

УДК 532.528 + 533.6.011.72

© 1992 г. О. В. КОВАЛЕНКО, В. К. СИРОТКИН

ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРА ПУЗЫРЬКОВ В ПРОЦЕССЕ КАВИТАЦИОННОГО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ОТРАЖЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

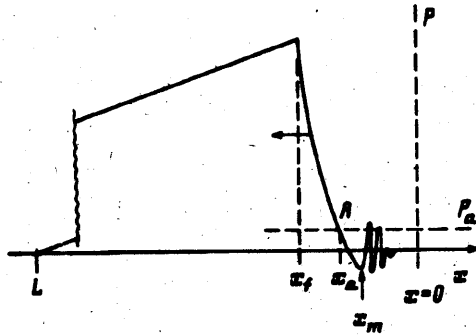
При отражении импульса нагружения треугольного профиля от свободной поверхности жидкости в некоторой области вблизи поверхности начинается кавитационное разрушение, т. е. бурный рост пузырьков в волне растяжения с последующей потерей сплошности.

При нормальном падении импульса сжатия на свободную поверхность, в результате взаимодействия падающей и отраженной волны образуется зона разрежения, которая распространяется в глубь жидкости (см. фиг. 1). За зоной разрежения следует область кавитации, в которой под действием растягивающих напряжений происходит неустойчивый рост пузырьков, что приводит к релаксации растягивающих напряжений и выходу на режим свободного разлета. При этом величина достигаемых растягивающих напряжений (амплитуда пульсаций давления) за фронтом кавитации оказывается существенно меньше давлений в падающей ударной волне, что позволяет для расчета течения в области разрежения, т. е. перед фронтом кавитации, использовать гидродинамическое приближение, в котором считается, что жидкость не способна выдерживать растягивающие напряжения и после разрежения до нулевого давления сразу переходит в состояние свободного разлета (см., например, [1]). В этом приближении с хорошей точностью определяются крупномасштабные гидродинамические процессы, однако вопрос о размере фрагмента не рассматривается.

В работе [2] предложена методика рассмотрения структуры волны кавитационного разрушения при динамическом воздействии на объем жидкости. Развита модель, в которой количество растущих кавитационных зародышей взаимосвязано с достигаемыми растягивающими напряжениями. При использованных в расчетах параметрах начального распределения зародышей кавитации период за фронтальных пульсаций (определяемый характерным расстоянием между исходными зародышами) составлял $\sim 10^{-7}$ с, что много меньше характерного гидродинамического времени. Для расчета кратковременной динамики в зоне кавитации (после прохождения через точку среды фронта кавитации) сформулированы уравнения, обеспечивающие плавный переход гидродинамических величин от зоны разрежения и учитывающие выход среды на свободный разлет вдали от фронта кавитации. В этом подходе система уравнений двухфазной среды сводится при учете нелинейности (как динамической, так и в уравнении сжимаемости жидкости) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в сопровождающих координатах фронта кавитации, где положение фронта кавитации входит в уравнения как заданный параметр.

Для оценки дисперсного состава фрагментов вводится начальное распределение исходных зародышей кавитации по размерам, что соответствует предположению о гетерогенном характере кавитации, когда пузырьки развиваются из уже существующих зародышей. Предположим, что в исходной среде имеется начальная концентрация зародышей кавитации $10^9 - 10^{12} \text{ м}^{-3}$, с объемным газосодержанием $10^{-11} - 10^{-4}$ и средним радиусом $\sim 10^{-8} - 10^{-7} \text{ м}$ [3]. В процессе кавитационного разрушения содержание пузырьковой компоненты достигает значений $\sim 10^{-1} - 1$, а размер пузырьков становится $\sim 10^{-3} - 10^{-4} \text{ м}$. Количество развивающихся пузырьков определяется максимальными растягивающими напряжениями. Связывая размер итогового фрагмента со средним расстоянием между инициированными пузырьками, можно оценить дисперсный состав капельной газозавеси, возникающей после инверсии (т. е. перехода пузырьковой жидкости в капельную структуру).

Таким образом, чрезвычайно важными представляются процессы, связанные с потерей устойчивости пузырьками в поле растягивающих напряжений и определяющие релаксацию упругих напряжений в жидкости. Иными словами, наибольшее внимание следует уделить относительно кратковременной стадии, когда существенна динамическая неравновесность между компонентами пузырьковой смеси. В этом случае система уравнений значительно упрощается и включает в себя уравнения непрерывности и движения смеси, уравнение состояния несущей жидкости (в котором пренебрегается тепловой частью) в форме Тэта (см., например, [1]), уравнение, описывающее объем пузырьковой компоненты, и, наконец, уравнение совместного



Фиг. 1

деформирования, представляющее полную деформацию двухфазной среды в виде суммы упругой деформации несущей жидкости и приращения объема пузырьковой компоненты.

1. Основные уравнения модели. Динамика роста пузырьков под действием растягивающих напряжений определяется уравнением Рэлея — Лэмба [3, 4]

$$\rho_a \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = P_2 - P_1 - 2\frac{\sigma}{R} - 4\mu\frac{\dot{R}}{R} \quad (1.1)$$

где R — радиус пузырька, σ — коэффициент поверхностного натяжения, P_2 — давление внутри пузырька, P_1 — среднее давление в среде, приближенно равное давлению в несущей жидкости, μ — динамическая вязкость жидкости. Рассмотрим для простоты случай газовых пузырьков без фазовых переходов и теплообмена между компонентами газожидкостной среды. Тогда давление P_2 внутри пузырька

$$P_2 = P_2 \left(\frac{R}{R_a} \right)^{-3\gamma}, \quad P_{2a} = P_a + 2\frac{\sigma}{R_a}$$

где индекс a означает состояние при атмосферном давлении.

В качестве замыкающего уравнения введем уравнение совместного деформирования для пузырьковой смеси

$$\left(\frac{1}{V_0} \right) dV = -d\epsilon + d\alpha, \quad \epsilon = \frac{P}{\rho_a c_a^2} \quad (1.2)$$

В этом уравнении ϵ — безразмерное давление, α — относительное объемное содержание дисперсной (пузырьковой) компоненты, а упругие деформации жидкости линейны (подразумевается, что амплитуда напряжений в зоне кавитации существенно меньше, чем в падающей волне). Вводя распределение пузырьков по начальным размерам $n_0(R_0)$, определим относительное объемное содержание пузырьковой компоненты α в виде

$$\alpha = \frac{4\pi}{3} \int [R(R_0, t)]^3 n_0(R_0) dR_0 \quad (1.3)$$

где интеграл берется по всему начальному спектру пузырьков.

Если размеры пузырьков имеют малый разброс (распределение близко к δ -функциональному), то система уравнений значительно упрощается и сводится к монодисперсному приближению, развитому в работе [2].

При отражении треугольного импульса сжатия от свободной поверхности жидкости вблизи свободной поверхности образуется зона взаимодействия падающего импульса и отраженной волны разрежения, расширяющаяся со

временем по закону, близкому к линейному: см. фиг. 1, на которой $x = 0$ — свободная поверхность, x_1 — фронт разрежения, x_2 — фронт кавитации, $x_1 < x < 0$ — зона взаимодействия отраженной волны разрежения с падающей ударной волной, $x_2 < x < 0$ — зона кавитации (ударная волна падает из левого полупространства, фронты разрежения и кавитации движутся влево, стрелкой отмечен первый максимум растягивающих напряжений). При этом между передним фронтом волны разрежения и точкой разрежения до атмосферного давления (последнюю в дальнейшем будем называть точкой начала кавитации, либо фронтом кавитации) находится область сплошной жидкости. Решение для этой области, полученное в [1] в гидродинамическом приближении, определяет параметры для расчета течения за фронтом кавитации. Для задачи об отражении импульса треугольного профиля от свободной поверхности таким образом являются, как показано, градиент давления на заднем фронте ударной волны, амплитуда ударной волны и градиент давления в волне разрежения в точке начала кавитации, движущейся от свободной границы со скоростью, близкой к скорости звука в чистой жидкости.

Рассмотрение процессов, протекающих за фронтом кавитации, проводилось в лагранжевых координатах (x_0, t) при учете первоначального поджатия в исходной ударной волне. Комбинируя уравнения непрерывности, движения, состояния несущей фазы и совместного деформирования, затем переходя в сопровождающие координаты фронта кавитации и отбрасывая «медленные» производные по пространственной координате, можно получить уравнение для давления в зоне кавитации

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = \frac{(1 + \delta)}{\delta} (w - w_0)$$

$$\delta = 8\varepsilon_{00} (1 + \varepsilon_{00}) \frac{r}{r_0} - 4 \left(\varepsilon_{00} \frac{r}{r_0} \right)^2, \quad \varepsilon_{00} = \frac{v_0}{c_s} \quad (1.4)$$

$$\tau = t \frac{c_s}{d_0}, \quad r = \frac{|x_0|}{d_0}, \quad r_0 = \frac{L}{d_0}, \quad d_0 = N_0^{-1/3}$$

$$\xi = \tau - \tau_k(x_0)$$

Здесь ε_{00} — безразмерная амплитуда падающей ударной волны, d_0 — среднее расстояние между пузырьками в монодисперсной смеси, ξ — сопровождающие координаты, τ_k — безразмерный момент времени прохождения фронта кавитации через частицу среды, v_0 — амплитуда массовой скорости в ударной волне,

$$w = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau}, \quad w_0 = \left[1 + \varepsilon_{00} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^{-1} \frac{\partial u_s}{\partial r} =$$

$$= 4\varepsilon_{00} r_0^{-1} \left\{ 1 + 4 \left[(1 + \varepsilon_{00})^2 - \left(1 + \varepsilon_{00} - \varepsilon_{00} \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (1.5)$$

где u_s — безразмерная массовая скорость на фронте кавитации, равная удвоенной массовой скорости на фронте разрежения. Безразмерные параметры w_0 и δ характеризуют скорость свободного разлета и скорость нарастания растягивающих напряжений на фронте кавитации, для определения которых использовалось аналитическое решение для волны разрежения в среде с показателем $\gamma = 3$ в уравнении Тэта.

В качестве начальных (по ξ) условий на фронте кавитации используем условия равновесия пузырьков

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \alpha = \alpha_0, w = 0 \quad (1.6)$$

В [2] показано, что поставленные таким образом условия обеспечивают гладкую сшивку решений на фронте кавитации.

Легко также видеть из (1.4), что при $w = w_0$ получается

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = 0$$

что отвечает свободному разлету (отсутствие градиентов давления), когда скорость роста газовой компоненты определяется w_0 — учетверенным градиентом давлений на заднем фронте падающей ударной волны (как и в традиционном гидродинамическом подходе [1]).

2. Система уравнений полидисперсной пузырьковой смеси. Квазистационарное приближение для расчета кавитационных процессов, развиваемое авторами, позволяет рассматривать целый ряд более сложных задач. В частности, представляет интерес проследить эволюцию начального распределения полидисперсной пузырьковой смеси по размерам в процессе кавитационного разрушения, вызываемого отражением плоской ударной волны от свободной поверхности жидкости. Подобные задачи в обычной постановке чрезвычайно сложны для численного анализа, поскольку фактически полидисперсность увеличивает размерность задачи, делая ее неоднородной, что практически исключает возможность расчетов в многогрупповом приближении даже в простейшем случае, когда совпадают временные и пространственные масштабы гидродинамических и кавитационных процессов. В данном подходе исследование полидисперсных задач сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений нужной размерности, для чего следует несколько модифицировать систему уравнений расчета кавитационных процессов.

Введем безразмерный радиус пузырька

$$y = \frac{R}{d_0}, \quad y_0 = \frac{R_0}{d_0}, \quad d_0^3 = N_0^{-1}$$

N_0 — полное количество пузырьков в единице объема, R_0 — начальный радиус пузырька, и безразмерное время

$$\xi = (t - t_k) \frac{c_a}{d_0}$$

где t_k — время достижения атмосферного давления при прохождении волны разрежения через данную лагранжеву точку среды.

В этих единицах уравнение Рэлея — Лэмба (1.1) принимает вид

$$yy'' + \frac{3}{2} y'^2 = \varepsilon_0 \left(\frac{y_0}{y} \right)^{3\gamma} - \varepsilon - \frac{\Sigma}{y} - \eta \frac{y'}{y} \quad (2.1)$$

$$\Sigma = 2 \frac{\sigma}{(d_0 \rho_0 c_a^2)}, \quad \eta = 4 \frac{\nu}{(c_a d_0)}$$

Тогда объемное содержание пузырьковой компоненты

$$\alpha = \int \frac{4\pi}{3} R^3 (R_0, t) n_0(R_0) dR_0 = \int \frac{4\pi}{3} y^3 (y_0, t) f_0 dy_0 \quad (2.2)$$

где n_0 — начальное распределение, нормированное на N_0 , $f_0 = n_0 d_0 N_0^{-1}$ — безразмерное начальное распределение, так что

$$\int f_0 dy_0 = 1 \quad (2.3)$$

В качестве примера используем экспоненциальное «усеченное» начальное распределение

$$f_0(y_0) = \frac{\exp(-y_0/y_1)}{1 - \exp(-\kappa)} \theta(\kappa y_1 - y_0), \quad y \equiv \frac{R}{d} \quad (2.4)$$

где κR_1 — граница начального распределения (максимальный начальный размер); при этом средний начальный радиус пузырьков равен

$$\langle R \rangle_0 = \int_0^{\kappa R_1} R_0 n_0(R_0) dR_0 = R_1 \left[1 - \frac{\kappa \exp(-\kappa)}{1 - \exp(-\kappa)} \right] \equiv R_1, \quad \kappa \geq 1$$

В результате модификация системы уравнений для расчета кавитационных процессов [2] на полидисперсный случай приводит к следующей модели:

$$\varepsilon = K_0(w - w_0); \quad y y_i'' + \frac{3}{2} y_i'^2 = \varepsilon_{\alpha} \left(\frac{y_{\alpha}}{y_i} \right)^{3\gamma} - \varepsilon - \frac{\Sigma}{y_i} - \eta \frac{y_i'}{y_i} \quad (2.5)$$

$$w = \sum_{i=1}^m w_i; \quad w_i = f_{\alpha} 4\pi y_i^2 y_i'; \quad \varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_a + \frac{\Sigma}{y_{\alpha}}$$

параметры K_0 и w_0 имеют тот же смысл, что и в монодисперсном случае, m — число групп, на которые разбито распределение, f_{α} — доля пузырьков в каждой группе, i — номер группы.

В этой модели каждая группа пузырьков эволюционирует в соответствии с уравнением Рэлея — Лэмба в среднем поле давлений. Таким образом получаем многогрупповое приближение с общим давлением.

Рассмотрим основные особенности динамики кавитационных процессов в полидисперсном приближении. Усредняя по всем группам, можно получить приближенные уравнения, аналогичные уравнениям в монодисперсном случае

$$\varepsilon' = K_0(w - w_0), \quad \alpha' = w$$

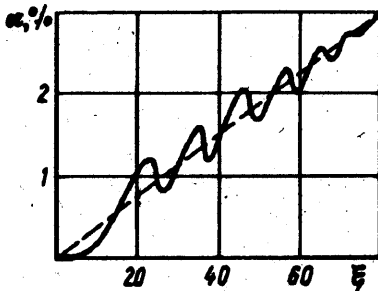
$$\alpha = \int \frac{4}{3} \pi y^3 f_0 dy_0 \equiv \sum_i \alpha_i; \quad \alpha_i = \frac{4}{3} \pi y_i^3 f_{\alpha}$$

$$w' \equiv -3\varepsilon \left(\frac{4\pi}{3} \right) \int y_0 f_0 dy_0 \equiv -3\varepsilon \alpha^{1/3}$$

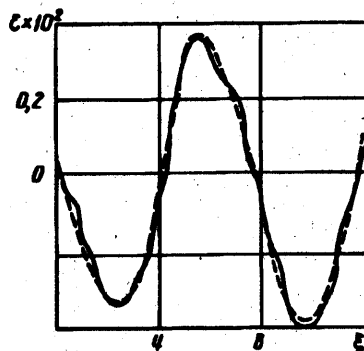
В последнем соотношении использовалось предположение, что дисперсия распределения невелика. Для безразмерного давления в этом случае получим

$$\varepsilon'' \equiv -3(w_0 \varepsilon)^{1/3} K_0 \varepsilon$$

В монографии [5] обсуждаются результаты расчетов структуры фронта ударных волн в трехгрупповом приближении и делается вывод о несущественности влияния дисперсного состава. Однако следует иметь в виду, что газовые пузырьки при сжатии ведут себя устойчиво, в то время как при растяжении (при переходе через порог кавитации) начинается неустойчивый рост, что может приводить к раскачке и эффектам локализации в многопараметрической нелинейной системе.



Фиг. 2



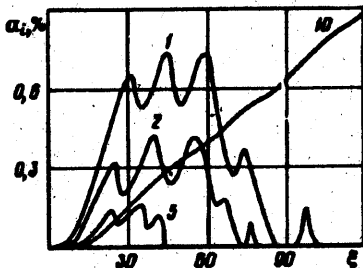
Фиг. 3

мерам (2.4) варьировались как средний размер (составлявший в типовых расчетах $\sim 2 \cdot 10^{-8}$ м), так и параметр κ , дающий характерное отношение максимального размера к среднему и заменяющий дисперсию данного распределения. Величина параметра κ в проведенных расчетах составляла 3—5. Все начальное распределение разбивалось на 3, 10 либо 20 групп, а размерность системы обыкновенных дифференциальных уравнений была соответственно равной 7, 21 либо 41 (поскольку для каждой группы пузырьков решается дифференциальное уравнение Рэлея — Лэмба и еще одно уравнение описывает среднее давление в жидкости). Для сокращения времени счета отслеживалось, являются ли пузырьки равновесными. При потере устойчивости рассчитывался их новый равновесный размер, после чего они включались в ансамбль эволюционирующих групп. Была также организована процедура отдельного вычисления «склопывающейся группы» с мелким шагом.

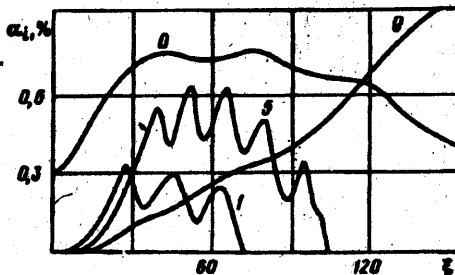
Аналогично монодисперсному случаю наблюдались интенсивные пульсации давления и объемного содержания пузырьковой компоненты, причем можно говорить о способности пузырьков «подстраиваться» к колебаниям друг друга. Просуммированное по всем группам объемное содержание практически не отличается от наблюдаемого в монодисперсном случае, особенно если число групп достаточно велико. На фиг. 2 изображено объемное газосодержание, рассчитанное в 10-групповом приближении. Для сравнения пунктиром показано гидродинамическое приближение (свободный разлет). На фиг. 3 показано давление за фронтом кавитации в заданной лагранжевой точке среды в 3- и 10-групповом приближении (последнее пунктиром).

Что касается распределения пузырьков, то его эволюция обнаруживает дочольно неожиданные особенности. На фиг. 4 показан характерный вариант расчета в 10-групповом приближении, по оси ординат отложены «дифференциальные» объемные содержания каждой группы. Цифры вблизи кривых соответствуют номеру группы (в первой группе самые крупные начальные пузырьки, но относительно малочисленные, в последней — многочисленные и первоначально самые мелкие). На первый взгляд следовало бы ожидать, что инициированные первыми группы пузырьков должны были бы подавить инициированные позднее. В действительности картина сложнее. Виден процесс последовательного прохождения пузырьками порога кавитации — от первой к последней группе. С течением времени пузырьки первой группы все более доминируют на фоне промежуточных групп, которые начинают склопываться уже через несколько пульсаций. Однако пузырьки из 10-й группы, инициированные последними, растут монотонно, практически без пульсаций, и в результате «поглощают» все остальные группы, в том числе и первую. Данный эффект представляется достаточно парадоксальным: ведь именно самые мелкие пузырьки сильнее всего подвержены влиянию поверхностного натяжения, стремящегося склопнуть пузырек.

Качественный анализ уравнений (2.5), однако, дает следующие результаты. Можно показать, что амплитуда пульсаций пропорциональна разности $w - w_0$ в момент прохождения порога кавитации для каждой группы.



Фиг. 4



Фиг. 5

Последняя, 10-я группа теряет устойчивость в момент, близкий к максимуму растягивающих напряжений, что соответствует моменту $w = w_0$, и поэтому в дальнейшем наблюдается безпульсационный рост пузырьков последней иницированной группы. Далее, при потере устойчивости (иницировании) пузырьков некоторой группы она внезапно приобретает большую скорость роста w_i , что через первое из уравнений (2.5) приводит к быстрому нарастанию давления в системе. Последнее в свою очередь стремится захлопнуть все иницированные группы пузырьков. Поэтому ранее иницированные группы в процессе своей эволюции испытывают последовательность подобных «ударов», и в этом можно усмотреть причину «вымирания» первых групп, в то время как вымирание промежуточных обусловлено также доминирующим влиянием первых групп на ранних стадиях.

Для сравнения использовалось также нормальное начальное распределение пузырьков по размерам. В этом случае доминирующими оказались группы вблизи среднего размера, т. е. наиболее многочисленные, а влияние первоначально самых мелких пузырьков практически отсутствовало. Таким образом, динамическая картина эволюции полидисперсной пузырьковой смеси существенно зависит от начального распределения пузырьков.

Далее, в процессе схлопывания происходит интенсивная диссипация энергии за счет эффектов вязкости, учитываемых уравнением Рэлея. В ряде случаев после схлопывания диссипация кинетической энергии пузырьков оказывалась настолько большой, что при возвратном движении за счет упругости газа пузырек не мог «проскочить» свой равновесный размер и снова потерять устойчивость. Предполагалось, что в этом случае он «имеет право» быть иницированным при достаточно больших растягивающих напряжениях. Действительно, в проведенных расчетах наблюдается заметное нарастание пульсаций давления, в результате чего многие из схлопнутых ранее групп пузырьков оказываются вновь иницированными и включенными в ансамбль растущих (см. фиг. 4).

Отметим некоторые трудности, связанные с диссипативными эффектами. В ряде случаев принято учитывать диссипацию за счет теплообмена, радиационных потерь и фазовых переходов посредством коэффициента эффективной вязкости, который при данных параметрах задачи может быть на два порядка больше обычной сдвиговой вязкости [5—7]. Расчеты, проведенные с эффективной вязкостью, представляются менее достоверными, чем расчеты с обычной вязкостью. Так, с течением времени размах пульсаций катастрофически нарастал, вместо того чтобы подавляться большой вязкостью. Объяснить данный парадокс можно тем, что большая вязкость, входящая в уравнение Рэлея — Лэмба, препятствует радиальному движению пузырьков и соответственно релаксации упругих напряжений в жидкости и выходу ее на свободный разлет. Необходим более аккуратный учет диссипативных процессов в более сложных математических моделях.

4. Влияние искусственного насыщения исходной жидкости крупными пузырьками (газирование) на дисперсный состав капельной газозвеси, образующейся при диспергировании жидкости. На первый взгляд пред-

ставляется, что насыщение дополнительными кавитационными зародыщами приведет к более интенсивному процессу кавитации и жидкость будет дробиться на более мелкие фрагменты. Проведенные расчеты показывают ошибочность этого мнения.

Для расчетов использовалась полидисперсная модель, в которой одна из групп содержала пузырьки с радиусом на 2 порядка большим, чем радиус естественных пузырьков. Количество пузырьков выделенной группы было одного порядка с обычными группами. Результаты расчетов показаны на фиг. 5 (где ноль соответствует выделенной группе). Видно, что размер пузырьков выделенной группы вначале несколько подрастает, при этом естественные пузырьки включаются в бурный пульсационный рост. Выделенные пузырьки практически не колеблются и через некоторое время вновь монотонно выходят на свой равновесный размер.

Таким образом, они в действительности не участвуют в формировании дисперсного состава капельно-воздушной смеси. Естественные пузырьки ведут себя примерно так же, как в случае без выделенной группы. Однако в конце процесса на этот раз выживают не самые изначально мелкие пузырьки, а промежуточных размеров. Из-за экспоненциального характера начального распределения таких пузырьков оказывается меньше по количеству, чем самых мелких. Поэтому можно сделать вывод о том, что искусственное газирование жидкости перед ее диспергированием скорее ухудшит, чем улучшит дисперсный состав получаемой газозвеси, размер фрагментов — капелек при этом увеличится вместо ожидаемого уменьшения.

Качественно можно объяснить подобное поведение полидисперсной смеси с искусственным насыщением. Действительно, в начальный момент объемное содержание крупных пузырьков составляет $\sim 10^{-3}$, а для потери устойчивости необходимо растянуть пузырек, так что его объем увеличился бы при этом на порядок, т. е. объемное содержание выделенной группы должно было увеличиться на величину порядка 1%. С другой стороны, объемная доля пузырьковой компоненты возникает при релаксации упругих деформаций. Тогда ясно, что для потери устойчивости пузырьками выделенной группы достигаемых растягивающих напряжений недостаточно. Поэтому пузырьки выделенной группы остаются равновесными и лишь демпфируют растягивающие напряжения, что в итоге ухудшает дисперсность получаемой смеси.

Отметим некоторые ограничения на применимость модели для предварительно газированных жидкостей. Наличие исходного газосодержания может повлиять на структуру фронта падающей ударной волны (см. [5—7]), привести к заметной ее размазке. Однако основной вывод о демпфирующем влиянии тем более остается в силе, поскольку такая «размазка» привела бы к снижению величины параметра K_0 , входящего в уравнения (2.6) (определяющего фактически отношение градиентов давления на переднем фронте волны разрежения и на заднем фронте падающей ударной волны), и соответственно к снижению амплитуды достигаемых растягивающих напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 85 с.
2. Аксенов Р. М., Зверев А. А., Коваленко О. В. и др. Численное моделирование динамического диспергирования и разлета конечного объема жидкости: Препринт № 5421/1. М.: ИАЭ им. И. В. Курчатова. 1990. 57 с.
3. Кедринский В. К., Ковалев В. В., Плаксин С. И. Об одной модели пузырьковой кавитации в реальной жидкости // ПМТФ. 1986. № 5. С. 81—85.
4. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1960. № 3. С. 102—110.
5. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред. Т. 1, 2. М.: Наука, 1987.
6. Накоряков В. Е., Покусоев Б. Г., Шрейбер И. Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248.
7. Красильников В. А., Крылов В. В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.