МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1992

УДК 533.69.04+517.54

© 1992 г. Ф. Г. АВХАДИЕВ, А. М. ЕЛИЗАРОВ, Д. А. ФОКИН

МАКСИМИЗАЦИЯ КРИТИЧЕСКОГО ЧИСЛА МАХА ДЛЯ НЕСУЩИХ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ

Одна из важных задач теории течений газа около тел заданной формы состоит в определении диапазона изменения числа Маха M_∞ набегающего потока, при котором течение остается всюду дозвуковым. Верхняя граница M^* этого диапазона называется критическим числом Маха и служит параметром, по которому оценивают аэродинамические характеристики околозвуковых крыловых профилей. При $M_\infty \leq M^*$ для них по самому определению числа M^* коэффициент волнового сопротивления $C_x = 0$.

Критическое число Маха определяется формой обтекаемого профиля. Поэтому представляет интерес оценка M^* для различных классов профилей и нахождение конфигураций, которые обтекаются дозвуковым потоком с максимально возможным M_∞.

Форма плоских и пространственных тел, удовлетворяющих ряду геометрических ограничений и обтекаемых с максимальным M^* идеальным газом, изучена лишь в симметричном случае. В [1] рассмотрены конфигурации, имеющие фиксированную длину и плоскость или ось симметрии, параллельную скорости набегающего потока. В качестве геометрических ограничений задаются минимально допустимое значение толщины и объем тела (в плоском случае — площадь). Рассмотрен также случай, когда при фиксированной площади задана часть контура, например носовой и кормовой участки. Образующие оптимальных конфигураций состоят из горизонтальных торцов или заданных участков контура и гладко стыкующихся с ними линий тока, на которых число Маха $M = 1$.

В [2] с использованием вариационного принципа [3] численно построен класс оптимальных по M^* симметричных профилей, имеющих заданную площадь и фиксированные носовой и кормовой участки контура. Метод решения основан на минимизации соответствующего функционала в результате последовательности решений прямых задач. В работе [4] построено осесимметричное (в плоском случае — симметричное) тело фиксированной длины, реализующее максимум M^* при заданной максимальной толщине и ограничениях снизу на объем или площадь. В отличие от [1, 2] образующие оптимального тела наряду с торцами и заданными участками могут содержать отрезки горизонталей.

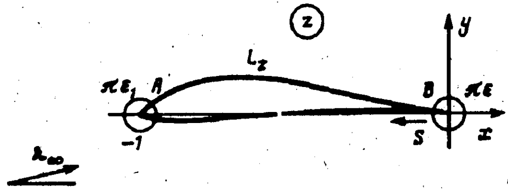
В [5] с использованием проекционно-оптимизационного метода [6] численно построены контуры симметричного ненесущего и несущего крыловых профилей, имеющих при заданных геометрических ограничениях повышенное критическое число Маха.

Оценка M^* в зависимости от геометрических характеристик выбранного класса профилей получена лишь в [7] (описание этого результата содержится также в [8, с. 90]). Рассмотрено множество симметричных профилей с острой передней кромкой, у которых угол наклона касательной к контуру ограничен числом $\pi/(2\omega)$, $\omega > 1$. Указанная оценка имеет вид $M^* < C^{1/(\omega+1)}$, где постоянная $0 < C < 1$ и однозначно определяется уравнением контура.

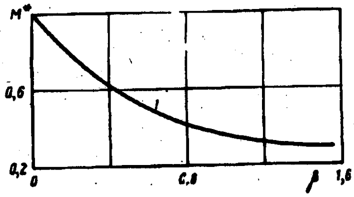
В настоящей работе в рамках приближенного метода Чаплыгина задача максимизации M_∞ для выбранного класса несущих крыловых профилей сведена к минимаксной задаче специального вида. Построено точное решение последней задачи для расширенного класса течений, включающего неоднолистные. Указаны профили, имеющие повышенное в сравнении с известными критическое число Маха.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскопараллельное установившееся плавное дозвуковое адиабатическое течение идеального газа со скоростью λ_∞ на бесконечности вокруг непроницаемых профилей (фиг. 1), имеющих единичную хорду и фиксированное значение β теоретического угла атаки, $0 \leq \beta \leq \pi/2$. В дальнейшем все скорости будем относить к критической скорости a_*.

Рассматриваемые профили ограничены замкнутыми кусочно-гладкими контурами L_z, имеющими острые кромки A и B с внешними углами $\pi\varepsilon_1$ и



Фиг. 1



Фиг. 2

$\pi\varepsilon$ соответственно, $1 \le \varepsilon_1, \varepsilon \le 2$. В этих кромках расположены передняя и задняя критические точки потока. Система координат выбрана так, что ее начало совпадает с точкой B, а ось абсцисс направлена вдоль хорды.

Для указанного класса профилей требуется найти такое значение $\lambda^* = \lambda^*(\beta)$, что при всех $\lambda_\infty > \lambda^*$ не существовал профиль, обтекаемый дозвуковым потоком, т. е. для всех профилей нарушалось условие $\lambda_{\max} \le 1$, где $\lambda_{\max}$ — максимальное значение скорости на профиле.

Установившееся дозвуковое адиабатическое течение идеального газа описывается уравнениями Чаплыгина [8]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \sqrt{K}\,\frac{\partial\psi}{\partial S}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial S} = -\sqrt{K}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{1.1}$$

где φ — потенциал скорости, ψ — функция тока, S однозначно связана с величиной λ скорости потока, θ — аргумент вектора скорости, $K = K(S)$. Точное решение поставленной задачи весьма сложно. В целях упрощения используем приближенную модель дозвукового течения газа, основанную на предложенной С. А. Чаплыгиным замене $K \equiv 1$. В этом случае, как следует из (1.1), функция Жуковского $\chi = S - i\theta$ является аналитической функцией комплексного переменного $w = \varphi + i\psi$, причем S и λ связаны формулой

$$S = \ln\left[\frac{2\lambda}{1 + \sqrt{1 + 4c^2\lambda^2}}\right] \tag{1.2}$$

Здесь c^2 — положительная постоянная, выбираемая из условия наилучшей линейной аппроксимации адиабаты. В частности, в [9]

$$c^2 = 0{,}296 \quad \text{или} \quad c^2 = \frac{1}{2(\kappa + 1)(1 - \lambda_\infty^2)} \tag{1.3}$$

где κ — показатель адиабаты. Другой способ выбора c^2 предложен в [10]

$$c^2 = (h + 1)\,\frac{\sqrt{h^2 - \lambda_\infty^2} - \sqrt{1 - \lambda_\infty^2}}{4h^2(h - 1)^{2h-1}}, \quad h = \sqrt{\frac{(\kappa + 1)}{(\kappa - 1)}} \tag{1.4}$$

Описанная модель, называемая обычно газом Чаплыгина, обеспечивает удовлетворительную точность при расчете поля скоростей λ в дозвуковой области. Однако переход к газу Чаплыгина, согласно [9], дает погрешность при вычислении по λ чисел Маха М, поскольку формально для газа Чаплыгина число Маха не достигает единицы. Поэтому в приближении Чаплыгина обычно определяют только скорость λ, а затем М вычисляют по формуле

$$M = \sqrt{\lambda\left(-\frac{1}{h^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{h^2}\right)} \tag{1.5}$$

В этом случае максимизация M^* для выбранного класса профилей эквивалента максимизации величины λ_∞ скорости набегающего потока при условии, что скорость на профиле не превосходит единицы.

Сведем рассматриваемую задачу к вариационной. В силу наложенных выше ограничений каждому профилю рассматриваемого класса при обтекании газом Чаплыгина однозначно соответствует распределение $\lambda(s)$ величины скорости на контуре, имеющее вид

$$\lambda(s) = |s - s_*|^{(2/\varepsilon_1)-1}[(1-s)s]^{(2/\varepsilon)-1}\lambda_0(s), \quad 0 \le s \le 1$$

где s — дуговая абсцисса контура L_z, отнесенная к его периметру и отсчитываемая от $s = 0$ в задней кромке B до $s = 1$ в ней же так, что область течения остается слева, s_* — абсцисса точки A разветвления потока, $\lambda_0(s)$ — положительная непрерывная функция. Это соответствие можно описать, воспользовавшись интегральным представлением решения обратной краевой задачи аэрогидродинамики для газа Чаплыгина [11]. Координаты L_z определяются параметрическими формулами

$$x(\gamma) + iy(\gamma) = iu_0 \exp(iC_0) \int_0^{\gamma} \{\exp[-\chi(e^{i\tau})]H(e^{i\tau})e^{i\tau} +$$

$$+ c^2 \exp\overline{[\chi(e^{i\tau})]}\,\overline{H(e^{i\tau})}e^{-i\tau}\}d\tau, \qquad 0 \le \gamma \le 2\pi \tag{1.6}$$

$$H(\zeta) = e^{-i\beta}\left(1 - \frac{e^{2i\beta}}{\zeta^2} + \frac{e^{2i\beta}-1}{\zeta}\right), \quad \chi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}d\gamma$$

Постоянная u_0 в (1.6) задает линейный масштаб и определяется из условия равенства хорды профиля единице. Величина C_0 фиксируется так, чтобы направление оси абсцисс совпало с хордой профиля. Отметим, что функция $S(\gamma)$ связана с распределением $\lambda(s)$ формулой

$$\lambda\,[s(\gamma)] = e^{S(\gamma)}\,[1 - c^2e^{2S(\gamma)})]^{-1} \tag{1.7}$$

где $s(\gamma)$ легко находится из (1.6).

Контур профиля будет замкнутым тогда и только тогда, когда выполняются условия [12]

$$\int_0^{2\pi} S(\gamma)e^{i\gamma}d\gamma = \frac{2\pi i e^{i\beta}\sin\beta}{\sqrt{1+4c^2\lambda_\infty^2}} \tag{1.8}$$

Величина скорости набегающего потока определяется по $S(\gamma)$ из соотношения

$$T \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\gamma)d\gamma = \ln F(\lambda_\infty), \quad F(\lambda_\infty) = \ln\frac{2\lambda_\infty}{1+\sqrt{1+4c^2\lambda_\infty^2}} \tag{1.9}$$

При $c^2 = \text{const}$ функция $F(\lambda_\infty)$ строго возрастает на интервале (0,1). Далее, в силу (1.2) и (1.7) течение вокруг профиля будет всюду дозвуковым, если $\lambda[s(\gamma)] \le 1$, т.е.

$$S(\gamma) \le A_0(c^2), \qquad A_0(c^2) = \ln\left\{\frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c^2}\right\} \tag{1.10}$$

Итак, если взять множество управляющих функций $S(\gamma)$, удовлетворяющих условиям (1.8)–(1.10), то каждой из них однозначно соответствует профиль, восстанавливаемый по формуле (1.6). Указанные ограничения на множество управляющих функций не гарантируют простоту контуров L_z, поэтому формула (1.6) описывает более широкое, чем исходное, множество течений, включающее и неоднолистные. При соответствующем значении T каждый построенный профиль будет обтекаться дозвуковым потоком газа со скоростью λ_∞ на бесконечности, определяемой из уравнения (1.9). Пусть $c^2 = 0{,}296$. Тогда в силу монотонности функции $F(\lambda_\infty)$ имеем $\lambda_\infty = e^T/(1 - c^2e^{2T})$. Следовательно, задача максимизации λ_∞ в этом случае эквивалентна максимизации функционала T на выбранном множестве функций $S(\gamma)$. При этом условие (1.8) принимает вид

$$\int_0^{2\pi} S(\gamma)e^{i\gamma}\,d\gamma = \pi a(T,\beta), \quad a(T,\beta) = 2ie^{i\beta}\sin\beta\,\frac{1-c^2e^{2T}}{1+c^2e^{2T}} \tag{1.11}$$

Отметим, что функционал T и ограничение (1.10) линейны, однако полученная экстремальная задача является нестандартной, так как правая часть (1.11) нелинейно зависит от максимизируемой величины T.

2. Решение вариационной задачи. Положим $c^2 = 0{,}296$. Равенства (1.9), (1.11) означают фиксацию трех первых коэффициентов в разложении функции $S(\gamma)$ в тригонометрический ряд Фурье. Учитывая это, представим $S(\gamma)$ в виде

$$S(\gamma) = T + \operatorname{Re} F_T(e^{i\gamma}), \quad F_T(\zeta) = \frac{a(T,\beta)}{\zeta} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k\zeta^{-k} \tag{2.1}$$

где F_T — функция, аналитическая в области $|\zeta|>1$. Используя (2.1), запишем ограничение (1.10) в форме

$$T - A_0 + \sup_\gamma \operatorname{Re} F_T(e^{i\gamma}) \le 0 \tag{2.2}$$

Через $K(c_1, d_1)$ обозначим класс функций $f(\gamma)$ из пространства L_2 $[0, 2\pi]$, у которых фиксированы коэффициенты c_1 и d_1 $(c_1^2 + d_1^2 \ne 0)$ в разложении в ряд Фурье, а коэффициент $c_0 = 0$, т. е.

$$f(\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k\gamma + d_k \sin k\gamma)$$

Очевидно, что $\operatorname{Re}F_T(e^{i\gamma})$ принадлежит классу $K(c_1, d_1)$, где $c_1 + id_1 = -i\,|a(T,\beta)|\,e^{i\beta}$. Для решения вариационной задачи потребуется следующее утверждение: для любой функции $f(\gamma)$ из $K(c_1, d_1)$ имеет место точная оценка

$$\sup_\gamma f(\gamma) \ge |a(T,\beta)|/2 \tag{2.3}$$

Это утверждение было доказано на основе принципа Линделефа (см., например, [13]). Отметим, что оценка (2.3) не достигается на классе $K(c_1, d_1)$, но равенство в (2.3) реализуется в пределе при $\eta \to 0$ для функций g_η $g_\eta(\gamma) = \operatorname{Re}G_\eta(e^{i\gamma})$ из $K(c_1, d_1)$, где

$$G_\eta(\zeta) = \frac{ie^{i\beta}|a(T,\beta)|}{\zeta + ie^{i\beta}(1-\eta)}, \quad 1 \ge \eta > 0, \quad |\zeta| \ge 1$$

Покажем, что максимальное значение функционала T является решением T^* уравнения

$$T - A_0 + A(T,\beta) = 0, \quad A(T,\beta) = \frac{|a(T,\beta)|}{2} = \sin\beta\,\frac{1-c^2e^{2T}}{1+c^2e^{2T}} \tag{2.4}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (2.4) имеет единственный корень при любом фиксированном $0 \le \beta \le \pi/2$.

Действительно, предположим, что для некоторой функции $S_1(\gamma)$ функционал T принимает значение $T_1 > T^*$. В силу (2.3) и строгой монотонности по T левой части (2.4) имеем

$$T_1 - A_0 + \sup_\gamma S_1(\gamma) \ge T_1 - A_0 + A(T_1,\beta) > T^* - A_0 + A(T^*,\beta) = 0$$

Пришли к противоречию с ограничением (2.2).

Таким образом, при фиксированном β максимальное значение λ^* скорости набегающего потока, для которого существуют профили с дозвуковым обтеканием, может быть теперь определено так:

$$\lambda^* = e^{T^*}/(1 - c^2e^{2T^*})$$

где T^* — корень уравнения (2.4). Соответственно критическое число M^* определится по λ^* из формулы (1.5). В предельном случае $\beta = 0$ имеем $T^* = A_0$ и, следовательно, $M^* = 1$. Этому случаю соответствует симметричное обтекание отрезка со звуковой скоростью. В общем случае график зависимости $M^* = M^*(\beta)$ для $\kappa = 1{,}4$ изображен линией *1* на фиг. 2. Эта линия позволяет разделить область изменения параметров M_∞, β на две зоны. Если о проектируемом профиле известно, что он должен обтекаться потоком под таким углом β и с таким числом Маха M_∞, что точка (M_∞, β) лежит выше линии *1*, то в рамках принятой модели профиль обязательно будет иметь сверхзвуковую зону. Если точка (M_∞, β) лежит ниже линии *1*, то построение докритического профиля с указанными характеристиками возможно.

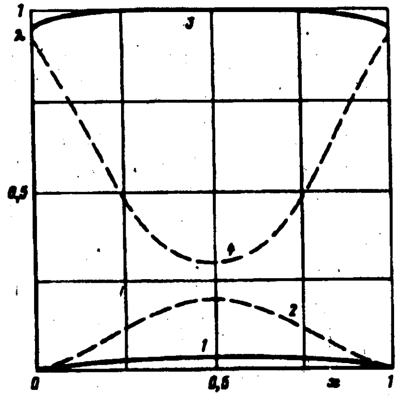
Кратко опишем случай, когда величина c^2 не является постоянной и определяется одной из формул (1.3) или (1.4). В этом случае функция $F(\lambda_\infty)$ в (1.9) имеет максимум в некоторой точке λ_0 и является строго возрастающей лишь при $0 \le \lambda_\infty \le \lambda_0$. При $\kappa = 1{,}4$ имеем соответственно для зависимостей (1.3) и (1.4) $\lambda_0 = 0{,}80275$ и $0{,}85975$. Поэтому проведенные в разд. 3 построения остаются в силе при дополнительном ограничении $0 \le \lambda_\infty \le \lambda_0$. При этом в правых частях (1.10) и (1.11) в выражение $c^2(\lambda_\infty)$ нужно подставить $\lambda_\infty = F^{-1}(e^T)$, где F^{-1} — функция, обратная к $F(\lambda_\infty)$ на интервале $0 \le \lambda_\infty \le \lambda_0$. При практическом проектировании, как будет видно ниже, названное дополнительное ограничение имеет место. Далее, при переменной величине c^2 свойство строгой монотонности по T левой части (2.4), существенно использованное при оценке M^*, нарушается. Так, при $0 \le \beta \le \pi/4$ и ограничении $0 \le \lambda_\infty \le \lambda_0$ монотонность имеет место и, следовательно, доказанные утверждения остаются в силе. Но при дальнейшем увеличении β допустимый интервал изменения λ_∞ уменьшается до $0 \le \lambda_\infty \le \lambda_1$, причем для $\beta = \pi/2$ имеем $\lambda_1 = 0{,}74$ и $0{,}79$ для зависимостей (1.3) и (1.4) соответственно. Окончательно для переменной величины c^2 полученные результаты остаются справедливыми при условии, что $0 \le \lambda_\infty \le \lambda_1$.

3. Профили с повышенным критическим числом Маха. Построение дозвуковых профилей для значений M_∞, близких к максимально возможному значению $M^*(\beta)$ представляет практический интерес. Как уже было отмечено выше, при нахождении $M^*(\beta)$ не учитывались условия самонепересекаемости контура L_z. Расчеты показали, что при приближении M_∞ к $M^*(\beta)$ дозвуковое обтекание возможно лишь для неоднолистных профилей. Приведем один такой пример.

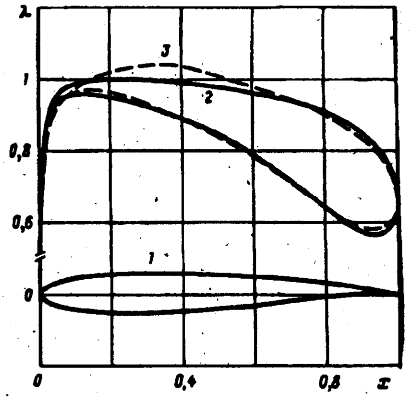
Положим $c^2 = 0{,}296$, $\varepsilon_1 = \varepsilon = 2$ (кромки A и B — бесконечно тонкие) и возьмем $S(\gamma)$ в виде

$$S(\gamma) = S_\eta(\gamma) \equiv T + g_\eta(\gamma) \tag{3.1}$$

Такой выбор функции $S(\gamma)$ объясняется тем, что при $\eta \to 0$, как указано выше, $S_\eta(\gamma)$ стремится к функции $S_0(\gamma)$, для которой $M_\infty = M^*(\beta)$. Значение T и соответствующую величину M_∞ найдем из условия $\max_\gamma S_\eta(\gamma) = A_0$, эквивалентного уравнению $T - A_0 + 2A(T,\beta) / (2-\eta) = 0$. На фиг. 3 представлен неоднолистный профиль, построенный по формулам (1.6) для функции $S_\eta(\gamma)$ вида (3.1) при $\eta = 0{,}3$, $\beta = 0{,}17$ ($10°$) (линии *1* и *2* — соответственно верхняя и нижняя поверхности). Хордовая диаграмма скорости $\lambda(x)$ изображена линиями 3 и 4 на той же фиг. В этом примере $M_\infty = 0{,}78$, что лишь на 3,7% меньше максимально возможного значения $M^*(0{,}17) = 0{,}81$. Расчеты показали, что при уменьшении η нижняя поверхность профиля все выше поднимается над верхней. Значение M_∞ при этом, естественно, приближается к экстремальному. Таким образом, точкам, расположенным в нижней полуокрестности линии *1* на фиг. 2,



Фиг. 3



Фиг. 4

соответствуют физически нереализуемые решения. Поэтому естественно попытаться найти однолистные профили с повышенным критическим числом Маха за счет аппроксимации $S_0(\gamma)$ функциями из некоторого многопараметрического семейства. Приведем один из вариантов реализации этой идеи.

Возьмем $S(\gamma)$ в виде

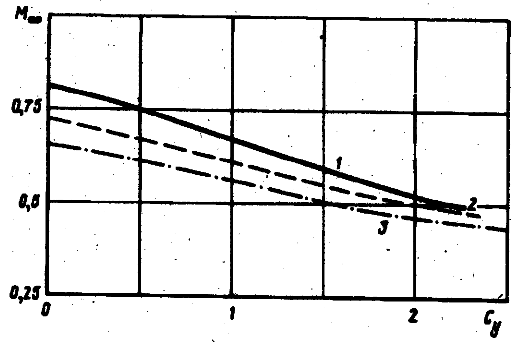
$$S(\gamma) = S_\eta(\gamma; \rho_1, \rho_2) \equiv$$

$$\equiv T + g_\eta(\gamma) + \mathrm{Re}\left[(2-\varepsilon)\ln\frac{\zeta-1}{\zeta-\rho_2} + (2-\varepsilon_1)\ln\frac{\zeta+e^{2i\beta}}{\zeta+\rho_1 e^{2i\beta}}\right]\Big|_{\zeta=e^{i\gamma}} \qquad (3.2)$$

где $1 > \rho_1 > 0$, $1 > \rho_2 > 0$. Параметры ρ_1, ρ_2 позволяют влиять соответственно на толщину передней и задней кромок. При $\rho_1 \to 1$ и $\rho_2 \to 1$ функция (3.2) неограниченно приближается к функции (3.1) по норме пространства L_2. Положим $c^2 = 0{,}296$, $\varepsilon_1 = 1$ (передняя кромка A — закругленная), $\varepsilon = 2$ (задняя кромка B бесконечно тонкая) и выберем $\eta = 0{,}3$, $\beta = 0{,}05$ (3°), $\rho_1 = 0{,}8$. Величину T и соответствующее значение M_∞ найдем из условия $\max \lambda(\gamma) = 1$.

На фиг. 4 представлен профиль *1* с относительной толщиной $t = 10{,}9\%$, построенный описанным способом. Распределение скорости $\lambda(x)$ на его поверхности изображено сплошной линией *2*. Рассчитанные значения коэффициента подъемной силы $C_y = 0{,}368$, угла атаки $\alpha = -1{,}06°$, $M_\infty = 0{,}75$. Профиль имеет характерный для известных околозвуковых профилей протяженный участок постоянной скорости на верхней поверхности и «подрезку» около задней кромки на нижней поверхности. Для проверки результатов проектирования при $M_\infty = 0{,}75$ и $\alpha = -1{,}06°$ был проведен расчет обтекания построенного профиля в рамках адиабатического течения идеального газа по программе, разработанной в [14]. Рассчитанное распределение скорости (штриховая линия *3* на фиг. 4) незначительно отличается от исходного. Величина C_y получилась равной 0,389. Отметим, что $\lambda_{max} = 1{,}05$, т. е. на профиле имеется небольшая сверхзвуковая зона. Однако, как следует из представленных результатов, обтекание профиля — безударное. Таким образом, профиль, соответствующий функции $S(\gamma)$ вида (3.2), обладает высоким значением M_∞, причем его характеристики подтверждены в результате решения прямой задачи.

Интересным представляется более подробное изучение свойств профилей выделенного класса. Далее будем полагать $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon = 2$. В этом случае



Фиг. 5

формула (3.2) определяет семейство профилей, зависящее от трех параметров: β, η и ρ_1. С практической точки зрения для проектирования околозвуковых профилей важно выявить зависимости между параметрами M_∞,C_y и t, имеющими физический смысл. Серии расчетов позволили построить диаграммы зависимости M_∞ от C_y для различных значений t. Некоторые из них представлены на фиг. 5, где линии 1—3 соответствуют значениям $t = 10$, 20 и 30%. Эти диаграммы дают возможность для фиксированной толщины t и заданного C_y найти максимальное значение M_∞, которое может быть реализовано для профилей рассматриваемого класса при условии их дозвукового обтекания. Например, для $t = 13\%$, $C_y = 0$ из соответствующей диаграммы находим $M_\infty = 0{,}808$. Для сравнения: один из известных безударных симметричных профилей [15] с $t = 13\%$ при $M_\infty = 0{,}8$ обтекается уже трансзвуковым потоком.

Приведенное и другие сопоставления показывают, что рассматриваемые профили имеют повышенное критическое значение M_∞. Следовательно, построенные диаграммы можно использовать для оценки критического числа M^*, достижимого на реальных профилях. Профили представленного класса могут быть взяты за основу при проектировании высокоскоростных безударных профилей.

Авторы благодарят Г. Ю. Степанова за внимание к работе и ценные замечания и Ю. Б. Лифшица за помощь в проведении расчетов трансзвукового обтекания построенных профилей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gilbarg D., Shiffman M.* On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. 1 // J. Ration. Mech. and Analysis, 1954. V. 3. № 2. P. 209—230.
2. *Брутян М. А., Ляпунов С. В.* Оптимизация формы симметричных тел с целью увеличения критического числа Маха // Уч. зап. ЦАГИ. 1981. Т. 12. № 5. С. 10—22.
3. *Брутян М. А., Ляпунов С. В.* Вариационный метод решения задач со свободными линиями тока // Уч. зап. ЦАГИ. 1981. Т. 12. № 1. С. 11—18.
4. *Крайко А. Н.* Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 941—950.
5. *Аульченко С. М.* Метод оптимизации профилей в дозвуковом потоке идеального газа: Препринт № 30. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1987. 44 с.
6. *Аульченко С. М., Латыпов А. Ф., Яненко Н. Н.* Применение проекционного метода для построения контура тела минимального сопротивления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 108—113.
7. *Loewner C.* Some bounds for the critical free stream Mach number of a compressible flow around an obstacle // Studies in Math. and Mech. N. Y.: Acad. press. 1954. P. 177—183.
8. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 208 с.
9. *Степанов Г. Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
10. *Христианович С. А., Юрьев И. М.* Обтекание крылового профиля при докритической скорости потока // ПММ. 1947. Т. 11. № 1. С. 105—118.
11. *Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В.* Построение крыловых профилей

методом квазирешений обратных краевых задач // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 5—13.

12. *Ильинский Н. В., Поташев А. В., Фокин Д. А.* Построение крыловых профилей в дозвуковом потоке газа методом квазирешений обратных краевых задач // Уч. зап. ЦАГИ. 1989. Т. 20. № 4. С. 98—101.
13. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
14. Лифшиц Ю. Б., Шагаев А. А. Проекционно-сеточная схема для расчета обтекания профиля трансзвуковым потоком // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1988. Т. 28. № 8. С. 1163—1176.
15. *Garabedian P. R., Korn D. G.* Numerical design of transonic airfoils // Numerical Solution of Partial Differential Equation. II. N. Y.: Acad. press, 1971. P. 253—271.

Казань

Поступила в редакцию
25.VII.1990