МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1992

УДК 532.614:537.29

 В. Л. ОСТРОВСКИЙ

# СТАТИСТИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ РЕЛЬЕФА ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Заряженная поверхность жидкого диэлектрика при достижении критического значения плотности заряда претерпевает фазовый переход из плоского в деформированное состояние [1, 2]. Первоначальный интерес к проблеме перестройки поверхности стимулировался экспериментами на криожидкостях, в частности на жидком $^4$He [3]. В работах [4, 5] теоретически показано, что с достижением критического заряда поверхностная конфигурация должна меняться скачкообразно. Данный вывод хорошо подтверждается [3, 6] в отношении криожидкостей в силу характерной для них узости интервала значений заряда, в котором могут быть существенны тепловые флуктуации рельефа.

В настоящее время класс диэлектрических жидкостей, в которых наблюдается перестройка поверхности, значительно расширился [7] и охватил ситуации, когда явление происходит при температуре порядка комнатной и выше. В этих условиях картина перехода имеет существенные особенности. Так, например, в двумерном случае не реализуется жесткий режим самовозбуждения деформации. Последняя постепенно накапливается по мере увеличения заряда путем монотонного возрастания числа уединенных неупорядоченно расположенных лунок. Средняя плотность лунок зависит от температуры и заряда. Деформация возникает ниже порога неустойчивости плоской конфигурации поверхности, что свидетельствует о «размытии» точки перехода в результате взаимодействия гидродинамической подсистемы с термостатом.

В настоящей работе для объяснения указанных особенностей предложен флуктуационный механизм зарождения деформации жидкой поверхности. В рамках формализма бесконечномерного фазового пространства построена гамильтонова динамика идеальной жидкости с электрически заряженной свободной поверхностью. В приближении «мелкой воды» найдены решения нелинейных гамильтоновских уравнений, описывающих эволюцию свободной поверхности. Исследованы спектры локализованных одно- и двумерных поверхностных возмущений (уединенных волн), показан их активационный характер и исследована устойчивость. Рассмотрены статистические явления на заряженной жидкой поверхности, имеющие место в присутствии внешнего шума. Существенным при этом является предположение о полной термализации гидродинамической подсистемы, позволяющее ограничиться постановкой и решением задачи в условиях термодинамического равновесия. Механизмы взаимодействия и хаотизации поверхностных волн в настоящей работе не обсуждаются. Статистические свойства системы описываются распределением Больцмана — Гиббса в фазовом пространстве.

Предлагаемый подход имеет феноменологический характер и в принципе может быть обоснован путем решения динамических уравнений электрогидродинамики со случайными источниками в приближении хаотических фаз. Равновесное решение получаемых таким образом кинетических уравнений для линейных волн и используемый здесь статистический метод приводят к одинаковому спектру плотности состояний Рэлея — Джинса. Однако прямой статистический метод, будучи ограниченным равновесной ситуацией, позволяет с единой позиции исследовать статистику как линейных, так и уединенных волн. В работе исследованы критические флуктуации рельефа вблизи порога неустойчивости плоской конфигурации. Изучен отклик поверхности на неоднородное в пространстве внешнее поле и вычислены критические индексы системы.

**1. Обобщенный гамильтонов формализм.** Рассмотрим расположенный на горизонтальной металлической подложке слой идеальной несжимаемой жидкости толщины $h$, свободная поверхность $S$ которого заряжена с плотностью $\sigma$. Как показано в работах [5, 8], состояние жидкости может быть задано с помощью канонически сопряженных координаты $\eta(\mathbf{r},t)$, описывающей отклонение $S$ от плоскости $xy$, и импульса $\pi(\mathbf{r},t)$, который с точностью до множителя совпадает с гидродинамическим потенциалом на $S$. Здесь

$\mathbf{r} = (x, y)$ — двумерный вектор в плоскости $xy$. Ось $z$ перпендикулярна слою. Введем бесконечномерное фазовое пространство Г системы. Гамильтониан жидкости $W[\eta,\pi]$ представим в виде

$$W[\eta, \pi] = K[\eta, \pi] + U[\eta] \tag{1.1}$$

$$K[\eta, \pi] = \frac{1}{2\rho} \iint \pi(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 G_3(s, s')}{\partial \nu \partial \nu'} \pi(\mathbf{r}')\, ds\, ds'$$

Здесь $K$ — кинетическая энергия; $\rho$ — плотность жидкости; $s$, $s'$ — точки поверхности $S$, отвечающие векторам $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$; $ds$ — дифференциал поверхности, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ — двумерный градиент, $G_3(s, s')$ — функция Грина 3-й краевой задачи [9] (со смешанными граничными условиями $G_3|_S = 0$, $(\partial G_3/\partial z)|_{z=-h} = 0$) для уравнения Лапласа; $\partial/\partial\nu$ — производная вдоль нормали к $S$,

$$U[\eta] = \frac{\rho g}{2} \int \eta^2\, d\mathbf{r} + \alpha \int ds + \frac{\varepsilon\varphi^2}{8\pi} \int\int \frac{\partial^2 G_1(s, s')}{\partial \nu\, \partial \nu'}\, ds\, ds' \tag{1.2}$$

— потенциальная энергия; $g$ — ускорение свободного падения, $\alpha$ — коэффициент поверхностного натяжения, $\varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость жидкости, $\varphi = 4\pi\sigma h/\varepsilon$ — электрический потенциал $S$, $G_1(s, s')$ — функция Грина 1-й краевой задачи (Дирихле) для уравнения Лапласа. Последнее слагаемое в (1.2) описывает электрическую часть энергии системы в предположении применимости металлического приближения [10].

Вычисление явной зависимости гамильтониана (1.1) от обобщенной координаты $\eta(\mathbf{r})$ может быть выполнено с помощью разложения $G_1(s,s')$, $G_3(s,s')$ в ряд в соответствии с теорией возмущений [11—13]. В качестве малых параметров, оправдывающих разложение функций Грина, выступают отношения $a/h$, $a/\lambda$, где а, $\lambda$ — соответственно характерные амплитуда и длина волны деформации. Смысл введенных параметров требует пояснения. Дело в том, что в силу кулоновского характера электрического взаимодействия $W[\eta, \pi]$ не ограничен снизу на всем Г. Действительно, всегда существуют такие конфигурации $\eta(\mathbf{r}) \sim -h$, для которых электрическая энергия принимает сколь угодно большие отрицательные значения. Тем не менее, как показано ниже, гамильтониан имеет локальный минимум, которому соответствует метастабильное состояние деформированной поверхности. Именно его амплитуда должна быть мала.

Условие несжимаемости жидкости накладывает на систему голономную связь

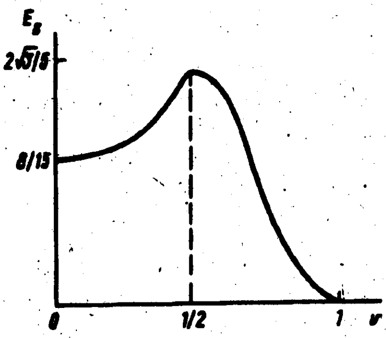
$$\chi[\eta] = 0 \tag{1.3}$$

где $\chi[\eta] = \int\eta(\mathbf{r}, t)d\mathbf{r}$. Следовательно, не все степени свободы независимы и в отсутствие термостата система подчиняется обобщенной гамильтоновой динамике [14]. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\pi}, \quad \frac{\partial\pi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta} \tag{1.4}$$

где $H = W + p\chi$; $p$ — множитель Лагранжа, имеющий смысл давления на $S$. Зависимая переменная вместе с соответствующим ей импульсом могут быть исключены из Г.

**2. Спектр элементарных возбуждений.** Для простоты ограничимся далее рассмотрением тонких слоев жидкости и воспользуемся приближением «мелкой воды», критерием справедливости которого является неравенство $h/\lambda \ll 1$. Тогда, опуская громоздкие промежуточные




выкладки и полагая $p = -2\pi\sigma^2\varepsilon^{-1}$, сразу выпишем гамильтониан $H[\eta, \pi]$, вычисленный с точностью до кубических по $\eta$ и квадратичных по $\pi$ членов

$$H[\eta, \pi] = \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\left\{\frac{h}{\rho}(\nabla\pi)^2 + \left(\alpha - \frac{4\pi\sigma^2 h}{3\varepsilon}\right)(\nabla\eta)^2 + \left(\rho g - \frac{4\pi\sigma^2}{\varepsilon h}\right)\eta^2 + \frac{4\pi\sigma^2}{\varepsilon h^2}\eta^3\right\}$$

Нас будет интересовать докритический случай $\sigma < \sigma_* < \sigma_\alpha$, где $\sigma_* = (\varepsilon\rho g h/4\pi)^{1/2}$, $\sigma_\alpha = (3\alpha\varepsilon/4\pi h)^{1/2}$. Придадим $H[\eta, \pi]$ безразмерную форму, осуществив масштабное преобразование

$$\mathbf{r} = \left(\frac{\beta}{\kappa}\right)^{1/2} h\mathbf{r}', \quad t = \left(\frac{\varepsilon\rho\beta h^2}{4\pi\kappa^2\sigma^2}\right)^{1/2} t', \quad \eta = \kappa h\eta', \quad \pi(\mathbf{r}) = \left(\frac{4\pi\beta\rho}{\varepsilon}\right)^{1/2}\kappa h\sigma\pi'(\mathbf{r}'),$$

$$\kappa = \left[\left(\frac{\sigma_*}{\sigma}\right)^2 - 1\right], \quad \beta = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}\right)^2 - 1\right]$$

$$H[\eta, \pi] = \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\left\{(\nabla\pi)^2 + (\nabla\eta)^2 + \eta^2 + \eta^3\right\} \tag{2.1}$$

(штрихи при новых переменных опущены).

Безразмерное уравнение движения поверхности, вытекающее из (1.4), имеет вид

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \Delta\left(-\Delta\eta + \eta + \frac{3}{2}\eta^2\right), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.2}$$

и получено в работах [11—13] прямыми методами гидродинамики.

Закон дисперсии волн бесконечно малой амплитуды (риплонов) определяется из линеаризованного уравнения (2.2) и имеет вид

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 + \mathbf{k}^4, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y) \tag{2.3}$$

Как показано в [13], при $\kappa, \beta > 0$ единственными нетривиальными решениями динамического уравнения поверхности конечной амплитуды являются квазиодномерная и двумерная уединенные формы рельефа. Рассмотрим их последовательно.

В одномерном случае имеем следующее солитонное решение с плотностью энергии $E_s(v)$ на единицу длины в поперечном направлении и скоростью $v$:

$$\eta_s(x, t) = (v^2 - 1)\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}(1 - v^2)^{1/2}(x - vt)\right], \quad |v| \le 1$$

$$E_s(v) = \frac{8}{15}(1 + 4v^2)(1 - v^2)^{3/2}$$

Зависимость $E_s(v)$ немонотонна (см. фигуру) и имеет минимумы при $v = 0$ и $v = 1$, разделенные барьером при $v = 1/2$, равным $E_s(1/2) - E_s(0) = (6\sqrt{3} - 8)/15$. Вблизи $v = 0$ спектр $E_s(v)$ аппроксимируется выражением $E_s(0) + (4v^2/3)$, где $E_s(0) = 8/15$ — плотность энергии активации неподвижного локализованного возмущения поверхности. Полная энергия одномерного солитона, очевидно, макроскопически велика.

Обсудим далее свойства двумерных локализованных возбуждений поверхности. В общем случае уравнение (2.2) не принадлежит классу полностью интегрируемых. В работах [11—13] численно рассчитана форма отрицательного осесимметричного статического решения $\eta_c(|\mathbf{r}|)$ уравнения (2.2), монотонно убывающего на бесконечности (неподвижная многоэлектронная лунка). Движение лунки в случае ее малой скорости ($|\mathbf{v}| \ll 1$)

можно исследовать методом теории возмущений. Энергия движущейся лунки конечна и в первом порядке теории возмущений равна

$$E(v) = E(0) + \frac{1}{2} M v^2, \quad v = |\mathbf{v}|$$

$$E(0) = -\frac{1}{4} \int d\mathbf{r}\, \eta_c^3(|\mathbf{r}|) \approx 3{,}5$$

$$M = \frac{1}{4\pi} \int\int d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}' \, (\nabla\eta_c(|\mathbf{r}|) \quad \nabla\eta_c(|\mathbf{r}'|)) \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$$

— эффективная масса лунки [6]. В обратном предельном случае $v \to 1$ имеем $E(v) \to 0$ и, следовательно, спектры $E_s(v)$ и $E(v)$ в одно- и двумерном случаях по форме подобны. Исследуем устойчивость медленно движущейся лунки, приняв в качестве конфигурации нулевого приближения статическую, т. е. положим $\eta(\mathbf{r}, t) = \eta_c(|\mathbf{r}|) + u(\mathbf{r}, t)$, где $u(\mathbf{r}, t)$ — малое возмущение. С точностью до квадратичных по $u(\mathbf{r}, t)$ слагаемых гамильтониан (2.1) имеет вид

$$H[\eta, \pi] = E(0) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left\{ (\nabla\pi)^2 + uLu \right\} \tag{2.4}$$

где $L = -\Delta + 1 + 3\eta_c(r)$. Квадратичная форма (2.4) диагонализуется в базисе собственных функций $f_j(\mathbf{r})$ оператора $\Delta \cdot L$. Разложение $u(\mathbf{r}, t)$, $\pi(\mathbf{r}, t)$ в данном базисе запишем в виде

$$\begin{Bmatrix} u(\mathbf{r}, t) \\ \pi(\mathbf{r}, t) \end{Bmatrix} = \sum_j \begin{Bmatrix} u_j \\ \pi_j \end{Bmatrix} f_j(\mathbf{r}) \exp(i\omega_j t) + \text{к. с.} \tag{2.5}$$

Собственные значения $\omega_j^2$ квадратичной части гамильтониана определяются формулой

$$\omega_j^2 = \int d\mathbf{r} f_j^*(\mathbf{r})\, L f_j(\mathbf{r}) \cdot \left\{ \int d\mathbf{r}\, |\Delta^{-1/2} f_j(\mathbf{r})|^2 \right\}^{-1}$$

где $\Delta^{-1/2}$ — дробная степень лапласиана. Лунка устойчива, если $\omega_j^2 \geq 0$ для любого $j$.

Это условие эквивалентно неотрицательной определенности (на пространстве функций, удовлетворяющих условию несжимаемости жидкости, $\int f_j d\mathbf{r} = 0$ или $\int f_j d\mathbf{r} \neq 0$, $\omega_j = 0$) оператора $L$, который совпадает по форме с двумерным оператором Шредингера для частицы, движущейся в аксиально симметричном поле $1 + 3\eta_c(|\mathbf{r}|)$. Оператор $L$ имеет как непрерывный спектр (собственные значения $L_k = 1 + k^2$, отвечающие плоским волнам), так и дискретный. Классификацию состояний последнего удобно проводить с помощью радиального числа $n_r$ и проекции $m$ момента импульса на ось симметрии $O_z$ (собственные значения обозначаются $L_{n_r m}$) [15]. Прямое вычисление позволяет указать двукратно вырожденное возбужденное состояние дискретного спектра с числами $n_r = 0$, $|m| = 1$ (трансляционная мода $\partial\eta_c/\partial x, \partial\eta_c/\partial y$) для которого $L_{01} = 0$. Отсюда следует, что только $L_{00} < 0$, но функция с $n_r = 0$, $m = 0$ не имеет узлов и должна быть отброшена как не удовлетворяющая условию несжимаемости. «Опасной» могла бы стать некоторая линейная комбинация функций с $n_r = 0$, $m = 0$ и $n_r \neq 0$, $m = 0$, для которой условие несжимаемости выполнено. Покажем, однако, что оператор $L$ вообще не имеет возбужденных связанных состояний с $m = 0$. Для этого используем метод Швингера [16], который приводит к следующей оценке числа $d_0$ возбужденных состояний с $m = 0$:

$$d_0 \leq 3 \int_0^\infty dr r \eta_c(r) \ln r$$

Численный расчет дает $d_0 < 1$. Следовательно, медленно движущаяся лунка устойчива по отношению к бесконечно малым возмущениям. Дополнительно отметим, что численно можно также показать отсутствие иных связанных состояний оператора $L$, кроме указанных выше.

Таким образом, спектр $\omega_j^2$ состоит из непрерывного континуума (2.3), отвечающего риплонам, рассеянным на лунке, и дискретного значения $\omega_{tr} = 0$, соответствующего трансляционной моде. Присутствие последней объясняется трансляционной инвариантностью задачи, так как перемещение равномерно движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ лунки на малом интервале времени $t$ можно описать как возмущение вида

$$\delta\eta(\mathbf{r}, t) = \eta_c(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) - \eta_c(\mathbf{r}) \approx -t(\mathbf{v}\cdot\nabla\eta_c)$$

Трансляционная мода вносит в гамильтониан вклад $Mv^2/2$.

Значению $\omega = 0$ отвечает также предельная при $k \to 0$ мода непрерывного спектра, которая не вносит вклада в энергию и ввиду условия связи (1.3) динамической переменной не является. Это означает, что при появлении на поверхности локальной деформации уровень жидкости изменяется таким образом, чтобы сохранить постоянство полного объема. Гамильтониан (2.4) удобно записать в виде

$$H[\eta, \pi] = E(v) + \int d\mathbf{k}\, h(\mathbf{k}) \tag{2.6}$$

$$h(k) = \frac{1}{2}\left[k^2 |\pi_\mathbf{k}|^2 + (1 + k^2)\,|u_\mathbf{k}|^2\right]$$

$u_\mathbf{k}$, $\pi_\mathbf{k}$ — коэффициенты (2.5) риплонных мод, совпадающие в отсутствие лунки с фурье-образами функций $u(\mathbf{r}), \pi(\mathbf{r})$. Обобщение (2.6) на случай нескольких лунок приводит к выражению

$$H[\eta, \pi] = \sum_i E(v_i) + \int d\mathbf{k}\, \omega(\mathbf{k})\, n(\mathbf{k}) \tag{2.7}$$

где $n(\mathbf{k}) = h(\mathbf{k})/\omega(\mathbf{k})$ — плотность состояний в континууме. Аналогичное (2.7) представление гамильтониана в одномерном случае не ограничено требованием $|v_i| \ll 1$ ввиду интегрируемости задачи [12, 13].

**3. Среднестатистическая конфигурация поверхности.** В предыдущем разделе показано, что при $\sigma < \sigma_*, \sigma_\alpha$ возбуждение канавок и лунок носит активационный характер. В случае изолированной системы, находящейся при нулевой температуре, поверхность жидкости сохраняет плоскую конфигурацию вплоть до значения $\sigma$, равного критическому. При отличной от нуля температуре ситуация становится качественно иной, так как термостат является источником шума, индуцирующим флуктуации рельефа поверхности. Последние вблизи порога неустойчивости, как показано ниже, критически возрастают. В присутствии шума развитие поверхностной деформации подчиняется законам статистической механики. Взаимодействие гидродинамической подсистемы с термостатом требует модификации формы описания состояния системы. В статистическом подходе двумерные локально устойчивые решения динамических уравнений приобретают смысл метастабильных конфигураций, вносящих основной вклад в функцию распределения $P[\eta, \pi]$, которую в условиях термодинамического равновесия представим в виде

$$P[\eta, \pi] = Z^{-1} \exp\{-\gamma H[\eta, \pi]\}$$

$$Z = \int D\mu(\eta, \pi) \exp\{-\gamma H[\eta, \pi]\}$$

где $Z$ — статистическая сумма, выраженная континуальным интегралом, $D\mu(\eta,\pi)$ — элемент меры в фазовом пространстве, $\gamma^{-1}$ — безразмерная температура. Среднее значение некоторой наблюдаемой $A\,[\eta,\pi]$ определяется формулой

$$\langle A\rangle_0 = \int D\mu\,(\eta,\pi)\,A\,[\eta,\pi]\,P\,[\eta,\pi] \qquad (3.1)$$

Индекс ноль в (3.1) указывает на отсутствие сторонних полей. Так как в представлении (2.7) гамильтониан диагонален, то распределение по риплонным модам независимо. Для моды с импульсом k имеем

$$P\,(u_k,\pi_k) = \exp\,[-\gamma h\,(\mathbf{k})]\left\{\int\int du_k\,d\pi_k \exp\,[-\gamma h\,(\mathbf{k})\,]\right\}^{-1} \qquad (3.2)$$

Используя (3.2), находим средние $\langle u_k\rangle_0 = \langle\pi_k\rangle_0 = 0, \langle n(\mathbf{k})\rangle_0 = 1/\gamma\omega(\mathbf{k})$ (распределение Рэлея — Джинса) и одновременный коррелятор

$$\langle u_k u_{k'}\rangle_0 = \frac{\delta\,(\mathbf{k}+\mathbf{k}')}{\gamma\,(1+k^2)}$$

где $\sigma(\mathbf{k})$ — импульсная функция Дирака.Переходя в координатное представление, получаем средние значения соответствующих величин (в размерных единицах)

$$\langle u\,(\mathbf{r},0)\rangle_0 = 0,\quad \Lambda\,(\mathbf{r}) = \langle u\,(\mathbf{r},0)\,u\,(0,0)\rangle_0 \sim K_0\left(\frac{|\mathbf{r}|}{\zeta}\right)$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда, $\zeta$ — корреляционная длина, которая при $\sigma \to \sigma_*$ имеет асимптотику $(\sigma_* - \sigma)^{-1/2}$. Таким образом, критический показатель для $\zeta$ равен 1/2.

Рассмотрим пространственно локализованные моды. Так как энергия одномерного солитона бесконечна, его флуктуационное рождение невозможно. Данный механизм, однако, применим к лункам, которым удобно придать смысл квазичастиц. Число последних не фиксировано, поэтому их совокупность образует большой канонический ансамбль. Среднее число $\langle N\rangle_0$ лунок на поверхности определяется тепловым равновесием, условием которого является минимальность свободной энергии системы $F$ как функции $N$. Отсюда следует равенство нулю химического потенциала $\partial F/\partial N$ квазичастиц. Среднее значение $\langle N(v)\rangle_0$ определяется формулой для термодинамической энергии системы

$$\langle N\,(v)\rangle_0 = \left\{\exp\,[\gamma E\,(v)\,] - 1\right\}^{-1}$$

$$E\,(v)\,\langle N\,(v)\rangle_0 = -\frac{\partial}{\partial\gamma}\ln Z\,(v)$$

$$Z\,(v) = \sum_{N=0}^{\infty}\exp\,[-\gamma N E\,(v)\,]$$

Число лунок $dN$ в элементе фазового объема дается соотношением $dN = \langle N\rangle_0 S dv$. Так как $\gamma E \sim \kappa^2$, то $\langle N\rangle_0$ формально расходится при $\sigma \to \sigma_*$ как $(\sigma_* - \sigma)^{-2}$. Разумеется, последний вывод ограничен условием, что расстояние между лунками должно быть много больше их характерных размеров. В противном случае представление об уединенных невзаимодействующих поверхностных возбуждениях теряет смысл. Оценку относительного температурного уширения области значений, внутри которой «размазан» фазовый переход, можно дать, исходя из критерия $\gamma E(0) \sim 1$. Флуктуация числа лунок равна

$$\frac{\langle N^2\rangle_0}{\langle N\rangle_0^2} - 1 = \frac{1}{\langle N\rangle_0}$$

**4. Обобщенная восприимчивость.** Интерес представляет возможность целенаправленно модулировать пространственное распределение деформации жидкой поверхности внешним неоднородным полем. Пусть на границе жидкость — подложка сторонними силами создана вариация заряда $\delta\sigma(\mathbf{r})$, плавно меняющаяся с координатой. В длинноволновом приближении поправка к энергии первого порядка имеет вид.

$$\delta H = -\frac{8\pi^2\sigma}{\varepsilon}\int \delta\sigma(\mathbf{r})\,\eta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \tag{4.1}$$

Рассмотрим последовательно влияние возмущения (4.1) на локализованные и делокализованные моды деформации. Методы динамического расчета поправок к параметрам уединенных форм по теории возмущений хорошо известны [17]. Новым при статистическом подходе является возмущение функции распределения, отражающее неравновесность системы в присутствии неоднородного внешнего поля. Если пространственный масштаб модуляции заряда велик по сравнению с характерным расстоянием между лунками, то распределение можно считать локально равновесным и среднюю плотность $\langle N(\mathbf{r}, v)\rangle$ определить формулой (3.3) с заменой $E\ (v)$ на $E(\mathbf{r}, v)$, осуществляемой подстановкой $\sigma \to \sigma + \delta\sigma(\mathbf{r})$. В частности, локальная вариация $\delta\langle N(\mathbf{r})\rangle$ числа неподвижных лунок $\langle N(\mathbf{r})\rangle$ описывается тогда формулой

$$\delta\langle N(\mathbf{r})\rangle = \gamma\langle N\rangle_0^2 \exp(\gamma E)\frac{\partial E}{\partial\sigma}\delta\sigma(\mathbf{r}) .$$

Коэффициент пропорциональности между $\delta\langle N\rangle$ и $\delta\sigma$ может быть назван обобщенной восприимчивостью подсистемы лунок. При $\sigma \to \sigma_*$ данная величина имеет асимптотику $(\sigma_* - \sigma)^{-3}$. Возмущение риплонных мод вызвано двумя эффектами: прямым действием внешнего поля на колебания поверхности и перераспределением энергии между риплонами и лунками, движущимися в неоднородном поле. Второй механизм вносит вклад, пропорциональный градиенту $\delta\sigma(\mathbf{r})$, и поэтому содержит по сравнению с первым дополнительную малость. В рамках теории линейного отклика [18] среднее значение $\langle u(\mathbf{r})\rangle$ в присутствии возмущения описывается формулой

$$\langle u(\mathbf{r})\rangle = -\gamma\langle u(\mathbf{r})\,\delta H\rangle_0 \tag{4.2}$$

Подставляя (4.1) в (4.2), находим

$$\langle u(\mathbf{r})\rangle = \frac{8\pi^2\gamma\sigma}{\varepsilon}\int d\mathbf{r}'\Lambda(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta\sigma(\mathbf{r}')$$

Величина $8\pi^2\gamma\sigma\Lambda(\mathbf{r})/\varepsilon$ представляет собой обобщенную восприимчивость риплонной подсистемы и также имеет особенность при $\sigma = \sigma_*$. Существование отклика поверхности на неоднородное внешнее поле подтверждено экспериментально [7].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Френкель Я. И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме//ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 347.
2. *Шлиомис М. И.* Магнитные жидкости//Усп. физ. наук. 1974. Т. 112., № 3. С. 427—458.
3. *Эдельман В. С.* Левитирующие электроны//Усп. физ. наук. 1980. Т. 130. № 4. С. 675—706.
4. *Горьков Л. П., Черникова Д. М.* К вопросу о структуре заряженной поверхности жидкого гелия//Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 18. № 2. С. 119—122.
5. *Кузнецов Е. А., Спектор М. Д.* О существовании гексагонального рельефа на поверхности

жидкого диэлектрика во внешнем электрическом поле//ЖЭТФ. 1976. Т. 71. № 1. С. 262—272.
6. *Шикин В. Б., Лейдерер П.* О колебаниях и устойчивости заряженной поверхности гелия//ЖЭТФ. 1981. Т. 81. № 1. С. 185—201.
7. *Гущо Ю. П.* Фазовая рельефография. М.: Энергия, 1974. 168 с.
8. *Захаров В. Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости//ПМТФ. 1968. № 2. С. 86—94.
9. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. С. 297.
10. *Горьков Л. П., Черникова Д. М.* О режиме развития неустойчивости заряженной поверхности гелия//Докл. АН СССР. 1976. Т. 228. № 4. С. 829—832.
11. *Жакин А. И.* О нелинейных равновесных формах и нелинейных волнах на поверхности феррожидкости (идеального проводника) в поперечном магнитном (электрическом) поле//Магн. гидродинамика. 1983. № 4. С. 41—48.
12. *Жакин А. И.* Нелинейные волны на поверхности заряженной жидкости. Неустойчивость, ветвление и нелинейные равновесные формы заряженной поверхности//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. Вып. 3. С. 94—102.
13. *Жакин А. И.* Нелинейные волны на поверхности слоя жидкого гелия, находящегося в поперечном электрическом поле. Нелинейные равновесные формы//Физика низких температур. 1984. Т. 10. № 3. С. 237—248.
14. *Попов В. Н.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976. Гл. 1. С. 5—19.
15. *Галицкий В. М., Карнаков Б. М., Коган В. И.* Задачи по квантовой механике. М.: Наука, 1981. С. 211.
16. *Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971. С. 24.
17. *Абловиц М. Дж., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. С. 286.
18. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. Гл. 3.

Кишинев

Поступила в редакцию
24.VIII.1989