^{(3)} = \frac{4\pi D_{11} G_{11} p^2}{n^2 - 16}, \quad A_i = \sum_{k=1}^n \frac{D_{ki}}{\gamma_k}$$

$$A_{11} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\gamma_k}, \quad t = \frac{p^2}{a^2}$$

Рассмотрим вторую часть задачи (3.1), когда $\lambda = q, \rho = 1$. Условия гладкости сводятся к $v_{0aql} = v_{aqql}, v_{0aql} = v_{aqql}$ при $r = a$ и $v_{0aql} = v_{a1ql}, v_{aqql} = v_{a1ql}$ при $r = q$. Подставляя в эти условия (3.5), (3.7) — (3.9), после преобразований получим линейную систему относительно C_j

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j \left(\frac{a^{n_j}}{\gamma_j + i - 1} + \frac{a^{-n_j}}{\gamma_j - i + 1} \right) C_j = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n (K_{1j} a^{-n_j} - K_{2j} a^{n_j})$$

$$K_{1j} = (\gamma_j - i + 1)^{-1} (n\gamma_j + 2)^{-1} \left(\frac{q^{n_j+2}}{n\gamma_j} - \frac{2}{n\gamma_j - 2} \right), \quad K_{2j} = \frac{q^{2-n_j}}{n\gamma_j (\gamma_j + i + 1) (n\gamma_j - 2)}$$

Отыскивая C_j в виде разложения в ряд по ϵ и используя (3.5), (3.7) — (3.9), получим коэффициенты степенных рядов, выражающие потоки Φ_{0aql}

$$\Phi_{0aql}^{(0)} = 0, \quad \Phi_{0aql}^{(1)} = \frac{4(4 + A_{11}) a^2 S_1}{n}, \quad \Phi_{0aql}^{(2)} = 0$$

$$\Phi_{0aql}^{(3)} = -\frac{2a^2}{\pi} \left((4 + A_{11}) G_{11} S_1 - 2 \left(A_{12} + \frac{4}{9} \right) S_2 \right)$$

$$\Phi_{aqql}^{(0)} = \frac{2}{\pi} q^4 \sum \left(\frac{P_{1i}}{n\gamma_i} - \frac{2P_{1i}P_{2i}}{q^2} + \frac{P_{2i}^2}{n\gamma_i^3} \right) \quad (3.15)$$

$$\Phi_{aqql}^{(1)} = \frac{8}{\pi} a^2 S_1 \left(-\frac{4}{n+4} + \sum \frac{U_{1i}}{\gamma_i} \right)$$

$$\Phi_{aqql}^{(2)} = -\frac{32}{\pi} G_1 S_1 n \left(S_1 + \frac{2}{n^2 - 16} \right)$$

$$\Phi_{aqql}^{(3)} = \frac{4a^2}{\pi} \left(G_1 S_1 \left(\frac{8}{n+4} - \sum U_{1i} \right) - 2S_2 \left(\frac{8}{9(3n+4)} - \sum U_{2i} \right) \right)$$

$$\Phi_{a1ql}^{(0)} = \frac{1}{\pi} \sum \left(\frac{1}{\gamma_i^2 (n\gamma_i + 2)^2} - \frac{q^4}{n\gamma_i^3 (n\gamma_i - 2)} + 8q^2 P_{1i} P_{2i} - \frac{2q^4 P_{2i}^2}{n\gamma_i^3} \right)$$

$$\Phi_{a1ql}^{(1)} = 0, \quad \Phi_{a1ql}^{(2)} = \frac{32nG_1 S_1^2}{n}, \quad \Phi_{a1ql}^{(3)} = 0$$

$$S_i = -\frac{1}{4} \left(\frac{2}{\gamma_i^2 n^2 - 4} - \frac{q^2}{\gamma_i n} \left(P_{2i} + \frac{q^{-n_i}}{n\gamma_i - 2} \right) \right)$$

i	D_{ii}	A_i	G_{ii}	G_{2i}
1	0,6386	1,3881	1,0090	0,2562
2	0,1071	-0,4992	0,2540	0,0866
3	0,0485	-0,1871	0,1289	0,0494
4	0,0291	-0,1032	0,0815	0,0335
5	0,0199	-0,0682	0,0578	0,0249
6	0,0148	-0,0492	0,0440	0,0197
7	0,0115	-0,0377	0,0352	0,0162
8	0,0093	-0,0302	0,0292	0,0139
9	0,0078	-0,0251	0,0253	0,0124
10	0,0066	-0,0216	0,0217	0,0112

$$G_{2i} = \sum \frac{D_{ij}}{\gamma_i + 1}, \quad P_{ii} = \frac{1}{\gamma_i^2 (n^2 \gamma_i^2 - 4)}$$

$$P_{2i} = \frac{q^{\gamma_i}}{n\gamma_i + 2}, \quad U_{ii} = \frac{G_{ii}}{n\gamma_i - 2}, \quad A_{i2} = \sum \frac{A_i}{\gamma_i + 1}$$

В приведенных рядах суммирование выполняется по всем $1 \leq i$.

Входящие в (3.14), (3.15) компоненты матрицы D_{ij} получали в результате численного обращения матрицы T_{ij} размера $N \times N$, где N — число базисных функций в вариационном и фурье-методах. Поскольку с ростом i, j $D_{ij} \rightarrow 0$, то, как показал расчет, для приближенного вычисления числовых рядов достаточно использовать главный минор размера 10×10 , компоненты которого устанавливаются с увеличением N . Так, при $N = 40$ $D_{11} = 0,6407$, а при $N = 80$, при котором получены приводимые ниже результаты, $D_{11} = 0,6386$. При этом $A_{11} = 2,301$, $A_{12} = 0,616$, а константы, снабженные индексом i , приведены в табл. 1.

Полученные с точностью до ϵ^4 выражения потоков позволяют при $a \sim 0,5$ и $5 \leq n < \infty$ с точностью до нескольких процентов определить зависимость $\text{Ag}(r_1)$. Предложенный в настоящей работе метод малого параметра для решения задачи Пуассона в области Ω_0 (фиг. 2) и требующий для своего применения конечной ширины вставок дополняет известный метод [15], основанный на конформном отображении Ω_0 на верхнюю полуплоскость и приводящий к удобным для вычислений выражениям в случае малой ширины вставок.

Запишем с помощью (1.5), (3.2), (3.3), (3.14) в случае $\kappa = 0$, $r_2 = 1$ и $n = \infty$ зависимость Ag от r_1 в области $r_1 < a$

$$\text{Ag} = \frac{8(1-p^2)}{a^4 t^2 (-t^2 + 4t - 2 \ln t - 3)} \quad (3.16)$$

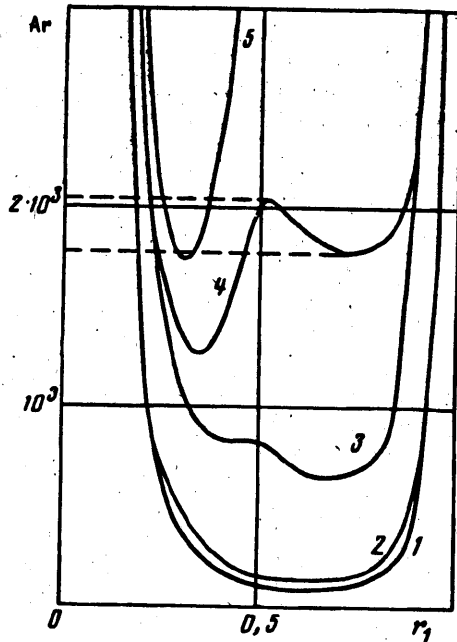
График этой зависимости представлен на фиг. 3 (кривая 5) при $a = 0,545$, что соответствует ширине вставок, ранее использованных в эксперименте [7]. Кривая 5 имеет две вертикальные асимптоты $r_1 = 0$, $r_1 = a$ и один минимум.

Рассмотрим зависимость $\text{Ag}(r_1)$ при $r_1 = q > a$. Используя (3.2) — (3.4), нетрудно представить (1.5) в форме

$$\text{Ag} = \frac{\pi(1-q^2)B_{00}}{\Phi_{q|q}(B_{00} - \Phi_{q|q} - 2\Phi_{0aq}) - (\Phi_{0aq} + \Phi_{aq|q})^2} \quad (3.17)$$

Из (3.15), (3.17) следует, что при $q \rightarrow 1$ $\text{Ag} \rightarrow \infty$. При $1 \ll n$ (3.17) приближенно можно записать в виде

$$\text{Ag} = \frac{\pi(1-q^2)}{\Phi_{q|q}^{(0)}}$$



Фиг. 3

и в выражении $\Phi_{q_1}^{(0)}$ пренебречь членами, содержащими q^n , на отрезке $[a, q^*]$, где q^* с ростом n стремится к единице. Заменяя далее быстроходящиеся ряды первыми членами, получим для значений $a \leq q \leq q^*$ и $30 < n$ приближенное выражение, достигающее минимума при $q = q_{\min}$

$$Ar = \frac{\pi^2(1 - q^2) n (n - 4)(n + 4)^2}{16 (n (n - 4) - q^4 (n + 4)^2)}, \quad q_{\min} = \left(1 - \frac{2\sqrt{3n + 4}}{n + 4}\right)^{1/2}$$

С другой стороны, в интервале $0 < r_1 < a$ кривая $Ar(r_1)$, приближаясь с ростом n к кривой (3.16), начиная с некоторого значения n_0 будет иметь минимум. Таким образом, при достаточно больших n зависимость $Ar(r_1)$ имеет два минимума, разделенные максимумом.

На фиг. 3 кривым 1, ... 5 соответствуют n , равные 0, 6, 34, 60, ∞ . Кривая 3 ($n = 34$) является сепаратрисой, разделяющей семейства кривых с одним и двумя минимумами. Таким образом, в случае равномерного подвода газа, $a = 0,545$ и $n \leq 34$ возможна реализация двух нетривиальных режимов при условии, что Ar превосходит критическое значение $Ar^*(n)$, монотонно возрастающее с ростом n и принимающее при n , равном 0, 6, 34, следующие значения: 110, 157, 688. В случае $34 < n$ появляется область минимумов кривой $Ar(r_1)$, в которой уравнения сохранения масс и импульсов фаз допускают существование четырех нетривиальных режимов. Так, при $n = 60$ (кривая 4) рассматриваемая область расположена в пределах $1800 < Ar < 2060$ и на фиг. 3 заключена между штриховыми линиями.

Для каждого r_1 , соответствующего заданному Ar , можно рассчитать среднюю скорость жидкости внутри и вне пузырьковой дорожки по формулам (1.7), полагая $s_0 = \pi$, $s_1 = \pi r_1^2$.

В [7] приведены экспериментальные данные, полученные при барботаже воздуха через водные растворы глицерина в колонне с шестью вертикальными вставками. В рассматриваемом эксперименте проток жидкости через

Таблица 2

Ag	160	140	110
r_{1e}	0,32	0,37	0,37
r_{1r}	0,71	0,70	0,73
r_{10}	0,27	0,29	0,31
r_{16}	0,29	0,31	0,34

колонну отсутствовал, т. е. $\kappa = 0$, $\alpha = 0,545$, кроме того, из приведенного описания конструкции колонны следует, что $r_2 = 0,6$.

В табл. 2 приведены рассчитанные на основе опубликованных в [7] данных числа Архимеда и соответствующие им радиусы пузырьковых дорожек. При этом r_{1e} и r_{1r} — результаты измерений и расчета, представленные в [7], r_{10} и r_{16} — результаты расчета по формуле (2.1) без учета вставок и при $n = 6$ с помощью полученного выше решения. Видно, что лучшим приближением к результатам измерений является расчет, учитывающий наличие вставок. Вместе с тем как сравнение кривых 1, 2 (фиг. 3), соответствующих случаю равномерного подвода газа, так и сравнение r_{10} и r_{16} (табл.2) показывает, что влияние шести вставок на циркуляцию не столь велико и сводится лишь к стабилизации циркуляции.

Различие r_{16} и r_{1e} связано с тем, что приведенные в [7] значения локального газосодержания, на основании которого рассчитывались в настоящей работе Ag, завышены, поскольку получались делением измеренной величины полного газосодержания на объем цилиндра высоты колонны и радиуса шейки пузырьковой дорожки без учета концевых эффектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихт М. К., Штейнберг В. А. Об устойчивости слоя жидкости при барботаже//Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 4. С. 47—53.
2. Зеленко В. Л. Влияние растворимости газа на устойчивость слоя жидкости с пузырями и неподвижной насадкой//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 68—74.
3. Зеленко В. Л., Мясников В. П. К теории циркуляционных движений в барботажном слое//Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 108—115.
4. Nevers N., de Bubble driven fluid circulations//A. I. Ch. Journal. 1968. V. 14. № 2. P. 222—226.
5. Мясников В. П., Митронов А. П., Кочергин Н. А., Дильман В. В. Структура потоков в высоком непроточном пузырьковом слое//Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 4. С. 827—830.
6. Мясников В. П., Зеленко В. Л. Развитие внутренних гравитационных волн в барботажном слое//Докл. АН СССР. 1984. Т. 278. № 2. С. 314—316.
7. Rietema K., Ottengraf S. P. P. Laminar liquid circulation and bubble street formation in a gas-liquid system//Trans. Inst. Chem. Eng. 1970. V. 48. № 2. P. 54—62.
8. Rietema K. Science and technology of dispersed two-phase systems. Pt 1—2//Chem. Eng. Sci. 1982. V. 37. № 8. P. 1125—1150.
9. Соколов В. Н., Доманский И. В., Давыдов И. В., Гишин В. Б. Гидравлическое сопротивление и теплообмен при восходящем и нисходящем течениях газожидкостной смеси в вертикальных трубах//Теорет. основы хим. технологии. 1971. Т. 5. № 3. С. 394—400.
10. Rice R. G., Turpeinen J. M., Hedge R. M. Dispersion and Holdup in Bubble Columns. Chem. Reactors ACS Symp. Ser. 168//Amer. Chem. Soc. 1981. P. 255—276.
11. Воинов О. В. К основам гидромеханики двухфазных сред//Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 3. С. 577—580.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6, Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
13. Герцуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
14. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
15. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.