

© 1992 г. д. н. дорошенко, о. а. синкевич

ОЦЕНКА ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОГО СЛОЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ЯДРА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

При решении ряда задач теории электрогидродинамической неустойчивости жидких систем и, в частности, капле, капле с твердым ядром или слоев жидкости на искривленных поверхностях, возникает вопрос о границах перехода к неустойчивости и о соотношении между критическими параметрами системы. Электрогидродинамическая неустойчивость сплошных капель достаточно изучена и экспериментально и теоретически. Вопросам же, связанным с неустойчивостью заряженных, а также находящихся в электрических полях жидких слоев на твердых подложках, уделено гораздо меньше внимания. В связи с этим представляют интерес исследования как самих критических условий возникновения неустойчивости [1—2], так и соотношений между ними.

В приближении идеальной, идеально проводящей несжимаемой жидкости несложно показать [2], что квадрат собственной частоты слоя ω_n^2 (n — номер моды) всегда веществен, т. е. переход от устойчивости жидкого слоя к неустойчивости под влиянием электрических параметров происходит путем перехода вещественной частоты ω_n через ноль в область чисто мнимых значений (принцип смены устойчивости). Очевидно, что точки пространства параметров, вызывающих неустойчивость, в которых $\omega_n = 0$, образуют нейтральную линию, разделяющую области устойчивости и неустойчивости.

В предлагаемой статье приводится численно рассчитанная графическая зависимость критических величин параметров Тейлора W_T и Рэлея W_R сферического жидкого слоя, которая, возможно, имеет более общий характер кривой перехода электрогидродинамической системы из устойчивого состояния в неустойчивое. Подробное описание теоретической модели, в рамках которой решается задача о нахождении критических условий неустойчивости заряженного жидкого слоя на поверхности твердого сферического ядра во внешнем электрическом поле, можно найти в [2], поэтому лишь вкратце, без математических выражений, повторим здесь рассуждения, приводящие к дисперсионному уравнению.

Рассматривается покоящийся относительно внешней среды слой идеальной, идеально проводящей несжимаемой жидкости радиуса R с зарядом Q на поверхности твердого ядра радиуса R_j , находящийся во внешнем однородном постоянном электрическом поле, величина напряженности которого E . В данной статье примем радиус слоя ограниченным сверху значениями 0,5—1 см и рассмотрим слой, для которых отношение радиусов ядра и оболочки $\mu = R_j/R$ находится в пределах 0,9—0,99. Это позволит не учитывать в настоящем рассмотрении отклонение формы слоя от сферической в электрическом и гравитационном полях, считая его малым, а также пренебречь влиянием на критические условия возникновения неустойчивости слоя сил флуктуационной природы [3], существенных в случае пленок толщиной $\sim 10^{-3}$ см.

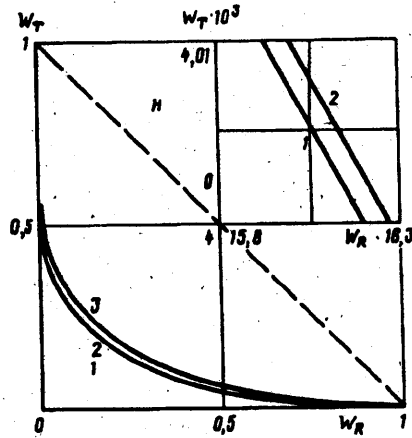
Далее принимается, что в жидком слое существует волновое движение бесконечно малой амплитуды с потенциалами скоростей вне и внутри слоя $\psi_{1,2} \sim \exp(-i\omega t)$, которые удовлетворяют уравнению Лапласа с соответствующими граничными условиями на поверхности жидкости и ядра. Решения уравнения Лапласа ищутся в виде разложений по сферическим функциям [4]. Подстановка решений в динамическое граничное условие, которым является уравнение баланса волнового, лапласова и электродинамического давлений на внешней поверхности жидкости, приводит к системе алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов разложений H_n^m , которую выпишем здесь только для осесимметричных мод ($m = 0$), так как именно они возбуждаются в первую очередь [5]

$$H_{n-2}K_n^{(1)} + H_{n-1}K_n^{(2)} + H_n[K_n^{(3)} - \Omega^2] + H_{n+1}K_n^{(4)} + H_{n+2}K_n^{(5)} = 0 \quad (1)$$

$$K_n^{(1)} = -\frac{n(n-1)^2(n-2)^2(n+2)W_T}{\beta_n d_n^2 \sqrt{(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)}};$$

$$K_n^{(2)} = -\frac{(n-1)(n+2)(2n-3)M_n \sqrt{n-1}}{\beta_n d_n} \sqrt{W_T W_R}$$

$$K_n^{(3)} = \frac{n(n-1)(n+2)}{\beta_n} (1 - W_T - W_R);$$



Фиг. 1

$$K_n^{(4)} = - \frac{(n+1)(n+2)(2n-1)M_{n+1}\sqrt{n-1}}{\beta n d_n} \sqrt{W_T W_R}$$

$$K_n^{(5)} = - \frac{n(n^2-1)(n+2)^3 W_T}{\beta n d_n^2 \sqrt{(2n+1)(2n+3)^2(2n+5)}}; \quad d_n = \sqrt{(n-1)M_n^2 + nM_{n+1}^2};$$

$$M_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2-1}}$$

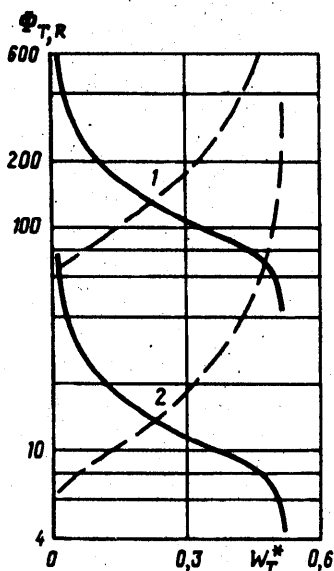
$$\Omega^2 = \frac{\rho R^3}{\sigma} \omega^2; \quad W_T = \frac{9E^2 R d_n^2}{4\pi\sigma(n-1)(n+2)}; \quad W_R = \frac{Q^2}{4\pi\sigma(n+2)R^3}$$

$$\beta_n = \frac{1+n+\mu^{2n+1}}{(1+n)(1-\mu^{2n+1})} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{n}{n+1}$$

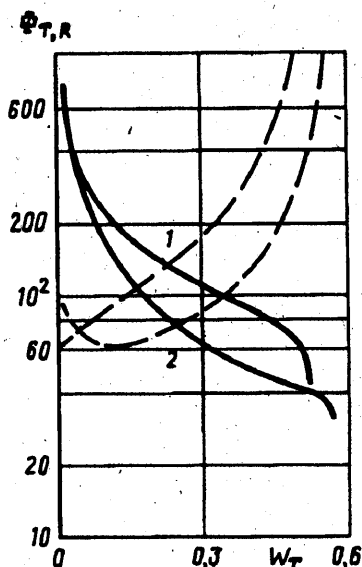
Здесь ρ и ρ_0 — плотности жидкости и окружающей среды, σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Поскольку радиальные колебания жидкого слоя отсутствуют (жидкость несжимаемая) и относительно внешней среды слой как целое покоится, то $H_0 = -H_1 = 0$. Требуя обращения в ноль определителя системы (1), что является условием наличия у нее нетривиальных решений, получим дисперсионное уравнение относительно Ω^2 , корни которого Ω_n^2 составляют спектр капиллярных волн в жидком слое при заданных значениях параметров W_T , W_R и μ , а приравнявая нулю свободный член дисперсионного уравнения, находим условие обращения собственной частоты слоя в ноль, откуда устанавливается искомая связь между критическими значениями параметров Тейлора и Рэлея: $W_T^* = W_T^*(W_R^*)$. Система (1) бесконечная, бесконечного порядка будет и ее определитель. В линейном приближении по n зависимость W_T^* от W_R^* находится из уравнения $K_n^{(3)} = 0$ (фиг. 1, штриховая линия). Для установления более точных зависимостей между W_T^* и W_R^* требуется вычисление определителей высоких порядков. На фиг. 1 представлена кривая перехода к неустойчивости основной моды колебаний слоя идеальной жидкости, рассчитанная в 10-ом приближении по n (сплошная линия 1). (Как показывает численный анализ, использование более высоких приближений по n ($N > 10$) не приводит к существенному изменению положения нейтральной кривой.) Верхняя часть пространства (над кривой) соответствует области неустойчивости, нижняя часть — области устойчивости слоя. По сравнению с линейной зависимостью видно, что более детальный анализ соотношения критических параметров W_T^* и W_R^* расширяет область неустойчивости в пространстве параметров задачи.

Учет всегда имеющей место в реальной жидкости вязкости приводит к появлению затухания капиллярных волн и, как следствие, росту критических значений параметров Тейлора и Рэлея. Однако, как показывают расчеты, такой рост незначителен в случае маловязких жидкостей, когда толщина слоя не слишком мала (величина параметра μ не превышает 0,9—0,95). На фиг. 1 кривая 2 рассчитана для маловязкой жидкости (волновое движение в маловязкой жидкости см. [6]) при $\mu = 0,9$. Отдельно показан участок пространства параметров W_T и W_R , откуда видно, что кривые 1 и 2 различимы лишь на уровне 10^{-4} . Заметное отличие от кривой перехода 1 начинается для слоев маловязких жидкостей при $\mu \approx 0,98$ (кривая 3 рассчитана для $\mu = 0,99$).

Использованный метод и полученные результаты неприменимы в случае жидкостей,



Фиг. 2



Фиг. 3

вязкость которых значительна. Кривая перехода для вязких жидкостей может быть получена при использовании уравнения Навье — Стокса.

В ряде практических случаев требуется аналитическое выражение для расчета собственных частот слоя в малой области на границе устойчивости (например, для оценки времени развития неустойчивости). Аналитическое выражение для расчета собственной частоты n -й моды колебаний слоя в малой окрестности границы областей устойчивости и неустойчивости можно получить, анализируя дисперсионное уравнение

$$\sum_{k=0}^{N+1} (-1)^{N+1-k} (\Omega^2)^{N+1-k} \varphi_k(W_T, W_R) = 0 \quad (2)$$

где N — номер рассчитываемого приближения по n , $\varphi_k(W_T, W_R)$ — коэффициенты при степенях параметра Ω^2 (причем φ_{N+1} — свободный член дисперсионного уравнения, φ_k при $1 \leq k \leq N+1$ есть суммы всех $N+1$ главных миноров k -го порядка матрицы свободного члена, $\varphi_0 = 1$). Для n -й моды зависимость соответствующего корня дисперсионного уравнения Ω_n^2 от W_T и W_R будет представлена в координатах Ω_n^2, W_T, W_R поверхностью, описываемой функцией

$$F_{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} (-1)^{N+1-k} (\Omega_n^2)^{N+1-k} \varphi_k(W_T, W_R) \quad (3)$$

и пересекающей нейтральную плоскость $\Omega_n^2 = 0$ по кривой перехода $\varphi_{N+1}(W_T, W_R) = 0$ (фиг. 1). Вводя параметры надкритичности

$$\delta_T \equiv W_T - W_T^*, \delta_R \equiv W_R - W_R^*$$

и раскладывая с использованием правила дифференцирования неявной функции Ω_n^2 вблизи нуля в ряд по степеням надкритичности δ_T, δ_R , получим, ограничиваясь первыми членами разложения

$$\Omega_n^2|_0 \approx -\Phi_T \delta_T - \Phi_R \delta_R \quad (4)$$

$$\Phi_T = \frac{|\partial \varphi_{N+1} / \partial W_T|}{\varphi_N} \Big|_{W_T^*}, \quad \Phi_R = \frac{|\partial \varphi_{N+1} / \partial W_R|}{\varphi_N} \Big|_{W_R^*} \quad (5)$$

Значения Φ_T, Φ_R (5) при $n=2$ (основная мода) и $N=10$ в зависимости от значений W_T^* (соответствующие значения W_R^* определяются из фиг. 1) и параметра μ приведены на фиг. 2 и 3 (соответственно для идеальной и маловязкой жидкости). Сплошная линия соответствует значениям Φ_T , штриховая — Φ_R , кривые 1, 2 построены для $\mu = 0,9; 0,99$.

Во избежание ощутимых погрешностей, при расчетах по (4) рекомендуется использовать значения $\delta_T, \delta_R < 10^{-3}$. В заключение отметим, что разложение (4) позволяет приближенно

рассчитывать собственные частоты жидких слоев с $\mu \leq 0,99$ при переходе к электрогидродинамической неустойчивости любой моды с $n \geq 2$. Такой расчет требует вычисления соответствующих определителей и их производных в критических точках W_T^* и W_R^* .

Приложение

Первые члены разложения параметра $\Omega_n^2 = \Omega_n^2(W_T, W_R)$ в ряд в окрестности нуля по степеням отклонений W_T, W_R от критических значений имеют вид

$$\Omega_n^2|_0 = \frac{\partial \Omega_n^2}{\partial W_T} \Big|_{\Omega_n^2=0} (W_T - W_T^*) + \frac{\partial \Omega_n^2}{\partial W_R} \Big|_{\Omega_n^2=0} (W_R - W_R^*) + \dots$$

Используя правило дифференцирования неявной функции, а также определение параметров δ_T и δ_R , получаем

$$\Omega_n^2|_0 = - \frac{\partial F_{N+1}/\partial W_T}{\partial F_{N+1}/\partial(\Omega_n^2)} \Big|_{\Omega_n^2=0} \delta_T - \frac{\partial F_{N+1}/\partial W_R}{\partial F_{N+1}/\partial(\Omega_n^2)} \Big|_{\Omega_n^2=0} \delta_R \quad (\text{П.1})$$

Из (2) следует

$$\frac{\partial F_{N+1}}{\partial W_T} \Big|_{\Omega_n^2=0} = \frac{\partial \varphi_{N+1}}{\partial W_T} \Big|_{W_T^*}, \quad \frac{\partial F_{N+1}}{\partial W_R} \Big|_{\Omega_n^2=0} = \frac{\partial \varphi_{N+1}}{\partial W_R} \Big|_{W_R^*} \quad (\text{П.2})$$

$$\frac{\partial F_{N+1}}{\partial(\Omega_n^2)} \Big|_{\Omega_n^2=0} = -\varphi_N$$

Учитывая, что $\Omega_n^2(W_T, W_R)$ (а следовательно, и $\varphi_{N+1}(W_T, W_R)$) — убывающая функция параметров W_T, W_R , и подставляя (П.2) в (П.1), получим

$$\Omega_n^2|_0 = - \frac{|\partial \varphi_{N+1}/\partial W_T|}{\varphi_N} \Big|_{W_T^*} \delta_T - \frac{|\partial \varphi_{N+1}/\partial W_R|}{\varphi_N} \Big|_{W_R^*} \delta_R$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев А. И., Дорошенко Д. Н. Об устойчивости заряженной жидкой капли с твердым сферическим ядром // Журн. техн. физики. 1986. Т. 56. № 11. С. 2091—2098.
2. Григорьев А. И., Дорошенко Д. Н. Критические условия неустойчивости водяной пленки на поверхности неподвижной заряженной тающей градины во внешнем электрическом поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 10—15.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.; Л.: Гостехиздат, 1944. 624 с.
5. Григорьев А. И., Синкевич О. А. К механизму неустойчивости капли жидкости в электрическом поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10—15.
6. Lamb H. Hydrodynamics. N. Y.: Dover publ., 1945. 738 p.

Ярославль
Москва

Поступила в редакцию
5.VII.1991