МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1992

УДК 532.5.013.4:536.25

© 1992 г. Ю. К. БРАТУХИН, С. О. МАКАРОВ

О КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОСТИ В ШАРОВОЙ ПОЛОСТИ

В задаче об устойчивости горизонтального слоя жидкости при подогреве снизу наблюдается повышение критических чисел Рэлея Ra_* при переходе от слоя со свободными границами к слою с твердыми границами, что объясняется стабилизирующим действием вязких сил у поверхности раздела жидкость — массив [1, с. 46]. Однако последовательного изучения влияния различных форм свободы поверхности на величину Ra_* в какой-либо другой конкретной задаче не проводилось.

Ниже предлагается рассмотреть три задачи на конвективную устойчивость в жидком шаровом слое, отличающиеся друг от друга степенью «свободы» поверхности: свободная, но недеформируемая поверхность (моделью может служить достаточно маленькая росинка на паутинке), несвободная деформируемая поверхность (росинка, загрязненная нерастворимым ПАВ) и твердая незакрепленная оболочка (запыленная росинка).

Эффекты Марангони в первых двух задачах исследованы в [2] и здесь игнорируются.

1. Задача о конвективной устойчивости шарового слоя со свободной недеформируемой поверхностью. Рассмотрим невязкий бесконечно теплопроводный массив, в котором на бесконечности задан постоянный градиент температуры, направленный вниз. В массиве имеется твердый неподвижный шарик, покрытый ровным слоем жидкости, теплопроводность которой будем считать равной теплопроводности шарика. В этих условиях при достаточно малом градиенте температуры теплопередача через включение может осуществляться без движения жидкости.

Исследуем устойчивость этого бесконвективного процесса, наложив на него возмущения скорости $\mathbf{v}$, давления p и температуры T_i в шаре и T в жидкости. Уравнения Навье — Стокса, непрерывности и теплопроводности для нейтральных нормальных возмущений имеют вид [1]

$$\nabla p = \Delta \mathbf{v} + \mathrm{Ra} T\mathbf{k};\ \nabla \mathbf{v} = 0;\ 0 = \Delta T + v\mathbf{k};\ \Delta T_i = 0 \qquad (1.1)$$

Уравнения (1.1) записаны в безразмерном виде; в качестве единиц измерения выбраны: длины — внешний радиус жидкого слоя R_1, скорости — χ/R_1, температуры — AR_1 и давления — $\nu\chi\rho/R_1^2$, где ν, χ, ρ — вязкость, температуропроводность и плотность жидкости, A — модуль постоянного градиента температуры во включении. Число Рэлея $\mathrm{Ra} = g\beta AR_1^4/\nu\chi$, g — модуль ускорения силы тяжести, β — коэффициент теплового расширения, $\mathbf{k}$ — орт оси z, направленный по вертикали вверх.

Присоединим к уравнениям (1.1) граничные условия прилипания, равенства температур и теплопотоков на поверхности шара $r = b$ и исчезновение возмущений температуры T, нормальной составляющей скорости v_n и касательных напряжений $\sigma_{n\tau}'$ на поверхности жидкости $r = 1$

$$r = b:\ \mathbf{v} = 0;\ T = T_i;\ \partial T/\partial n = \partial T_i/\partial n \qquad (1.2)$$

$$r = 1:\ T = 0;\ v_n = 0;\ \sigma_{n\tau}' = 0 \qquad (1.3)$$

Для решения задачи (1.1) — (1.3) используем решение, найденное [3] (см. также [4], где сделаны подробные вычисления). В сферической системе координат (r, θ, φ), полярная ось которой совпадает с осью z, а начало находится в центре включения, это решение имеет вид

$$\mathbf{v} = h(r)\mathbf{r}\times\nabla(P_1^{(1)}\sin\varphi);\ T = \tau(r)P_1^{(1)}\cos\varphi \tag{1.4}$$

$$h(r) = k^{1/2}[b_1 j_1 + b_2 n_1 + b_3 i_1 + b_4 k_1],\ \tau(r) = k^{-3/2}[b_1 j_1 + b_2 n_1 - b_3 i_1 - b_4 k_1] \tag{1.5}$$

где $k^4 = \mathrm{Ra}/2$; j_1, n_1, i_1, k_1 — сферические функции Бесселя первого и второго рода действительного и мнимого аргумента kr, $P_e^{(m)}$ — присоединенные полиномы Лежандра.

Удобно, однако, пользоваться не точными выражениями (1.5), а приближенными

$$h(r) = b - (1 + b^2)r + br^2 \tag{1.6}$$

$$\tau(r) = \frac{1}{180}[(-18 + 55b - 18b^2 + 3b^5 - 2b^7)r + (2b^7 - 3b^5)r^{-2} -$$

$$- 45br^2 + 18(1 + b^2)r^3 - 10br^4] \tag{1.7}$$

которые удовлетворяют точно граничным условиям (1.2), (1.3), уравнениям непрерывности и теплопроводности в (1.1) (T_i определяется из уравнения $\Delta T_i = 0$ и равно const $rP_1^{(1)}\cos\varphi$).

Для определения критических чисел Ra_1 умножим уравнение Навье — Стокса в (1.1) на скорость $\mathbf{v}$ из формулы (1.4), где $h(r)$ определено формулой (1.6), и затем проинтегрируем его по объему жидкости. В результате получим

$$\mathrm{Ra}_1 = \frac{30240b^2(8 + 9b + 3b^4)}{(1 - b)^4 f_1(b)} \tag{1.8}$$

$$f_1(b) = 1296 + 3402b + 5425b^2 + 6223b^3 + 4642b^4 + 2100b^5 + 588b^6 + 84b^7$$

При исчезающе малых b критическое число Рэлея стремится к нулю, что является естественным следствием неустойчивости незакрепленной капли, центр тяжести которой из-за неоднородного нагрева оказался выше ее центра симметрии. При $b = 0$ решение (1.4), (1.6) и (1.7) является точным решением задачи (1.1) — (1.3), которое описывает твердое вращение включения шар + жидкий слой вокруг оси y. При b, стремящемся к единице (тонкий жидкий слой на шаре), число $\mathrm{Ra}_1 \to \infty$ как $1/(1 - b)^4$.

2. Задача о конвективной устойчивости шаровой капли с несвободной деформируемой поверхностью. Пусть капля жидкости находится в невязкой бесконечно теплопроводной среде, на бесконечности которой задан постоянный безразмерный градиент температуры $\nabla T_i = -\tfrac{2}{3}\mathbf{k}$ (в принятых в разд. 1 единицах измерения). В этих условиях при малых Ra, конечных числах Вебера $\alpha = R_1\sigma/\chi\eta$ и исчезающе малых числах Марангони $(d\sigma/dT)R_1^2A/\chi\eta$ (σ — коэффициент поверхностного натяжения) капля с лишенной подвижности поверхностью должна деформироваться. Это может привести к искривлению изотерм и, как следствие, к возникновению конвективного движения. Для определения скорости $\mathbf{v}$ такого движения при малых Ra, распределения температур T в жидкости и T_i во внешней среде необходимо решить уравнения (1.1) со следующими граничными условиями на поверхности $r = R(\theta)$ и интегральным условием сохранения массы капли:

$$v_n = 0,\quad v_\tau = 0,\quad \frac{\partial T_i}{\partial n} = 0,\quad T = T_i \tag{2.1}$$

$$p-\alpha\left[\frac{2R^2+3R'^2-RR''}{(R^2+R'^2)^{3/2}}-\operatorname{ctg}\theta\frac{R}{R(R^2+R'^2)^{1/2}}\right]=$$

$$=2\frac{\partial v_r}{\partial r}-\left[\frac{1}{R}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right]\frac{R'}{R};\quad R'=\frac{dR}{d\theta} \tag{2.2}$$

$$\int\rho\,dV=\text{const} \tag{2.3}$$

Баланс нормальных напряжений (2.2) на поверхности капли записан в сферической системе координат (r,θ,φ). Первые три условия из (2.1) удобно записать в проекциях на радиальное и меридиональное направления

$$v_r=\frac{R'}{R}v_\theta;\quad v_\theta=-\frac{R'}{R}v_r;\quad \frac{\partial T_i}{\partial r}-\frac{R'}{R^2}\frac{\partial T_i}{\partial\theta}=0 \tag{2.4}$$

Радиус кривизны считаем положительным, если центр лежит в жидкости, а вектор нормали $\mathbf{n}$ направлен внутрь капли.

Решение уравнений (1.1), (2.1) — (2.4) ищем в виде рядов по степеням предполагаемого малым числа Рэлея Ra. После достаточно громоздких вычислений находим точное решение поставленной задачи в линейном по Ra приближении

$$p=2\alpha-\mathrm{Ra}\left(\frac{z^2}{2}+\frac{1}{6}\right)+\ldots,\quad T=-z-\mathrm{Ra}\frac{z}{20\alpha}+\ldots$$

$$T_i=-\frac{2}{3}\left(r+\frac{1}{2r^2}\right)P_1-\frac{\mathrm{Ra}}{20\alpha}\left(\frac{P_1}{3r^2}-\frac{P_3}{r^4}\right)+\ldots$$

$$R=1-\mathrm{Ra}\frac{P_2}{12\alpha}+\ldots$$

Здесь P_l — полиномы Лежандра. Скорость в этом приближении равна нулю. Таким образом, при малых Ra и конечных α теплопередача через каплю осуществляется только теплопроводностью, причем градиент температуры во включении уменьшается на $\mathrm{Ra}/20\alpha$.

Поскольку число Рэлея Ra определено через градиент температуры в капле, то в соответствии с результатами работы [5] о нечувствительности критических чисел Рэлея к слабой деформации шара, можно утверждать, что кризис в деформируемой капле происходит при бóльших числах Рэлея, чем в идеальной сфере. Это также согласуется с результатами исследования возникновения конвективной неустойчивости в цилиндрах различной высоты [1, с. 127].

3. Задача о конвективной устойчивости жидкого шарового слоя, закрепленного в свободно подвешенную твердую оболочку. Пусть полость между концентрическими твердыми шаром и шаровым слоем заполнена жидкостью. Внутренний шар неподвижен, шаровая оболочка может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси y. Теплопроводности шара и жидкости одинаковы и много меньше теплопроводности оболочки. Подогрев системы осуществляется таким образом, чтобы в жидкости в равновесии установился постоянный градиент температуры $\nabla T=-\mathbf{k}$ (в единицах, принятых в разд. 1).

Исследуем устойчивость бесконвективной теплопередачи через жидкость. Для этого решим уравнения для нормальных нейтральных возмущений (1.1) и уравнение $\mathrm{M}=\dot{\Omega}$. Здесь $\dot{\Omega}$ и M — безразмерные производная по времени угловой скорости оболочки и момент сил трения, действующий на нее со стороны жидкости

$$M = \oint (\sigma_{r\theta}'\cos\varphi - \sigma_{r\varphi}'\cos\theta\sin\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi \qquad (3.1)$$

Выражения для компонент тензора напряжений $\sigma_{r\theta}'$ и $\sigma_{r\varphi}'$ приведены в [6]. Единицами измерения момента сил и угловой скорости являются $8\pi\rho_0 R_1 \nu^2/15(a^5 - 1)$ и ν/R_1^2, где ρ_0 — плотность оболочки, a — ее безразмерный внешний радиус. В качестве граничных условий выберем условия прилипания, равенство температур и теплопотоков (1.2) на поверхности шара радиуса $r = b$ и условие прилипания и исчезновения возмущений температуры на поверхности твердой бесконечно теплопроводной оболочки

$$r = 1: \mathbf{v} = \mathrm{Pr}\,\Omega \times \mathbf{e}_r;\; T = 0,\; \mathrm{Pr} = \nu/\chi \qquad (3.2)$$

Здесь $\mathbf{e}_r$ — радиальный орт. К перечисленным уравнениям необходимо присоединить начальное условие, представляющее собой вносимое в систему возмущение. Примем в качестве такового бесконечно малую угловую скорость $\Omega = \varepsilon$ свободно вращающейся оболочки. Тогда для нейтральных возмущений ($\lambda = 0$) получим $\dot{\Omega} = 0$ и $\mathbf{M} = 0$. Получающаяся при этом задача совпадает с задачей, решенной в разд. 1, что позволяет утверждать, что критическое число Рэлея и в том и в этом случае определяется формулой (1.8).

Этот вывод, однако, теряет свою силу при бесконечно большой оболочке ($a \to \infty$). В этом случае начальное условие $\Omega = \varepsilon$ нереализуемо и первое из условий (3.2) превращается в $\mathbf{v} = 0$ на неподвижной границе $r = 1$. В качестве галеркинских функций в решении (1.4) удобно выбрать

$$h(r) = b - (1 + b)r + r^2$$

$$\tau(r) = \frac{1}{180}[(-8 + 27b + 3b^5 - 2b^6)r + (2b^6 - 3b^5)r^{-2} - 45br^2 + 18(1 + b)r^3 - 10r^4]$$

Критическое число Рэлея оказывается равным

$$\mathrm{Ra}_2 = \frac{30240(3 - b + 3b^2)}{(1 - b)^4 f_2(b)}$$

$$f_2(b) = 106 + 364b + 673b^2 + 777b^3 + 336b^4 + 845b^5$$

При $b \to 0$ в этом приближении получим $\mathrm{Ra}_2 = 856$, вместо точного значения 815, найденного в [3]. Разница 5% дает оценку точности примененной в работе методики. Для оценки точности было также рассчитано критическое число для второго критического движения (без внутреннего шара)

$$\mathbf{v} = (r^2 - 2r + 1)P_1\mathbf{e}_r + (2r^2 - 3r + 1)r\nabla P_1,\; p = 10rP_1$$

$$T = \frac{1}{63}(3r^4 - 7r^3 + 4r^2)P_2 + \frac{1}{36}(-3r^4 + 8r^3 - 6r^2 + 1)$$

Критическое число Рэлея оказывается здесь равным 1102 вместо 1113, вычисленного в [1]. Для свободной границы $\mathrm{Ra}_* = 448$ для функций

$$\mathbf{v} = (r^2 - 3r + 2)P_1\mathbf{e}_r + \left(2r^2 - \frac{9}{2}r + 2\right)r\nabla P_1,\quad p = 10rP_1$$

$$T = \frac{1}{42}(2r^4 - 7r^3 + 5r^2)P_2 + \frac{1}{12}(-r^4 + 4r^3 - 4r^2 + 1)$$

Рассмотренные задачи позволяют сделать вывод, что уменьшение критических чисел Рэлея при переходе к «свободной» границе связано с увеличением подвижности частиц жидкости у поверхности раздела включения и массива. Если же на границе проскальзывание не допускается, но сама граница может свободно деформироваться, возможно увеличение критических чисел Рэлея.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. *Братухин Ю. К.* Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 156—161.
3. *Братухин Ю. К., Шлиомис М. И.* Об одном точном решении уравнений нестационарной конвекции//ПММ. 1964. Т. 23. Вып. 5. С. 959—962.
4. *Братухин Ю. К.* Об устойчивости неравномерно нагретой жидкости, заполняющей шаровой слой//Уч. зап. Перм. ун-та. 1970. № 216. С. 33—37.
5. *Братухин Ю. К., Маурин Л. Н.* О конвективных движениях жидкости в почти шаровой плоскости при подогреве снизу//ПМТФ. 1983. № 3. С. 69—72.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Пермь

Поступила в редакцию
1.VII.1991