МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1992

УДК 532.582.81

© 1992 г. Е. Д. ПОТАПОВ, Н. Г. СЕРЕБРЯКОВА,
В. Г. ТРОШИН

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОРИСТЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛ, ОБТЕКАЕМЫХ МЕДЛЕННЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается медленное стационарное движение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости через совокупность неподвижных однородных изотропных тел сферической формы пористости ε и проницаемости k, расположенных случайным образом. Размеры тел и скорость жидкости таковы, что число Рейнольдса, связанное с обтеканием тел, мало.

В решении задачи используются и обобщаются на случай пористых тел результаты предложенного Тэмом [1] метода «точечных» сил, примененного к расчету сил взаимодействия случайной совокупности из непроницаемых шаров с потоком жидкости. Расширяя этот метод, в [2] получены аналогичные результаты для сил взаимодействия в системе газовых и жидкостных пузырьков.

Выделим из совокупности одну «пробную» частицу. В рамках теории Тэма сила, действующая на нее, определяется как

$$\mathbf{F} = D(a, k)U_0\mathbf{i} \tag{1}$$

а движение жидкости в символах усредненных по ансамблю частиц характеристик потока описывается уравнениями

$$\mu(\Delta\langle\mathbf{U}\rangle - \alpha^2\langle\mathbf{U}\rangle) = \nabla\langle P\rangle, \quad \nabla\cdot\langle\mathbf{U}\rangle = 0 \tag{2}$$

$$\mu\alpha^2 = \int n(a)D(a,k)da \tag{3}$$

где $\langle\mathbf{U}\rangle$ и $\langle\mathbf{P}\rangle$ — усредненные по ансамблю частиц скорость и давление жидкости, $U_0\mathbf{i} = \langle\mathbf{U}_0\rangle$ — средняя скорость жидкости вдали от частицы, $\mathbf{i}$ — единичный вектор по направлению основного движения жидкости, a — радиус частиц, $n(a)$ — счетная концентрация частиц, μ — динамическая вязкость жидкости. Параметр α определяется условием самосогласованности задачи (3), в котором величина $D(a, k)$ устанавливается при нахождении, согласно (2), силы, действующей на частицу.

Течение жидкости внутри частицы описывается законом Дарси и уравнением неразрывности

$$\mathbf{Q} = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad}\Pi, \quad \operatorname{div}\mathbf{Q} = 0 \tag{4}$$

где $\mathbf{Q}$ и Π — фильтрационная (расходная) скорость и давление.

В сферической системе координат, помещенной в центр пробной частицы, в качестве граничных условий на поверхности шара примем: равенство нормальных компонент скоростей

$$\langle U_r\rangle = Q_r \tag{5}$$

равенство нормальной компоненты тензора напряжений внешнего потока и давления в фильтрационном потоке

$$P - 2\mu\frac{\partial\langle U_r\rangle}{\partial r} = \Pi \tag{6}$$

условие для касательных компонент скоростей

$$\langle U_\theta\rangle - Q_\theta = \lambda\sqrt{k}\,\frac{\partial\langle U_\theta\rangle}{\partial r} \tag{7}$$

где λ — безразмерный параметр, определяемый экспериментально. Условие (7) получено экспериментально в [4, 5] и теоретически обосновано в [3]. По данным этих работ, $0{,}25 < \lambda < 10$.

В [6] установлен физический смысл параметра λ, который в простейшем случае ламинарного течения жидкости в окрестности пористой среды определяется отношением динамической вязкости к эффективной.

Согласно [1], решение внешней задачи имеет вид

$$\langle U_\theta\rangle = -\frac{U_0}{r^3}\,[r^3 + B + 2A\,(1 + \alpha r + \alpha^2r^2)\exp(-\alpha r)]\sin\theta$$

$$\langle U_r \rangle = \frac{U_0}{r^3}\left[r^3 - 2B - 2A\,(1 + \alpha r)\exp(-\alpha r)\right]\cos\theta \tag{8}$$

$$P = -\mu\alpha^2 U_0\,(1 + Br^{-3})\,r\cos\theta$$

Для внутренней задачи давление П, согласно (4), удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Pi = 0$, его решение с граничным условием (6) имеет вид

$$\Pi = -\mu U_0 a^{-5}\left[\gamma^2 a^3 + (12+\gamma^2)\,B - 4\,(3 + 3\gamma + \gamma^2)A\exp(-\gamma)\right] r\cos\theta,\ \ \gamma = \alpha a \tag{9}$$

Совместное решение (8) и (9) с граничными условиями (5), (6) и (7) дает для коэффициентов A и B значения

$$A = -\frac{3a^3\exp\gamma}{\gamma^2\sigma}\,(1 + \lambda\eta - \eta^2\gamma^2 - \lambda\eta^3\gamma^2)$$

$$B = -\frac{a^3}{\gamma^2\sigma}\left[-3 - 3\gamma + \gamma^2 + \eta^2\gamma^2\gamma_0 + \lambda\eta^3\gamma^2\,(\gamma_0 + \gamma_1) - \lambda\eta\,(\gamma_0 + \gamma_1)\right]$$

$$\sigma = 2 + 2\lambda\eta\,(2 + \gamma) + \eta^2\gamma_0 + \lambda\eta^3\,(15 + 15\gamma + 2\gamma^2 + \gamma^3)$$

$$\gamma_0 = 3 + 3\gamma + \gamma^2,\ \ \gamma_1 = \gamma^2 + \gamma^3,\ \ \eta = \frac{\sqrt{k}}{a}$$

Вычисляя проекцию на направление набегающего потока силы сопротивления шара по известной формуле

$$F = 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(P_{rr}\cos\theta - P_{r\theta}\sin\theta)\sin\theta\,d\theta$$

с учетом (1) найдем выражение для силы F и $D(a, k)$

$$F = D\,(a, k)\,U_0,\quad D\,(a, k) = 6\pi\mu a q\,(\eta, \gamma, \lambda\eta) \tag{10}$$

$$q\,(\eta, \gamma, \lambda\eta) = \frac{2}{3\sigma}\left[\gamma_0 + \lambda\eta\,(\gamma_0 + \gamma_1) - 2\eta^2\gamma^2\,(1 + \gamma) + 2\lambda\eta^3\gamma^2\,(1 + \gamma)\right]$$

При $\alpha = 0$ (одиночная частица) формула (10) дает результат работы [7]. При $k \to \infty$ («прозрачная среда») и при выполнении физически необходимого требования $\alpha = 0$, $F \to 0$. В случае непроницаемых шаров радиуса a формула (10) дает результат работы [1], справедливый при объемной концентрации частиц

$$f = 4\pi a^3 n/3 < 0{,}6$$

В случае пористых шаров радиуса a неизвестный параметр $\gamma = \alpha a$ определим из алгебраического уравнения 5-го порядка

$$2\gamma^2 = 9fq(\eta, \gamma, \lambda\,\eta) \tag{11}$$

полученного из (3) с учетом (10).

Покажем, что это уравнение при $0 < \lambda < 10$, $f < 0{,}6$ и практически реализуемых значениях η имеет только один положительный корень. Для определения границ изменения параметра η воспользуемся формулой Козени — Кармана $k = \varepsilon R^2/C$, где R — гидравлический радиус, $C \approx 5$ — постоянная Козени. С учетом удельной поверхности шара $\Sigma = 3(1 + \varepsilon - \varphi)/a$ имеем

$$\eta^2 = \frac{k}{a^2} = \frac{\varepsilon^3}{9c\,(1 + \varphi - \varepsilon)^2} \tag{12}$$

где φ — отношение площади внутренней поверхности шара к внешней. Считая $C = 5{,}0{,}4 \le \varepsilon \le 0{,}6$ и $\varphi \ge 0{,}1$, из (12) получим, что $\eta \le 0{,}36$, а при $\varepsilon \le 0{,}9$ и $\varphi \ge 0{,}5$ получим $\eta \le 0{,}25$. Итак, можно полагать $\eta < 0{,}5$.

Уравнение (11) представим в виде $Z_1(\gamma) = Z_2(\gamma)$, где

$$Z_1\,(\gamma) = \lambda\eta^3\gamma^5 + \eta^2\,(1 + 2\lambda\eta)\,\gamma^4 + \left[\lambda\eta\,(2 - 3f) + 3\,(1 + 2f)\,\eta^2 + \lambda\eta\,(15 - 6f)\right]\gamma^3$$

$$Z_2\,(\gamma) = -E\gamma^2 + 9f\,(1 + \lambda\eta)\,\gamma + 9f\,(1 + \lambda\eta)$$

$$E = 2 + 2\lambda\eta(2 - 3f) + 3\eta^2(1 + 2f) + \lambda\eta^3(15 - 6f) - 3f$$

Нетрудно видеть, что при указанных значениях λ, η, f коэффициент $E > 0{,}2$. Функция $Z_1(\gamma) \ge 0$ при $\eta \ge 0$ является возрастающей и выпуклой вверх. Функция $Z_2(\gamma)$ имеет максимальное значение при $\gamma_2 = 9f(1 + \lambda\eta)/2E$ и $Z_2(0) = 9f(1 + \lambda\eta)$. При $\gamma > \gamma_2$ функция $Z_2(\gamma)$ — убывающая. Тогда найдется только одна точка γ_3, такая, что $Z_1(\gamma_3) = Z_2(\gamma_3)$, причем $0 < \gamma_3 < \gamma_4$, где γ_4 — положительный корень уравнения $Z_2(\gamma) = 0$.

ε_1	$\eta = 0$		$\eta = 0{,}01$		$\eta = 0{,}1$	
	q	k_1	q	k_1	q	k_1
0,5	43,63	0,010	35,07	0,013	7,78	0,057
0,6	15,85	0,035	14,17	0,039	5,58	0,100
0,7	7,67	0,097	7,16	0,103	3,92	0,189
0,8	4,21	0,269	4,03	0,279	2,72	0,409
0,9	2,40	0,926	2,33	0,952	1,82	1,219

Таким образом, при $\eta < 0{,}5$, $0 < \lambda < 10$, $f < 0{,}6$ уравнение (11) имеет единственный положительный корень, а значит, и единственное значение параметра $\alpha = \gamma/a$, необходимое для определения вязкой силы сопротивления и коэффициента проницаемости слоя $\alpha^{-2} = a^2/\gamma^2$.

Результаты расчетов при $\lambda = 1$ отношения $q(\eta, \gamma, \lambda\eta)$ силы (10), действующей на пористый проницаемый шар, к силе $F_0 = 6\pi\mu a U_0$, действующей на «нестесненную» сплошную частицу, и отношения $\alpha^{-2}/a^2 = k_1$ (безразмерная проницаемость слоя) в зависимости от межзерновой пористости слоя $\varepsilon_1 = 1 - f$ и η приведены в таблице.

Как показывают результаты расчетов, сила сопротивления уменьшается с увеличением межзерновой пористости ε_1, усиливается фильтрация жидкости через шары.

Вклад от частичной проницаемости $\eta = \sqrt{k}/a$ частиц в полную проницаемость слоя k_1 получается резко выраженным при $\eta > 0{,}05$.

Эффект от внутренней проницаемости в высокопористых частицах может быть резко выраженным в случаях концентрированных совокупностей. Имея дело в практике с такими системами пористых проницаемых шаров, необходимо принимать во внимание фильтрационный перенос внутри отдельных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tam C. K. W.* The drag on a cloud of spherical particles in low Reynolds number flow//J. Fluid Mech. 1969. V. 38. № 3. P. 537—546.
2. *Буевич Ю. А., Марков В. Г.* Реология концентрированных смесей жидкости с мелкими частицами. Параметры межфазового взаимодействия//ПММ. 1972. Т. 36. № 3. С. 480—493.
3. *Saffman P. G.* On the boundary condition at the surface of a porous medium//Stud. Appl. Math. 1971. V. 50. № 2. P. 93—101.
4. *Beavers G. S., Joseph D. D.* Boundary conditions at a naturally permeable wall//J. Fluid Mech. 1967. V. 30. № 1. P. 197—207.
5. *Beavers G. S., Sparrow E. M., Magnuson R. A.* Experiments on coupled parallel flows in a channel and boundary porous medium//Trans. ASME J. Basic Eng. 1970. V. 92. № 4. P. 843—848.
6. *Серебрякова Н. Г.* К расчету касательного взаимодействия потока с пористой средой//Тез. докл. всесоюз. конф. «Волновые и вибрационные процессы в машиностроении», Горький, сент., 1989. Ч. 1. Горький, 1989. С. 128—129.
7. *Потапов Е. Д., Серебрякова Н. Г.* Обтекание пористого шара при малых числах Рейнольдса//Применение аналит. и числ. методов в динамике жидких и сыпучих сред. Вып. 3. Горький, 1974. С. 19—24.

Москва

Поступила в редакцию 26.VI.1990