

УДК 532.517.4

© 1992 г. А. Г. ГУМИЛЕВСКИЙ

## ИССЛЕДОВАНИЕ БЕЗЫМПУЛЬСНЫХ ЗАКРУЧЕННЫХ СЛЕДОВ НА ОСНОВЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Исследуются законы вырождения безымппульсных закрученных следов на основе модели турбулентности Лоундера — Джонса. Показано существование двух автомодельных решений. Проводится сравнение с экспериментальными данными.

Турбулентные течения в следах за «буксируемыми» телами хорошо изучены как экспериментально, так и теоретически [1]. Существование отличного от нуля интегрального импульса и использование уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью формулы Прандтля для турбулентной вязкости, позволяют получить асимптотические законы вырождения дефекта скорости и роста толщины следа. В следах за самодвижущимися телами интегральный импульс равен нулю и изложенный выше метод становится непригодным. В этом случае законы вырождения следов должны определяться существованием автомодельных решений в целом [2]. В частности, законы вырождения могут определяться некоторыми начальными условиями.

Исследованию динамики затухания безымппульсных следов, распространяющихся в однородной жидкости, посвящены экспериментальные [3—5] и теоретические [6—9] работы. Подробный обзор можно найти в [10]. В [3] проводились исследования следов за диском, из центра которого инжектировалась реактивная струя для уравновешивания сил сопротивления и тяги. В [4] проведено сравнительное исследование следов за «буксируемыми» телами, за телами с реактивным и винтовым движителями. В [5] исследовалось влияние величины энергии турбулентности и диссипации спутного потока на законы вырождения. В [6—9] теоретически исследовались законы затухания незакрученных безымппульсных следов. Однако за рамками данных исследований остаются безымппульсные закрученные следы. Предлагаемая работа посвящена анализу законов вырождения указанных течений.

1. Основные уравнения. Для описания эволюции закрученных осесимметричных следов воспользуемся уравнениями Рейнольдса, замкнутыми с помощью двухпараметрической модели турбулентности Лоундера — Джонса [1, 11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \epsilon \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{U_0 \rho} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \omega^2 r &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \epsilon \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial k}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\epsilon}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) + P - e \\ \frac{\partial e}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\epsilon}{Pr_e} \frac{\partial e}{\partial r} \right) + \frac{e}{k} (C_1 P - C_2 e) \\ P &= \epsilon \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u = U - U_0$  — отклонение средней скорости жидкости от скорости спутного течения (т. е. скорость в неподвижной системе координат относительно движущегося и генерирующего след тела);  $p, \rho$  — давление и плотность

жидкости;  $t$  — время (ему соответствует продольное расстояние от тела  $x = U_0 t$ );  $r$  — радиальная координата;  $\omega$  — угловая скорость;  $k$  и  $e$  — энергия турбулентности и скорость ее диссипации;  $\nu = C_\mu k^2 e^{-1}$  — турбулентная вязкость;  $P$  — генерация турбулентной энергии;  $C_1, C_2, C_\mu, Pr_k, Pr_\epsilon$  — константы.

Уравнения (1.1) записаны в предположении малости дефекта скорости  $uU_0^{-1} \ll 1$  (на больших расстояниях от тела) и в приближении пограничного слоя. Если тело, порождающее след, движется равномерно и прямолинейно (т. е. на него не действует результирующая сила), то суммарная величина продольного импульса равна нулю

$$J = 2\pi\rho \int_0^\infty \left( U_0 u + \frac{P}{\rho} \right) r dr = 0 \quad (1.2)$$

Будем предполагать, что интегральный момент количества движения следа отличен от нуля

$$M = 2\pi\rho U_0 \int_0^\infty \omega r^3 dr \neq 0 \quad (1.3)$$

Условия (1.2), (1.3) могут быть достигнуты разными способами: за счет крепления тела с винтом, с помощью распорок к стенкам аэродинамической трубы, через которую продувается воздух, а также путем подбора числа оборотов винта для уравнивания сил сопротивления и тяги [4].

Будем интересоваться автомодельными решениями системы (1.1)

$$\begin{aligned} u &= u_0 \tau^{-\alpha} F_u(\xi), \quad \omega = \omega_0 \tau^{-4\beta} F_\omega(\xi) \\ k &= k_0 \tau^{2\delta-2} F_k(\xi), \quad e = e_0 \tau^{2\delta-3} F_e(\xi) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\xi = (rL^{-1}\tau^{-\beta})^2$$

Здесь  $\tau = tT^{-1}$  — безразмерное время;  $\xi$  — автомодельная переменная;  $T, L$  — масштабы времени и длины; а величины  $u_0, \omega_0, k_0, e_0$  выбраны так, что имеет место

$$F_u(0) = F_\omega(0) = F_k(0) = F_e(0) = 1 \quad (1.5)$$

Законы вырождения энергии и диссипации следуют из аппроксимации диссипации [12]:

$$\frac{\partial k}{\partial t} \sim -e = -C_\epsilon k^{1.5} l^{-1} \sim -k^{1.5} l^{-\beta}$$

где  $l$  — масштаб турбулентности, растущий со временем пропорционально характерной полутолщине следа  $r$ :  $F_k((rL^{-1}\tau^{-\beta})^2) = 0,5$ .

Функции  $F_u, F_\omega, F_k, F_e$  должны удовлетворять условию на бесконечности и условию

$$F_u(\infty) = F_\omega(\infty) = F_k(\infty) = F_e(\infty) = 0 \quad (1.6)$$

$$\int_0^\infty \left[ F_u(\xi) - \frac{\omega_0^2 L^2}{2U_0 u_0} \tau^{\alpha-4\beta} \xi F_\omega^2(\xi) \right] d\xi = 0 \quad (1.7)$$

В автомодельных переменных уравнения (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} 2\beta F_u + \beta \xi \frac{dF_u}{d\xi} + \frac{2C_\mu^2 k_0^2 T}{L^2 e_0} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi^2 \frac{F_k^2}{F_e} \frac{dF_u}{d\xi} \right] &= 0 \\ \alpha F_u + 2\beta \xi \frac{dF_u}{d\xi} + \frac{4C_\mu k_0^2 T}{L^2 e_0} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi \frac{F_k}{F_e} \frac{dF_u}{d\xi} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\omega_0^2 L^2}{U_0 u_0} \beta \tau^{\alpha-\beta} \left[ \xi F_*^2 - 3 \int_{\xi}^{\infty} F_*^2(\lambda) d\lambda \right] = 0$$

$$2(1-\beta)F_k + 2\beta\xi \frac{dF_k}{d\xi} + \frac{4C_\mu k_0^2 T}{L^2 e_0 \text{Pr}_k} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi \frac{F_k^2}{F_*} \frac{dF_k}{d\xi} \right] + Q - \frac{e_0 T}{k_0} F_* = 0 \quad (1.8)$$

$$(3-2\beta)F_* + 2\beta\xi \frac{dF_*}{d\xi} + \frac{4C_\mu k_0^2 T}{L^2 e_0 \text{Pr}_*} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi \frac{F_*^2}{F_*} \frac{dF_*}{d\xi} \right] + C_1 \frac{F_*}{F_k} Q - C_2 \frac{e_0 T}{k_0} \frac{F_*^2}{F_k} = 0$$

$$Q = \frac{4C_\mu k_0 T F_k^2}{e_0 F_*} \left[ \tau^{2(1-\beta)} \omega_0^2 \xi^2 \left( \frac{dF_*}{d\xi} \right)^2 + \tau^{2(1-\alpha-\beta)} \frac{u_0^2}{L^2} \xi \left( \frac{dF_*}{d\xi} \right)^2 \right]$$

Для удобства выберем масштабы так, чтобы  $k_0^2 T e_0^{-1} L^{-2} = 1$ ,  $e_0 T k_0^{-1} = 1$ ; т. е. в качестве масштаба времени возьмем  $T = k_0 e_0^{-1}$ , а в качестве масштаба длины  $L = k_0^{1/2} e_0^{-1}$  (если для диссипации воспользоваться аппроксимацией [12], то масштаб  $L$  может быть выражен через масштаб турбулентности  $L = l C_d^{-1} \tau^{-\beta}$ ).

Уравнение для  $F_*$  может быть проинтегрировано

$$F_*(\xi) = \exp \left( - \frac{\beta}{2C_\mu} \int_0^\xi \frac{F_*(\lambda)}{F_*^2(\lambda)} d\lambda \right) \quad (1.9)$$

Поскольку все члены уравнений (1.8) должны быть порядка единицы, то справедливы неравенства

$$\alpha \leq 6\beta, \quad \beta \geq 1/4, \quad \alpha + \beta \geq 1 \quad (1.10)$$

Отсюда следует, что толщина закрученных безымпulsive следов растет не медленнее, чем  $t^{0.25}$ , а также что дефект скорости вырождается не быстрее, чем квадрат окружной скорости (иначе след стал бы импульсным).

Уравнения (1.8) содержат безразмерные параметры:

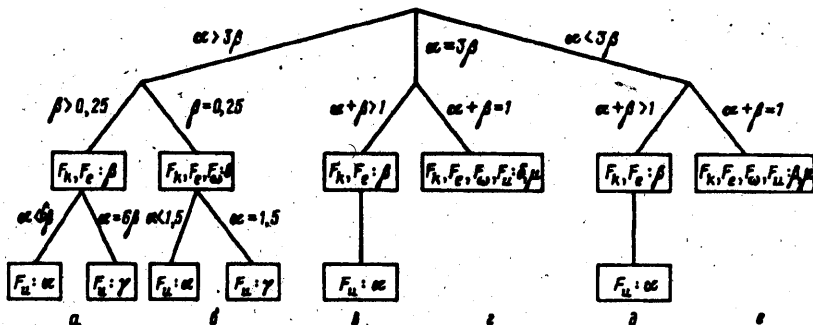
$$\alpha, \beta, \gamma = (\omega_0 k_0^{1/2} e_0^{-1})^2 U_0^{-1} u_0^{-1}, \quad \delta = (k_0 \omega_0 e_0^{-1})^2, \quad \mu = u_0^2 k_0^{-1}$$

Первые два характеризуют законы вырождения продольной и угловой скоростей, энергии турбулентности и ее диссипации. Третий характеризует отношение окружной скорости  $\omega_0 l$  к среднему геометрическому из продольной скорости  $u_0$  и скорости спутного потока  $U_0$ . Четвертый равен квадрату отношения средней частоты вращения жидкости на оси к частоте турбулентных пульсаций. Пятый характеризует отношение квадрата дефекта скорости на оси к энергии турбулентности.

Уравнения (1.8) вместе с граничными и интегральными условиями (1.5)–(1.7) составляют нелинейную задачу на собственные значения. Отметим, что условие (1.7) следует из второго уравнения системы (1.8), если только

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi \frac{F_k}{F_*} \frac{dF_*}{d\xi} = 0$$

Поставленную задачу можно разбить на ряд подзадач, схематично изображенных на фиг. 1. Здесь в прямоугольниках отмечено, уравнения для каких функций необходимо решить, а через двоеточие — параметры, под-



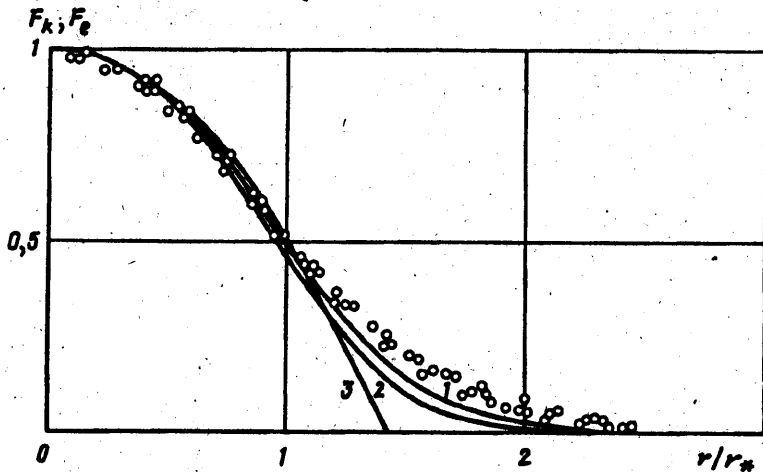
Фиг. 1

лежащие определению. Уравнения для функций в верхних прямоугольниках отщепляются от уравнений для функций в нижних и могут быть решены независимо. В случаях *a*, *в*, *д* генерация энергии асимптотически мала по сравнению с диссипацией, диффузией или конвекцией. Поэтому уравнения для энергии турбулентности и диссипации могут быть решены независимо от уравнений для средних скоростей. Формально эти случаи совпадают со случаем бесследового незакрученного следа с нулевым импульсом [6, 7]. Следовательно, для безимпульсных следов с закруткой могут существовать автомодельные решения, степень вырождения энергии и диссипации турбулентности которых, а также рост толщины следа такие же, что и для безимпульсных незакрученных следов.

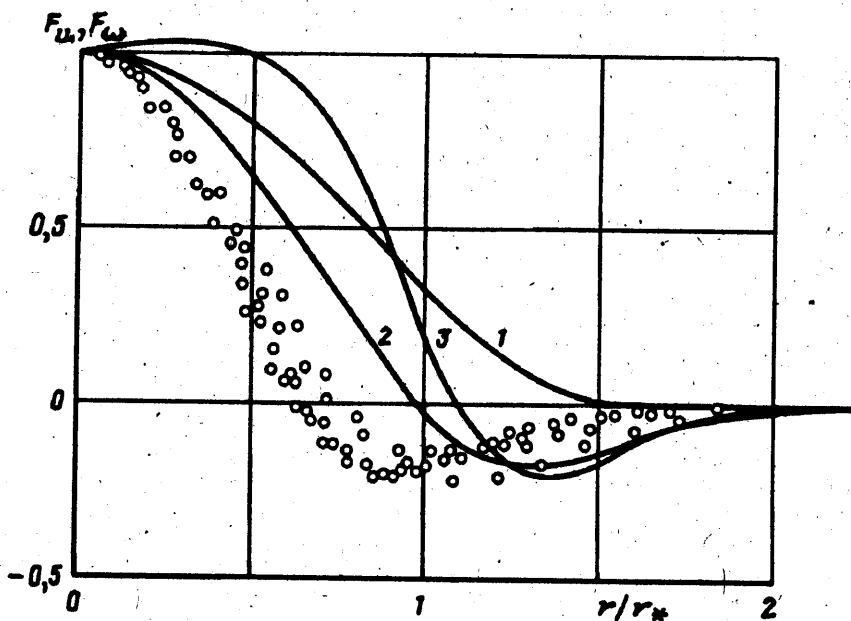
Согласно фиг. 1, *б*, показатель вырождения дефекта продольной скорости  $\alpha$  может определяться параметром закрутки следа  $\delta$ , а в случае *е* — параметром величины дефекта скорости  $\mu$ : при  $\beta = 0,25$   $\alpha = F(k_0 \omega_0 e_0^{-1})$ , а при  $\beta = 1 - \alpha > 0,25$   $\alpha = F(u_0^2 k_0^{-1})$ . Этот момент отличает закрученные безимпульсные следы от незакрученных.

2. Результаты расчетов. Модельные константы системы (1.1) обычно принимаются следующими [1,11]:  $C_\mu = 0,09$ ;  $C_1 = 1,44$ ;  $C_2 = 1,92$ ;  $Pr_k = 1$ ;  $Pr_\epsilon = 1,3$ . Эти константы не являются константами в строгом смысле, а являются некоторыми функциями от определяющих течение параметров (например, от турбулентного числа Рейнольдса  $Re_\tau = k^2 \nu^{-1} e^{-1}$ ). Константа  $C_\mu$  является функцией отношения генерации энергии турбулентности к ее диссипации [11]. Аналогичные формулы строятся в [13], причем показано, что в закрученных струях необходимо учитывать анизотропию турбулентной вязкости. Согласно [13], при  $P \ll e$  турбулентная вязкость  $\epsilon$  может быть представлена в виде  $\epsilon = 0,4k^{0,5}l$ , что соответствует константе  $C_\mu = 0,4C_d = 0,16$ . Величина  $C_2$ , которая может быть представлена в виде  $C_2 = 1+n$ , где  $n$  — показатель вырождения энергии турбулентности в следе за решеткой, также не может считаться константой. Экспериментальные данные различных авторов, приведенные в [14], показывают, что  $n$  изменяется в пределах 0,9—1,3, что соответствует изменениям  $C_2$  в диапазоне 1,9—2,3. В то же время анализ данных с позиций однородности и изотропности турбулентности в следе за решеткой приводит к величине  $n=1,3$ . Принималось также, что турбулентные числа Прандтля для энергии и диссипации равны соответственно 1 и 1,05. В расчетах был выбран следующий набор констант:  $C_\mu = 0,16$ ;  $C_1 = 1,44$ ;  $C_2 = 2$ ;  $Pr_k = 1$ ;  $Pr_\epsilon = 1,05$ . Отметим, что собственные значения задачи (1.5)—(1.8) определяются параметрами  $C_1, C_2, C_\mu, C_\mu Pr_k^{-1}, Pr_k Pr_\epsilon^{-1}$  и, следовательно, выбор «правильных» значений модельных констант является решающим.

В предположении асимптотической малости генерации турбулентной энергии  $Q \ll 1$  легко убедиться, что последние два уравнения системы (1.8)



Фиг. 2



Фиг. 3

сводятся ( $C_2 = 2$ ,  $Pr_k = Pr_s$ ) к одному. Последнее при  $\beta = 0,25$  имеет простое решение вида

$$F_k = F_s = 1 - \frac{Pr_k}{8C_\mu} \xi, \quad \xi < \frac{8C_\mu}{Pr_k} \quad (2.1)$$

$$F_k = F_s = 0, \quad \xi \geq \frac{8C_\mu}{Pr_k}$$

К сожалению,  $\beta = 0,25$  соответствует  $Q \sim 1$ , поэтому решение (2.1) не удовлетворяет (1.8), однако является некоторой аппроксимацией решений двух последних уравнений системы (1.8).

Задача (1.5) — (1.8) решалась численно методом «стрельбы». Для интегрирования уравнений использовалась схема второго порядка точности. Количество точек полагалось в расчетах равным 1600, а интегрирование велось на интервале (0,16). Выбор вдесятеро меньшего шага

интегрирования, как показали расчеты, менял результаты менее чем на 1%. Пределы изменения  $\xi = (C_d t^{-1})^2$  соответствовали изменению отношения радиальной координаты  $r$  к масштабу турбулентности  $l$  от 0 до  $4C_d^{-1} = 10$ . Если учесть, что в струйных течениях ширина  $2r$  порядка пяти масштабов турбулентности  $l$ , то получим, что след рассчитывался на интервале, в 2 раза превышающем его толщину. Поэтому правая граница интервала соответствовала «физической бесконечности».

Перейдем к описанию численных расчетов. Для каждого из случаев  $a$ — $e$  проводилась серия расчетов. Были найдены численные решения (представленные на фиг. 2—3) только в случае  $a$ . Здесь на рисунках радиальная координата нормирована на полуширину следа  $r_0$ . Кривыми 1, 2 на фиг. 2 обозначены практически совпадающие профили энергии турбулентности и ее диссипации, кривой 3 — «решение» (2.1), а точками — экспериментальные значения энергии турбулентности [3]. Полученные решения соответствуют  $\beta = 0,3$ . На фиг. 3 линией 1 представлен профиль угловой скорости, линиями 2, 3 — профили дефекта продольной скорости (линия 2 соответствует  $\alpha = 1,3$ ; линия 3:  $\alpha = 1,8$ ;  $\gamma = 6$ ). Точками на фиг. 3 помечены экспериментальные значения дефекта продольной скорости [3], соответствующие безымпульсному незакрученному следу.

Таким образом, в результате исследования безымпульсных закрученных течений в следе обнаружено, что существуют два различных автомодельных решения. Оба решения характеризуются тем, что генерация турбулентной энергии в них асимптотически мала. Первое соответствует также и случаю безымпульсного незакрученного следа. Для обоих решений энергия турбулентности и ее диссипация убывают по законам  $t^{-1,4}$ ,  $t^{-2,4}$  соответственно, а ширина следа растет как  $t^{0,3}$ . В то же время профили продольной скорости, а также законы убывания дефекта скорости существенно различны. Если для первого дефект скорости вырождается по закону  $t^{-1,3}$ , то для второго — по закону  $t^{-1,3}$  (как квадрат окружной компоненты скорости). Для второго решения найдено отношение характерной окружной скорости  $\omega_0 l$  к среднему геометрическому из продольной скорости  $u_0$  и скорости спутного потока  $U_0$ , равное  $C_d t^{0,3} \approx 1$ . Поскольку уравнение для дефекта скорости линейное, то продольная скорость будет равна сумме решений с различными весами. Можно ожидать, что если за кормой тела окружная компонента скорости «мала», то определяющим будет первое решение, а если «велика» — то на «близких» расстояниях от тела определяющим будет второе решение, а на «далеких» — первое. Ответ на вопрос, при каких условиях будет «главным» первое или второе решения, может дать численное интегрирование уравнений (1.1) или эксперимент.

Из анализа уравнений (1.8) следует, что толщина безымпульсных закрученных следов растет не медленнее, чем  $t^{0,25}$ . Если экспериментальные данные дадут более медленный рост, то это будет свидетельствовать о неприменимости модели турбулентности Лоундера — Джонса для описания следов. Отметим, что формулы для коэффициентов турбулентной вязкости, выведенные в [11, 13], не приводят к ограничительным оценкам роста толщины безымпульсных закрученных следов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
2. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 207 с.
3. Naudascher E. Flow in the wake of self-propelled bodies and related sources of turbulence//J. Fluid Mech. 1965. V. 22. № 4. P. 625—656.
4. Schetz J. A., Jakubowski A. K. Experimental studies of the turbulent wake behind self-propelled slender bodies//AJAA Journal. 1975. V. 13. № 12. P. 1568—1575.
5. Kostomakha V. A., Lesnova N. V. Turbulent axisymmetric momentumless wake in turbulized

- and non-turbulized external flow//Bulgarian Ship Hydrodynamics Centre. Proc. 1989. V. 1. P. 14—1, 14—7.
6. *Hassid S.* Similarity and decay laws of momentumless wakes//Phys. Fluids. 1980. V. 23. № 2. P. 404—405.
  7. *Finson M. L.* Similarity behaviour of momentumless turbulent wakes//J. Fluid Mech. 1975. V. 71. № 3. P. 465—479.
  8. *Левеллен, Теске, Дональдсон.* Применение полуэмпирических уравнений пульсационного движения к расчету осесимметричных следов//Ракетная техника и космонавтика. 1974. Т. 12. № 5. С. 56—63.
  9. *Городцов В. А.* Автомодельность и слабые замыкающие соотношения для симметричной свободной турбулентности//Изв. АН СССР, МЖГ, 1971. № 1. С. 43—50.
  10. *Lin J. T., Pao Y. H.* Wakes in stratified fluids//Annual Rev. Fluid Mech. 1979. V. 11. P. 317—338.
  11. *Роди В.* Модели турбулентности окружающей среды//Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 227—322.
  12. *Rotta J. C.* Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz//Z. Physik, 1951. В. 129. № 6. S. 547—572.
  13. *Амбарцумян Е. Н., Глушко Г. С., Гумилевский А. Г., Крюков И. А.* Математическая модель турбулентных процессов переноса: Препринт № 461. М.: ИПМ АН СССР, 1990. 51 с.
  14. *Mohamed M. S., Larue J. C.* The decay power law in the grid-generated turbulence//J. Fluid Mech. 1990. V. 219. № 10. P. 195—214.

Москва

Поступила в редакцию  
18.IV.1991