

УДК 532.5.013.4:536.25

© 1992 г. Е. А. РЯБИЦКИЙ

## ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

Термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского подогреваемого снизу слоя относительно монотонно нарастающих возмущений исследовалась в [1, 2]. Анализ осциллирующих возмущений, проведенный для задачи [1], показал, что в случае недеформируемой свободной поверхности колебательная неустойчивость отсутствует [3]. В [4] на примере слоя с внутренними источниками тепла установлено, что при учете капиллярности возникают дополнительные возмущения, которые нарастают осциллирующим образом. При этом длинноволновая колебательная неустойчивость наиболее опасна в области малых чисел Прандтля. Возникновение капиллярных волн было также обнаружено и для нелинейной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры в случае подогрева сверху [5].

В данной работе проведен анализ осциллирующих возмущений в плоском слое при наличии вертикального градиента температуры. Показано, что для подогрева снизу учет деформируемости свободной поверхности приводит к появлению колебательной неустойчивости в области коротких волн, которая становится наиболее опасной. Кроме того, в результате взаимодействия капиллярного и термокапиллярного механизмов неустойчивости возникают осциллирующие возмущения нового типа, которые приводят к кризису равновесия при больших числах Марангони. Установлено, что в случае подогрева свободной границы возникновение конвекции возможно только относительно колебательных возмущений.

1. Рассмотрим плоский слой вязкой теплопроводной жидкости при отсутствии массовых сил. Начало координат помещено на твердой поверхности: оси  $x, y$  направлены горизонтально, ось  $z$  — вертикально вверх. Уравнения твердой и свободной границ:  $z = 0$  и  $z = l$  соответственно. Пусть изменение коэффициента поверхностного натяжения от температуры описывается формулой:  $\sigma = \sigma_0 - \kappa(\theta - \theta_0)$ .

Рассмотрим два варианта граничных условий для температуры: когда жидкость подогревается снизу или нагревается свободная граница

$$z = 0: \theta = \theta_0; \quad z = l: \theta = \theta_0$$

Тогда равновесное распределение температуры имеет вид  $\theta = \theta_0(l - z)/l$ , либо  $\theta = \theta_0 z/l$ .

Выберем в качестве масштаба длины, времени, скорости, давления и температуры соответственно  $l, l^2/\nu, \rho\nu^2/l, s\theta_0\nu/\chi$ . Здесь  $\nu, \chi$  — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности,  $\rho$  — плотность;  $s = 1$  при подогреве снизу и  $s = -1$  при нагреве свободной поверхности.

Перейдем к исследованию устойчивости равновесия. Считаем, что возмущения вектора скорости  $(U, V, W)$ , давления  $P$ , температуры  $T$  и нормальной составляющей свободной поверхности  $R$  пропорциональны  $\exp i(\alpha_x x + \alpha_y y - C\tau)$ , где  $\alpha_x, \alpha_y$  — волновые числа,  $C = C_r + C_i$  — комплексный декремент,  $\tau$  — безразмерное время. После некоторых преобразований линейаризованные уравнения примут вид [4]

$$a\Phi + ik^2P = \Phi_\xi\xi, \quad aW + P_\xi = W_\xi\xi \quad (1.1)$$

$$i\Phi + W_{\xi} = 0, \quad bT - W = T_{\xi\xi}$$

$$a = -iC + k^2, \quad b = -i \operatorname{Pr} C + K^2$$

$$\xi = 0: \Phi = W = T = 0 \quad (1.2)$$

$$\xi = 1: \Phi_{\xi} + ik^2W + ik^2M(T - R\operatorname{Pr}) = 0$$

$$-P + 2W_{\xi} + k^2WeR = 0, \quad iCR + W = 0 \quad (1.3)$$

$$T_{\xi} + \operatorname{Bi}(T - R\operatorname{Pr}) = 0$$

$$\Phi = \alpha_x U + \alpha_y V, \quad k^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2, \quad \operatorname{Pr} = \nu/\chi$$

$$M = \frac{\sigma\theta_0 l}{\rho\nu\chi}, \quad We = \frac{\sigma_0 l}{\rho\nu^2}, \quad \operatorname{Bi} = \frac{\beta l}{\lambda}$$

Здесь  $\xi = z/l$ ;  $\lambda, \beta$  — коэффициенты теплопроводности и межфазного теплообмена,  $\operatorname{Pr}$  — число Прандтля,  $M$  — число Марангони,  $We$  — число Вебера,  $\operatorname{Bi}$  — число Био.

Таким образом, в полученной задаче для возмущений вид подогрева проявляется только в знаке  $M$ . В случае подогрева снизу числа Марангони будут положительны, а при нагреве свободной поверхности — отрицательны.

Граница устойчивости равновесия определяется условием  $C_1 = 0$ .

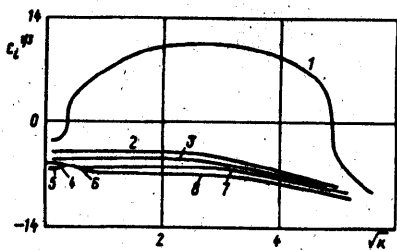
Решение задачи (1.1)—(1.3) для монотонных нейтральных возмущений ( $C = 0$ ) построено в случае недеформируемой свободной поверхности в [1] и с учетом возмущений свободной границы — в [2]. Полученные в этих работах аналитические зависимости чисел Марангони от остальных параметров использовались для контроля расчетов.

2. Численное решение задачи (1.1)—(1.3) для произвольных возмущений осуществлялось методом ортогонализации.

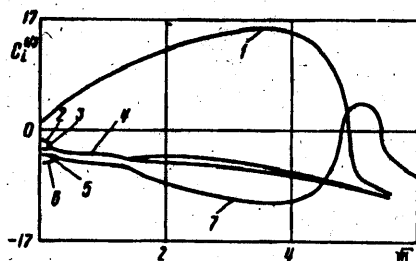
Рассмотрим случай подогрева снизу. Пусть свободная граница недеформируема ( $We = \infty$ ). Тогда неустойчивость возникает из-за неоднородности распределения температуры вдоль свободной поверхности (термокапиллярный механизм конвекции). На фиг. 1 приведены результаты расчетов несколько первых мод, построенные для  $\operatorname{Pr} = 0,016$ ,  $\operatorname{Bi} = 0$ ,  $M = 4200$ . Согласно [1], кризис равновесия в этом случае возникает при числах Марангони, больших 80. Наиболее опасное возмущение нарастает монотонно и соответствующая мода приведена на фиг. 1 (кривая 1). Кроме главного возмущения существует также целый спектр затухающих возмущений, которые обычно не рассматриваются. При малых волновых числах все возмущения монотонные (фиг. 1 кривые 1—5). С ростом  $k$  возможно образование комплексно-сопряженных пар (кривая 6), которые в дальнейшем вновь распадаются на монотонно затухающие возмущения (кривые 7, 8). Таким образом, колебательные возмущения могут иметь место в однородной жидкости и в случае недеформируемой свободной поверхности. Решающим здесь является равновесное распределение температуры, поскольку при наличии внутренних источников тепла для  $We = \infty$  возможны только монотонные возмущения [4].

Проведенный для различных чисел Прандтля и Био анализ показал, что границу устойчивости всегда определяет первая монотонная мода (кривая 1). Остальные моды лежат в нижней полуплоскости и соответствующие возмущения быстро затухают. Кроме того, колебательный характер возмущений возможен только при малых числах Био: так, для  $\operatorname{Bi} = 1$  все возмущения уже монотонны.

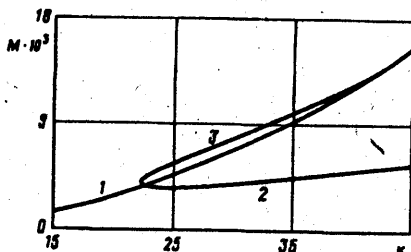
Учет капиллярности приводит к понижению порога устойчивости относительно монотонных возмущений, особенно в области малых волновых



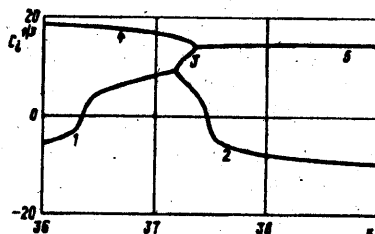
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

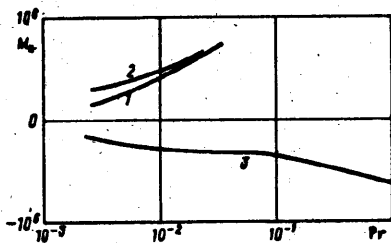


Фиг. 4

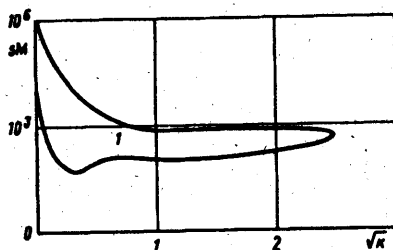
чисел. На фиг. 2 для  $We = 10^4$  показано влияние деформируемости свободной поверхности на первые термокапиллярные моды. Здесь кривые (1—3) те же, что и на фиг. 1. Учет капиллярности приводит к появлению монотонной неустойчивости в длинноволновой области, что согласуется с [2]. Отметим также, что численно построенные нейтральные кривые для монотонных возмущений полностью совпадают с соответствующими кривыми, полученными в [2]. Влияние капиллярности проявляется и в возможности образования новых осциллирующих возмущений. Как показано на фиг. 2, при учете деформаций свободной границы происходит слияние монотонных возмущений (кривые 2, 3) и возникновение пары колебательных (кривая 4).

Рассмотрим возмущения, которые появляются при учете капиллярности. Они реализуются в виде поверхностных волн, возникающих вследствие возможных деформаций свободной границы. Зависимости  $C_i$  от волнового числа для этих возмущений приведены на фиг. 2 (кривые 5, 6). При этом капиллярные возмущения монотонно убывают в области длинных волн, а с ростом  $k$  соответствующие моды сливаются, образуя комплексно-сопряженную пару (кривая 7). Полученные осциллирующие возмущения при достаточно больших числах Марангони нарастают и в коротковолновой области приводят к кризису равновесия. Соответствующая нейтральная кривая, построенная для  $Bi = 0$ ,  $Pr = 0,016$ ,  $M = 10^4$ , приведена на фиг. 3 (кривые 2, 3). Кривая 1 обозначает границу устойчивости относительно монотонных возмущений. Область колебательной неустойчивости ограничена снизу кривой 2 и сверху кривой 3. Таким образом, капиллярная неустойчивость возникает в области очень коротких волн (для  $Bi = 0$ ,  $Pr = 0,016$  при  $k > 22,18$ ) и с ростом волнового числа стабилизации не наблюдается, что является неожиданным фактом. Кроме того, при больших  $k$  (при  $k > 22,6$ ) колебательная неустойчивость становится преобладающей и граница устойчивости равновесия определяется кривой 2. Кривая 3 с ростом волнового числа сливается в точке  $k = 41,2$ ,  $M = 13\,580$  с нейтральной кривой для монотонных возмущений.

Рассмотрим, что при этом происходит с комплексным декрементом. На фиг. 4 показано характерное поведение наиболее опасных мод при больших числах Марангони (здесь  $M = 11\,200$ ). С ростом  $M$  минимум кривой  $C_i$  от



Фиг. 5



Фиг. 6

$k$  убывает по абсолютной величине и при  $M = 10\,470$  обращается в нуль. При этом капиллярная мода (кривая 1) распадается на две монотонные (кривые 2, 3), нижняя из которых, убывая, формирует монотонную нейтральную кривую. Кривая 3, возрастая, «пересекается» с монотонной термокапиллярной модой (кривая 4), образуя комплексно-сопряженную пару (кривая 5). Точки пересечения этой новой колебательной моды с осью  $C_i = 0$  образуют колебательную нейтральную кривую при  $M > 10\,470$ . С ростом числа Марангони точка разделения капиллярной колебательной моды 1 на монотонные сдвигается в нижнюю полуплоскость, что соответствует совпадению кривых 1 и 3 на фиг. 3.

Таким образом, на фиг. 3 при  $M > 10\,470$  монотонная нейтральная кривая 1 обозначает границу устойчивости относительно термокапиллярных возмущений; кривые 2 и 3 — относительно капиллярных колебательных. Характерное поведение наиболее опасных мод показано на фиг. 2. При  $M > 10\,470$  вклад деформируемости свободной поверхности в формирование нейтральных кривых становится решающим. Монотонная нейтральная кривая 1 описывает границу устойчивости уже относительно капиллярных возмущений. Кроме того, взаимодействие термокапиллярных и капиллярных механизмов конвекции приводит к появлению нового типа колебательных возмущений, которые определяют границу устойчивости равновесия при больших числах Марангони (кривая 2). Порядок образования этих новых возмущений проиллюстрирован на фиг. 4.

Рассмотрим влияние основных характеристик жидкости на устойчивость равновесия. При уменьшении числа Прандтля критические числа Марангони убывают, при этом область колебательной неустойчивости сдвигается в диапазон умеренных волновых чисел. Например, при  $Pr = 6 \cdot 10^{-3}$  осциллирующие возмущения становятся наиболее опасными уже при  $k > 6$ . Зависимость минимальных чисел Марангони  $M_c$  от числа Прандтля для  $Bi = 0$ ,  $We = 10^4$  приведена на фиг. 5 (кривая 1). При увеличении числа Био запас устойчивости повышается (критические кривые  $M_c$  от  $Pr$  смещаются вверх), а область колебательной неустойчивости сдвигается в сторону больших волновых чисел. Заметим, что даже существенное увеличение теплоотдачи со свободной границы слабо стабилизирует равновесие. Для примера на фиг. 5 приведена зависимость  $M_c$  от  $Pr$ , построенная при  $Bi = 15$  (кривая 2).

Пусть жидкость подогревается сверху. Если свободная поверхность не деформируется, то в силу изотермичности границы равновесие всегда устойчиво. В этом случае отсутствует градиент поверхностного натяжения на свободной границе и термокапиллярная неустойчивость невозможна. Возмущения при этом затухают как монотонно, так и колебательным образом.

При учете капиллярности появляются поверхностные возмущения, которые могут вызвать кризис равновесия, при этом нарастание опасных возмущений происходит колебательным образом. Нейтральная кривая для  $Bi = 0$ ,  $Pr = 0$ ,  $We = 10^4$  приведена на фиг. 6. Область неустойчивости обоз-

начена цифрой 1. Здесь, как и при нагреве внутренними источниками тепла [4], капиллярная неустойчивость имеет место только для достаточно длинных волн (при  $k < 2,444$ ), а коротковолновые возмущения стабилизируются силами поверхностного натяжения. Минимальное число Марангони  $sM_c = 59,9$  достигается при  $k = 0,34$ . С увеличением числа Прандтля происходит стабилизация равновесия, критические значения  $M_c$  от  $Pr$ , полученные при  $Bi = 0$ ,  $We = 10^4$ , приведены на фиг. 5 (кривая 3). В отличие от подогрева снизу увеличение теплоотдачи со свободной поверхности оказывает сильное стабилизирующее воздействие. Так, для  $Bi = 2$ ,  $Pr = 0,016$  равновесие устойчиво при любых числах Марангони и кризис возможен только при  $Pr < 0,012$ .

Таким образом, при исследовании вопросов, связанных с термокапиллярной неустойчивостью равновесия, всегда необходимо учитывать эффекты, порождаемые деформируемостью свободной границы. При этом капиллярный механизм неустойчивости не только часто становится решающим при возникновении движения, но и может привести к появлению новых типов наиболее опасных возмущений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pearson J. R. A. On convection cells induced by surface-tension//J. Fluid Mech. 1958. V. 4. № 5. P. 489—497.
2. Scriven L. E., Sternling C. V. On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity//J. Fluid Mech. 1964. V. 19. № 3. P. 321—340.
3. Vidal A., Acrivos A. Nature of the neutral state in surface-tension driven convection//Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 3. P. 615—616.
4. Рябицкий Е. А. О термокапиллярной неустойчивости равновесия плоского слоя при наличии внутренних источников тепла//Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 2. С. 27—31.
5. Уршич В. А., Яковлев Д. Г. Возбуждение капиллярных волн в неоднородно прогретых жидких пленках//Журн. техн. физики. 1989. Т. 59. № 2. С. 19—25.

Красноярск

Поступила в редакцию  
13.V.1991