

УДК 532.135:537.84

© 1992 г. Е. Н. ЗЫРИЧЕВА, В. В. КИРЮШИН

## НАЧАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ СДВИГА МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Реологические свойства магнитных жидкостей — коллоидных дисперсий магнитного вещества в жидкости-носителе — теоретически и экспериментально исследовались в ряде работ [1—8]. Многие магнитные жидкости в отсутствие поля с хорошей точностью являются ньютоновскими. Жидкости с малой концентрацией магнитной фазы остаются ньютоновскими и в магнитном поле, но с измененным коэффициентом вязкости [2—5]. Модели слабоконцентрированной магнитной жидкости, описывающие увеличение вязкости в магнитном поле, развивались в работах [2, 5, 6]. В жидкостях с большой и умеренной концентрацией магнитной фазы зависимость касательного напряжения от скорости сдвига в магнитном поле становится нелинейной [3, 4], т. е. они перестают быть ньютоновскими. В частности, в сильных магнитных полях появляется начальное напряжение сдвига [4]: жидкость как бы отвердевает, и ее невозможно привести в движение, пока касательное напряжение не превысит некоторое критическое значение. Это явление объясняется тем, что в магнитном поле в жидкости возникает структура из цепочек или агрегатов [4]. Методами термодинамики необратимых процессов [9] разработана модель магнитной жидкости со структурированием [7, 8]. В этой модели предполагается, что образующаяся в магнитной жидкости упругая микроструктура характеризуется с феноменологической точки зрения дополнительными параметрами: единичным вектором ориентации цепочек или агрегатов  $\tau$  и коэффициентом  $\epsilon$  — упругим растяжением микроструктуры вдоль вектора  $\tau$ .

Данная работа посвящена определению начального напряжения сдвига  $\tau_0$  магнитной жидкости в плоском канале и формы цепочек, сдерживающих движение магнитной жидкости. В рамках модели магнитной жидкости со структурированием решена задача о равновесии магнитной жидкости в плоском канале в присутствии внешнего магнитного поля, перпендикулярного плоскости канала, под действием перепада давления на концах канала. Показано, что равновесие жидкости возможно только тогда, когда перепад давления не превышает некоторой предельной величины  $\Delta p_{cr}$ . При этом касательное напряжение на стенке канала имеет максимальное значение  $\tau_0$ . В слабых полях  $\Delta p_{cr}$  и  $\tau_0$  зависят от поля квадратично и выходят на насыщение в сильных полях. Даны оценки для феноменологических параметров модели для случая, когда микроструктура является совокупностью цепочек из магнитных частиц. Установлено качественное согласие экспериментально наблюдаемых зависимостей  $\Delta p_{cr}$  и  $\tau_0$  от поля и концентрации магнитной фазы с полученными результатами.

1. Приведем систему уравнений, описывающую магнитную жидкость со структурированием в рамках модели [7]. В этой модели в качестве определяющих параметров используются плотность  $\rho$ , энтропия единицы массы  $s$ , намагниченность единицы массы  $\mu = M/\rho$ , напряженность магнитного поля  $H$ , единичный вектор ориентации  $\tau$  и коэффициент упругого растяжения микроструктуры  $\epsilon$ . Полная энергия  $U$  среды и поля и тождество Гиббса в этой модели имеют вид

$$U = \rho U_1(\rho, s, \mu, \tau, \epsilon) + \frac{H^2}{8}\pi \quad (1.1)$$

$$dU_1 = Tds - pd(1/\rho) + H_d d\mu + \alpha d\tau + R d\epsilon$$

Здесь  $T$ ,  $p$  — абсолютная температура и давление, а величины  $H_d$ ,  $\alpha$ ,  $R$  являются соответствующими производными от внутренней энергии  $U_1$  по соответствующим параметрам состояния. В полную систему уравнений, описывающих магнитную жидкость с внутренней структурой, входят уравнения Максвелла и уравнения, выражающие законы сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \rho u; \quad \rho \frac{du^i}{dt} = \nabla_j p^{ij} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} + U \right) = -\operatorname{div} Q$$

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{1}{2}(\tau_{ij} + \tau_{ji}) + \rho R(\epsilon + 1)\tau_i \tau_j + \frac{1}{2}(\alpha_i \tau_j + \alpha_j \tau_i) - \rho \alpha^n \tau_n \tau_i \tau_j$$

$$Q_i = u_j \left\{ \rho \left( \frac{u^2}{2} + U_i \right) - MH \right\} - \rho(p_{ij} - \tau_{ij})u^j - \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_i$$

$$\tau_{ij} = \frac{H_i B_j}{4\pi} - \frac{H^2}{8\pi} \delta_{ij}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$$

Здесь  $p_{ij}$ ,  $\tau_{ij}$ ,  $Q$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  — полный тензор напряжений, тензор максвелловских напряжений, полный поток энергии, магнитная индукция и напряженность электрического поля соответственно. Вязкие напряжения и поток тепла в системе (1.2) не учитываются.

Из диссипативной функции этой модели следуют соотношения Онзагера, в частности уравнения для величин  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\tau$ . В отсутствие перекрестных эффектов они имеют вид

$$\frac{d\epsilon}{dt} - (\epsilon + 1)\tau \tau' \nabla \mu_i = DR \quad (1.3)$$

$$\frac{d\mu^i}{dt} - \frac{1}{2}(\operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mu)^i = A^u(H_i - H_n)$$

$$(\alpha \times \tau)^i = B^u \left[ \tau \times \left( \frac{d\tau}{dt} - \mathbf{e}_i (\tau_n \nabla^n u' + \tau \tau^n \tau^n \nabla_n u_n) \right) \right]^i,$$

Коэффициенты Онзагера  $D$ ,  $A^u$  и  $B^u$  определяются из экспериментов или вычисляются статистическими методами из конкретных физических микроскопических механизмов.

Будем полагать, что характерное время задачи много больше времен релаксации коэффициента  $\epsilon$  и намагниченности  $\mu$  к равновесным значениям, но много меньше времени релаксации вектора  $\tau$ . В этом случае коэффициенты Онзагера  $D$ ,  $A^u$  и  $B^u$  можно считать бесконечно большими. Уравнения, выражающие законы сохранения (1.2), уравнения Максвелла в приближении магнитостатики [1] и соотношения Онзагера (1.3) с нулевыми правыми частями замыкаются уравнениями состояния для  $p$ ,  $R$ ,  $\mathbf{H}$ , и  $\alpha$ . Условие несжимаемости и условие нерастяжимости микроструктуры ( $\epsilon = 0$ ) позволяет не использовать уравнение состояния для давления и величины  $R$ . В изотропной среде общий вид функций  $\mathbf{H}$ , и  $\alpha$  находится из условия зависимости внутренней энергии  $U$ , только от инвариантов векторов  $\mu$  и  $\tau$

$$\mathbf{H}_s = -\lambda \rho(\mu \tau) \tau + \chi^{-1} \rho \mu + \frac{1}{3} \lambda \rho \mu; \quad \alpha = -\lambda \rho(\mu \tau) \mu \quad (1.4)$$

$$\lambda \rho = 2 \frac{\partial U_i}{\partial \mu^i \mu^j (\frac{1}{3} \delta_{ij} - \tau_i \tau_j)}; \quad \rho \chi^{-1} = 2 \frac{\partial U_i}{\partial (\mu^2)}$$

Для функций состояния  $\lambda$  и  $\chi$  имеют место ограничения, которые определяются условием устойчивости равновесия среды к малым возмущениям, эволюция которых описывается соотношениями Онзагера (1.3):

$$\lambda > 0, \chi > 0, \lambda \chi < 3/2 \quad (1.5)$$

Найдем функции состояния  $\lambda$  и  $\chi$  для идеализированной среды, структура которой представляет собой совокупность вытянутых вдоль вектора  $\tau$  длинных цепочек из одинаковых частиц с магнитным моментом  $m$ , находящихся друг от друга на одинаковом расстоянии  $l$ . Выделяя для рассмотрения цепочку внутренней микроструктуры, считаем, что магнитный момент ча-

стицы этой цепочки направлен вдоль поля в центре частицы, которое складывается из внешнего поля  $H$ , поля, созданного остальными цепочками, равномерно распределенными в пространстве,  $2\pi((M \times \tau) \times \tau)$  и поля «соседних» частиц цепочки

$$m = \chi_m \left( H + 2\pi(M - (M\tau)\tau) + \frac{6(m\tau)\tau}{P} - \frac{2m}{P} \right) \quad (1.6)$$

Умножив равенство (1.6) на число частиц единицы объема  $n$ , получим первое соотношение (1.4) со следующими выражениями для  $\lambda$  и  $\chi$ :

$$\lambda = \frac{6}{n^2} - 2\pi; \quad \chi^{-1} = (\chi_m n)^{-1} - \frac{4}{3} \pi \quad (1.7)$$

Полученный результат раскрывает физический смысл уравнения (1.4) модели; намагниченность направлена вдоль эффективного, а не внешнего поля. Можно показать, что тензор напряжений рассматриваемой идеализированной среды действительно имеет вид (1.2) с выражением для  $\lambda$  (1.7).

Зависимость намагниченности от эффективного магнитного поля (1.4) можно описывать законом Ланжевена

$$M = M_\infty L(\xi) \frac{\xi}{\xi}; \quad \xi = \frac{H}{H_L} + \frac{P}{M_\infty} \left( (M\tau)\tau - \frac{1}{3} M \right) + \frac{1}{3} \frac{P'}{M_\infty} M \quad (1.8)$$

$$L(\xi) = \text{cth } \xi - \frac{1}{\xi}; \quad H_L = \frac{kT}{m}; \quad P = \frac{\lambda M_\infty}{H_L}; \quad P' = \frac{4\pi M_\infty}{H_L}$$

Здесь  $M_\infty, k$  — намагниченность насыщения единицы объема среды и постоянная Больцмана. Отличие эффективного поля  $\xi$  от безразмерного внешнего поля  $H/H_L$  за счет взаимодействия частиц характеризуется параметрами  $P$  и  $P'$ . В случае идеализированной среды для параметра  $P$  получено выражение

$$P = \frac{6m^2}{P k T} - \frac{2\pi M_\infty}{H_L} = \frac{6m^2}{P k T} - \frac{1}{2} P' \quad (1.9)$$

Таким образом, параметр  $(P + 1/2 P')$  характеризует степень магнитного взаимодействия частиц по отношению к тепловой энергии, т. е. степень агрегирования магнитной жидкости.

2. Рассмотрим равновесие магнитной жидкости, находящейся в канале прямоугольного сечения ширины  $h$ . К концам канала приложен перепад давления  $\Delta p$ . Перпендикулярно слою магнитной жидкости приложено внешнее однородное магнитное поле  $H_0$ . Найдем максимальное значение  $\Delta p$ , при котором возможно равновесие жидкости в канале.

Будем предполагать, что жидкость несжимаема и однородна ( $\rho = \text{const}$ ), растяжением структуры будем пренебрегать ( $\epsilon = 0$ ). Уравнения равновесия с выражением для полного тензора напряжений (1.2), уравнения (1.8) и уравнение Максвелла в приближении магнитостатики составляют замкнутую систему уравнений

$$\nabla_i p^u = 0; \quad M = M_\infty L(\xi) \xi / \xi \quad (2.1)$$

$$p_u = -p\delta_u + \frac{H_i H_j}{4\pi} + H_i M_j - \frac{H^2}{8\pi} \delta_{ij} - \lambda(M\tau)M\tau_i + \lambda(M\tau)^2 \tau_i \tau_j$$

$$\xi = \frac{H}{H_L} + \frac{P}{M_\infty} \left( (M\tau)\tau - \frac{1}{3} M \right) + \frac{P'}{3M_\infty} M$$

$$\text{div}(H + 4\pi M) = 0; \quad \text{rot } H = 0$$

Граничными условиями являются заданный перепад давления  $\Delta p$  на длине канала  $L$  и условие симметрии решения относительно оси канала. Магнитное поле вне канала считается однородным  $H_0 = \text{const}$ ; на стенках канала тангенциальная составляющая вектора напряженности  $H$  и нор-

мальная составляющая вектора магнитной индукции  $(H + 4\pi M)$  ползаются непрерывными.

Введем систему координат следующим образом: ось  $x$  направим по оси канала, ось  $y$  — вдоль вектора  $H_0$ . Задачу будем считать плоской. Решение будем искать при предположении, что давление  $p(x, y)$  зависит от координат  $x$  и  $y$ , остальные неизвестные зависят только от координаты  $y$ . Интегрируя уравнения равновесия и уравнения Максвелла системы (2.1), получим систему уравнений, которую запишем в безразмерном виде

$$\begin{aligned} y' &= -P(M'\tau)\tau_2 M'_1 + P(M'\tau)^2 \tau_1 \tau_2 \\ M' &= \frac{L(\xi)\xi}{\xi}, \quad \xi = H_0 + P \left[ (M'\tau)\tau - \frac{1}{3} M' \right] - P' \left( M'_2 e_2 - \frac{1}{3} M' \right) \\ p' &= x' - P(M'\tau) M'_2 \tau_2 + P(M'\tau)^2 \tau_2^2 + M'_2 (H_0 - P' M'_2) \\ y' &= \frac{\Delta p y}{LM_\infty H_L}; \quad H_0 = \frac{H_0}{H_L}; \quad M' = \frac{M}{M_\infty}; \quad p' = \frac{p}{\Delta p}; \quad x' = \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $e_2 = H_0/H_0$ .

Уравнение для определения давления отщепляется от остальных уравнений системы (2.2) и в дальнейшем рассматриваться не будет. Система уравнений (2.2) содержит четыре неизвестные функции:  $M'_1(y')$ ,  $M'_2(y')$ ,  $\tau_1(y')$ ,  $\tau_2(y')$ . Решение системы определяется тремя параметрами:  $H_0$ ,  $P$  и  $P'$ . Из условий  $|M'| \leq 1$ ,  $|\tau| = 1$  следует, что при фиксированных значениях этих параметров величина  $y'$  имеет некоторое максимальное значение  $y'_m(H_0, P, P')$ . Это накладывает ограничения на величину перепада давления  $\Delta p$ , при котором возможно равновесие жидкости. Отсюда для критического перепада давления  $\Delta p_c$  и соответствующего начального касательного напряжения на стенке (напряжения сдвига) следуют выражения

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_c}{L} &= \frac{2M_\infty H_L}{h} y'_m(H_0, P, P') \\ \tau_0 &= p_{12} \left( \frac{1}{2} 2h \right) = M_\infty H_L y'_m(H_0, P, P') \end{aligned} \quad (2.3)$$

Далее будет найден явный вид функции  $y'_m(H_0, P, P')$  в предельных случаях слабых и сильных полей.

Рассмотрим случай слабого внешнего поля:  $H_0 \ll 1$ . Уравнение для намагниченности системы (2.2) приводится к виду

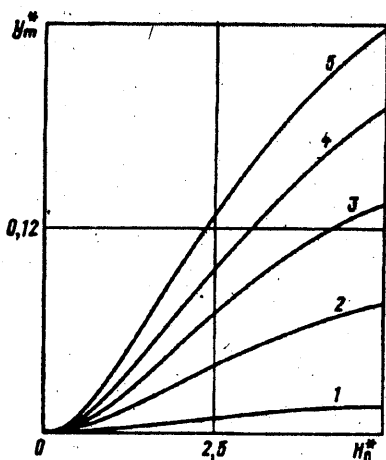
$$M' = \frac{1}{3} \left\{ H_0 + P \left[ (M'\tau)\tau - \frac{1}{3} M' \right] - P' \left( M'_2 e_2 - \frac{1}{3} M' \right) \right\} \quad (2.4)$$

Разрешив уравнение (2.4) относительно  $M'_1$  и  $M'_2$  и подставив полученные значения в первое уравнение системы (2.2), получим

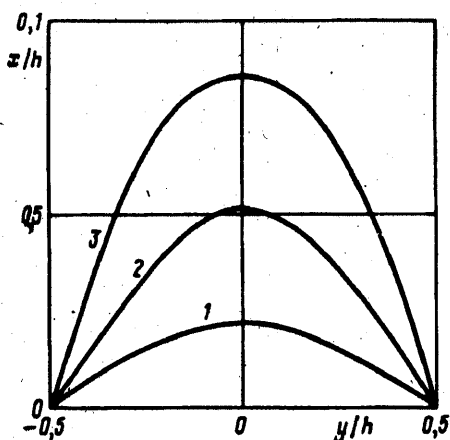
$$\begin{aligned} M'_1 &= \frac{H_0^2 P \tau_1 \tau_2}{C_1 - P P' \tau_1^2}; \quad M'_2 = \frac{H_0^2 (3 + \frac{1}{3} P - \frac{1}{3} P' - P \tau_1^2)}{C_1 - P P' \tau_1^2} \\ y' &= \frac{C_2 H_0^2 \tau_1 \tau_2}{(C_1 - P P' \tau_1^2)^2}; \quad C_1 = \left( \frac{1}{3} P - \frac{1}{3} P' + 3 \right) \left( \frac{2}{3} P' - \frac{2}{3} P + 3 \right) \\ C_2 &= P \left( \frac{1}{3} P - \frac{1}{3} P' + 3 \right) \left( 3 - \frac{2}{3} P - \frac{1}{3} P' \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Если считать, что жидкость в отсутствие поля не намагничивается, то должно быть выполнено условие  $C_1 > P P'$ .

Найдя условный экстремум функции для  $y'$  (2.5), получим зависимость  $y'_m(H_0, P, P')$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$y_m^* = \frac{3}{16} \sqrt{3} H_0^* \frac{C_2}{C_1^{3/2} (C_1 - PP')^{1/2}} \quad (2.6)$$

Критический перепад давления и начальное напряжение сдвига определяются формулами (2.3) и (2.6). В рассматриваемом случае слабых полей начальное напряжение сдвига пропорционально квадрату внешнего поля.

Рассмотрим случай сильных магнитных полей:  $H_0^* \gg 1$ . Уравнение для намагниченности системы (2.2) заменяется уравнениями

$$M_1^* = \frac{Pr_1 r_2}{H_0^*} + o\left(\frac{1}{H_0^{*2}}\right); \quad M_2^* = 1 - \frac{1}{H_0^*} + o\left(\frac{1}{H_0^{*2}}\right) \quad (2.7)$$

Система (2.2) в нулевом приближении по  $(1/H_0^*)$  сводится к одному уравнению для угла наклона вектора  $\tau$  к оси канала —  $\psi$

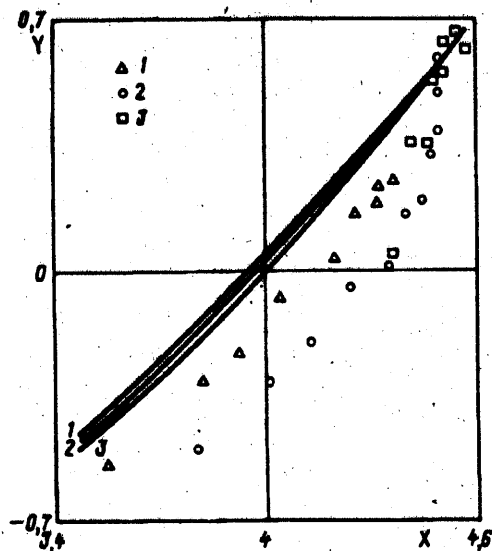
$$y^* = P(1/4 \sin 2\psi - 1/8 \sin 4\psi) \quad (2.8)$$

Найдя условный экстремум функции  $y^*(\psi)$ , получим

$$y_m^*(H_0^*, P, P') = \frac{3}{16} \sqrt{3} P; \quad \psi_m = \frac{1}{3} \pi \quad (2.9)$$

Критический перепад давления и начальное напряжение сдвига определяется формулами (2.3) и (2.9). В случае сильных полей начальное напряжение сдвига не зависит от величины приложенного поля  $H_0^*$ , определяется характеристиками магнитной жидкости  $M_\infty$ ,  $m$  и пропорционально параметру взаимодействия  $P$ .

Перейдем к случаю, когда безразмерное поле  $H_0^*$  принимает промежуточные значения. В общем случае система (2.2) содержит три функции: координаты вектора намагниченности  $M_1^*(y^*)$ ,  $M_2^*(y^*)$  и угол  $\psi(y^*)$ , образуемый вектором  $\tau$  с осью канала. Для каждого фиксированного значения угла  $\psi$  из интервала  $(0; 1/2\pi)$ , используя второе и третье векторные уравнения (2.2), численно найдены значения  $M_1^*$  и  $M_2^*$ , по которым из первого уравнения системы (2.2) получено соответствующее значение  $y^*$ . Выбрав наибольшее значение  $y^*(\psi)$  при фиксированных значениях параметров  $H_0^*$ ,  $P$  и  $P'$ , численно получим зависимость  $y_m^*(H_0^*, P, P')$ , графики которой приведены на фиг. 1, при  $P' = 1$ . Параметр  $P$  имеет значения 0,1; 0,4; 0,7; 1,0; 1,3 (кривые 1 — 5 соответственно). На фиг. 2 показана форма цепочек внутренней микроструктуры при  $H_0^* = 1, P = 1, P' = 0$ . Кривым 1 — 3 соответствует перепад давления  $1/2 \Delta p_{cr}$ ,  $3/4 \Delta p_{cr}$  и  $\Delta p_{cr}$ .



Фиг. 3

3. Сопоставим полученные теоретические результаты для начального касательного напряжения на стенке канала с имеющимися экспериментальными данными [4]. В экспериментах [4] использовался капиллярный вискозиметр с каналом прямоугольного сечения, плоскость которого была перпендикулярна вектору напряженности магнитного поля. Исследуемая магнитная жидкость — коллоидная дисперсия магнетита в керосине, стабилизированная олеиновой кислотой, — в отсутствие поля была ньютоновской при всех исследованных концентрациях. Жидкость слабой концентрации оставалась ньютоновской и в магнитном поле. Для магнитной жидкости с немалой концентрацией начальное напряжение сдвига  $\tau_0$  определялось по критическому перепаду давления  $\Delta p_{cr}$ . Экспериментальные данные приведены на фиг. 3 в логарифмических осях  $X = \lg(M_e^2/\varphi^2)$  и  $Y = \lg(\tau_0/\varphi)$  для трех значений объемной концентрации частиц  $\varphi = 0,1; 0,2; 0,31$  (точки 1 — 3 соответственно). Теоретические кривые 1 — 3 построены для тех же значений концентрации  $\varphi$ . Здесь  $M_e$  — равновесная намагниченность жидкости в поле  $H$ .

Введем параметр  $C = M_\infty/\varphi$  — среднюю намагниченность насыщения твердой фазы магнитной жидкости. Величина  $C$  отличается от намагниченности насыщения магнетита, так как твердые частицы имеют немагнитную оболочку из поверхностно-активного вещества и его соединения с магнетитом. Зависимость  $\tau_0/\varphi$  от  $M_e/\varphi$  получается из формул (2.3) и (1.8) заменой  $M_\infty$  через  $C$  и  $\varphi$

$$\frac{\tau_0}{\varphi} = CH_L \mu_m^*(H_0^2, P, P') \frac{M_e}{\varphi} = CL \left( H_0^2 + \frac{2PM_e}{3C\varphi} - \frac{2P'M_e}{3C\varphi} \right) \quad (3.1)$$

Если параметры  $P$ ,  $C$  и  $H_L$  не зависят от объемной концентрации  $\varphi$ , то зависимость  $\tau_0/\varphi$  от  $M_e/\varphi$  (3.1) в сильных полях (2.9) будет одинакова для любой концентрации  $\varphi$ . Действительно, для экспериментальной зависимости  $\tau_0$  от  $\varphi$  в сильном поле 900 кА/м, приведенной в [4], величина  $\tau_0/\varphi$  приблизительно постоянна и равна 4,8 Н/м<sup>2</sup>. Из экспериментальных данных (фиг. 3) в сильных полях найдены значения параметров  $C$ ,  $H_L$ ,  $P$ ,  $P'/\varphi$ . Величина  $C$  определена по максимальному значению  $M_e/\varphi$ , одинаковому для всех трех экспериментальных кривых фиг. 3. Получена оценка для радиуса магнитного ядра частицы  $a$  и для ее магнитного момента  $m$  в предположении, что частицы сферические, имеют немагнитную оболочку толщиной 24 Å [4] и намагниченность насыщения 446 Гс (магнетит). Используя значения  $m$ ,  $C$ ,  $\tau_0/\varphi$ , найдем по формулам (1.8), (3.1) и (2.9) значения  $H_L$ ,  $P$  и  $P'$ . В результате

$$C \approx 200 \text{ Гс}; a \approx 78 \text{ Å}; m \approx 8,9 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/Э} \\ H_L \approx 46 \text{ Гс}; P \approx 1,6 \cdot 10^{-2}; P'/\varphi \approx 54$$

По полученным значениям  $C$ ,  $H_L$ ,  $P$  и  $P'/\varphi$  на фиг. 3 построены теоретические зависимости  $\lg(\tau_0/\varphi)$  от  $\lg(M_e^2/\varphi^2)$  для трех концентраций магнитной жидкости. Теоретическая зависимость для начального напряжения ведет себя качественно так же, как и полученная экспериментально, с изменением как поля, так и концентрации. Некоторое количественное расхождение, по-видимому, объясняется зависимостью параметров жидкости от поля и приближенностью сделанных

в работе гипотез, в частности, о виде уравнения состояния для намагниченности. Для более точной теории нужны дополнительные сведения.

Авторы благодарят В. В. Гогосова за полезное обсуждение и интерес к работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей//Итоги науки и техники. МЖГ. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1981. С. 76—208.
2. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
3. Майоров М. М. Измерение вязкости феррожидкости в магнитном поле//Магнит. гидродинамика. 1980. № 4. С. 11—18.
4. Гилев В. Г. Исследование концентрационных зависимостей реологических параметров магнитной жидкости во внешнем поле//Магнитные свойства ферроколлоидов. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 57—62.
5. Шлиомис М. И. Эффективная вязкость магнитных суспензий//ЖЭТФ. 1971. Т. 61. № 6. С. 2411—2418.
6. Суязов В. М. О несимметричной модели вязкой электромагнитной жидкости//ПМТФ. 1970. № 2. С. 12—20.
7. Кирюшин В. В. Структурирование магнитных жидкостей//Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 6. С. 1335—1339.
8. Kyryushin V. V. Mathematical model of structure phenomena in magnetic fluids//J. Magnet. and Magn. Materials. 1983. V. 39. № 1—2. P. 14—16.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. I. М.: Наука, 1983. 528 с.

Москва

Поступила в редакцию  
17.VII.1990