

УДК 532.546

© 1992 г. Ю. Н. ГОРДЕЕВ

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О РАЗВИТИИ ПРОТЯЖЕННОЙ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В ПРОНИЦАЕМОЙ СРЕДЕ

Рассматривается распространение протяженной трещины гидроразрыва в рамках модели [1, 2] в проницаемой упругой среде под действием закачиваемой в нее вязкой жидкости. Предполагается, что режим движения жидкости разрыва в трещине имеет турбулентный характер. Течение жидкости в пористой среде описывается уравнением упругого режима фильтрации.

В данной работе в квазистационарном приближении и локально одномерном характере утечек [3] получены новые автомодельные решения задачи о гидроразрыве проницаемого пласта с экспоненциальной автомодельной переменной для плоской и осевой симметрий. Решение этой двумерной эволюционной задачи сведено к интегрированию одномерного интегрального уравнения. Анализируются асимптотики решения вблизи скважины и вершины трещины. Обсуждаются трудности использования квазистационарного приближения при решении задач о гидроразрыве проницаемых пластов.

Другие автомодельные решения задачи о распространении плоских трещин гидроразрыва в приближении локально одномерных утечек рассматривались в работах [3, 4], для постоянных вдоль поверхности трещины утечек – в [5–7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим две постановки задачи о гидроразрыве проницаемой среды плоской краевой трещиной и осесимметричной трещиной, находящихся в однородном сжимающем поле напряжений.

Плоская задача. На границе пористого проницаемого полупространства, насыщенного жидкостью, в начальный момент времени ($t=0$) давление жидкости скачком возрастает от порового p° до p_0 , которое затем поддерживается постоянным. Под действием расклинивающего потока жидкости в пористое полупространство от границы начинает распространяться плоская трещина. При этом жидкость фильтруется в пласт как через границу полупространства, так и через берега трещины (фиг. 1, а).

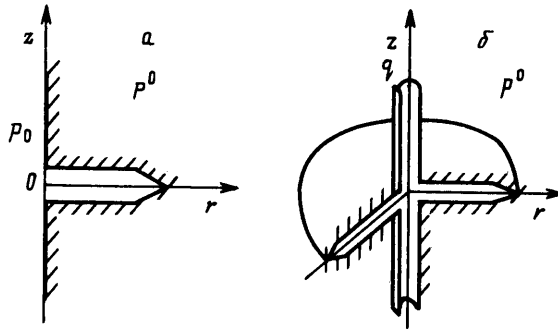
Осесимметричная задача. Пусть в начальный момент времени ($t=0$) в скважину начинает закачиваться жидкость с расходом q . От скважины в проницаемый пласт, насыщенный жидкостью с поровым давлением p° , распространяется осесимметричная трещина гидроразрыва. Через стенки скважины и берега трещины в пласт фильтруется жидкость разрыва (фиг. 1, б).

Рассмотрим случай турбулентного режима движения жидкости разрыва в трещине. Для описания такого течения используем квадратичный закон сопротивления и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} (r^n u w) = -2u_L \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} p = -\lambda_s \frac{\rho_0 u |u|}{w} \quad (1.2)$$

Здесь p – давление жидкости разрыва; $\rho_0 = \text{const}$ – плотность жидкости; u – скорость жидкости разрыва в трещине; u_L – локальная скорость



Фиг. 1

фильтрационных утечек через поверхности трещины; w — раскрытие трещины; n — показатель симметрии задачи ($n=0$ — плоская; $n=1$ — осесимметричная трещина); λ_s — коэффициент гидравлического сопротивления (в общем случае зависит от числа Рейнольдса Re потока и шероховатости берегов трещины; при больших числах Re λ_s становится постоянным).

Предполагается, что фильтрация жидкости в пористой среде описывается уравнением пьезопроводности (κ — коэффициент пьезопроводности)

$$\frac{\partial}{\partial t} p_1 = \kappa \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} p_1 + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial}{\partial r} p_1 \right) \right] \quad (1.3)$$

где $p_1(r, y, t)$ — давление жидкости в пласте; y — координата в направлении, перпендикулярном плоскости трещины.

Длина трещины определяется из критерия разрушения [8]

$$\int_{r_0}^l dr r^n [p(r, t) - p_h] (l^2 - r^2)^{-1/2} = \frac{K_1}{\sqrt{2} l^{1-2n}} \quad (1.4)$$

(p_h — горное давление на глубине h ; K_1 — модуль сцепления породы; $l(t)$ — длина трещины в момент времени t ; $r_0=0$ для $n=0$, $r_0>0$ при $n>0$ — радиус скважины).

Распространение трещины будем рассматривать в квазистационарном приближении, поэтому ее раскрытие дается известным решением Следдона [9], в которое время входит как параметр

$$w(r, t) = \frac{4(1-\nu)l(t)}{\pi G} \int_{\xi=g(t)}^1 \int_0^\theta \frac{[p(\xi, t) - p_h] \xi^n d\xi \theta^{1-n} d\theta}{\sqrt{\theta^2 - \xi^2} \sqrt{\theta^2 - \xi^2}} \quad (1.5)$$

$$\xi = \frac{r}{l(t)}, \quad g(t) = \frac{r_0}{l(t)}$$

(G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона).

Система уравнений (1.1)–(1.5) рассматривалась с начальными и граничными условиями ($0 \leq r \leq l(t)$)

$$p_1(r, y, t=0) = p^0 \quad (1.6)$$

$$p_1(r, y=0, t) = p(r, t), \quad u(r, t) = -\frac{\mu}{k} \frac{\partial}{\partial y} p_1(r, y=0, t) \quad (1.7)$$

$$p(r=0, t) = p_1(r=0, y, t) = p_0 \quad (n=0) \quad (1.8)$$

$$q(t) = 2\pi \lim_{r \rightarrow r_0} r \left\{ -\frac{k}{\mu} \int_{-\lambda_1}^{-\lambda_2} dy \frac{\partial p}{\partial r} + wu \right\} \quad (n=1) \quad (1.9)$$

где h_2 — расстояние до поверхности земли; h_1 — расстояние до дна скважины.

2. Автомодельная задача. В работе [10] показано, что в механике горных пород для сколько-нибудь значительных длин трещин модулем сцепления в выражении (1.4) можно пренебречь, т. е. положить $K_1/\sqrt{2l^{1-2n}} \approx 0$.

Введем безразмерные переменные и параметры по формулам

$$p(r, t) = P_h P(\xi, \tau), \quad p_1(r, y, t) = P_h P(\xi, \eta, \tau) \quad (2.1)$$

$$\xi = \frac{r}{l_0 f(\tau)}, \quad \eta = \frac{y}{y_0}, \quad t = t_0 \tau, \quad \varepsilon = \frac{l_0}{\tau_0 u_0}$$

$$l(t) = l_0 f(\tau), \quad f(\tau=0) = 1, \quad w(r, t) = w_0 f(\tau) W(\xi, \tau)$$

$$u(r, t) = u_0 U(\xi, \tau), \quad u_L(r, t) = u_{L_0} V(\xi, \tau), \quad u_{L_0} = \frac{1}{2} \frac{w_0}{l_0} u_0$$

$$u_0 = \left(\frac{1}{\lambda_s} \frac{w_0 p_0}{l_0 \rho_0} \right)^{1/2}, \quad y_0 = \frac{k p_h}{\mu u_{L_0}}, \quad \tau_0 = \frac{y_0^2}{\kappa}$$

$$w_0 = \frac{4(1-\nu)}{\pi} \frac{h}{G} l_0, \quad N = \frac{p_0}{p_h}, \quad M = \frac{p_0^n}{p_h^n}$$

$$q = q_0 f^2(\tau) Q(\xi, \tau), \quad q_0 = (2\pi)^n u_{L_0} l_0^2, \quad \beta(\tau) = \frac{y_0^2}{(l_0 f(\tau))^2}$$

В безразмерных переменных (2.1) система уравнений (1.1)–(1.5) имеет вид

$$\varepsilon [f W_\tau + f(W - \xi W_\xi)] + \frac{1}{\xi^n} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^n U W) = -V \quad (2.2)$$

$$W P_\xi = -U |U|, \quad V = \frac{\partial}{\partial \eta} P_1(\xi, 0, \tau), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P_1 - (l n f)' \xi \frac{\partial}{\partial \xi} P_1 + \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} P_1 + \beta(\tau) \frac{1}{\xi^n} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^n \frac{\partial}{\partial \xi} P_1 \right) \right] = 0 \quad (2.4)$$

$$W(\xi, \tau) = \int_{\xi}^1 \int_{g(\tau)}^0 \frac{[P(\zeta, t) - 1] \zeta^n d\zeta \theta^{1-n} d\theta}{\sqrt{\theta^2 - \zeta^2} \sqrt{\theta^2 - \xi^2}} \quad (2.5)$$

$$\int_{g(\tau)}^1 d\zeta \zeta^n [P(\zeta, \tau) - 1] (1 - \zeta^2)^{-n/2} = 0 \quad (2.6)$$

Для слабопроницаемых пород на стадии распространения трещины гидроразрыва ее длина $l(t)$, как правило, много больше характерной глубины проникновения жидкости разрыва в пласт $y_0 (l(t) \gg y_0)$, поэтому $\beta(\tau) \ll 1$. Параметр ε в уравнении (2.2) при обычных условиях проведения гидравлического разрыва пласта также много меньше единицы ($\varepsilon \ll 1$). Например, для $p_0 = 100$ МПа; $\mu = 10^{-3}$ МПа·с; $k = 10^{-13}$ м²; $m = 0,4$; $\kappa = 0,25$ м²/с; $G = 7 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,3$; $\lambda_s = 0,072$; $\rho_0 = 10^3$ кг/м³; $p_h = 50$ МПа; $l_0 = 40$ м величина ε равна $5 \cdot 10^{-3} \ll 1$.

Граничные условия (1.6)–(1.9) в переменных (2.1) имеют вид

$$P(\xi=0, \tau) = P_1(\xi=0, \eta, \tau) = N \quad (n=0) \quad (2.7)$$

$$Q(\xi=0, \tau) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \left[-\beta(\tau) \int_{-h_1/\eta_0}^{h_2/\eta_0} d\eta \frac{\partial}{\partial \xi} P + WU \right] \quad (n=1)$$

$$P_1(\xi \rightarrow \infty, \eta, \tau) = M \quad (2.8)$$

$$P(\xi, \tau) = P_1(\xi, \eta=0, \tau) \quad (2.9)$$

Первое условие (2.7) соответствует постоянному давлению закачки жидкости разрыва для плоской краевой трещины ($n=0$), второе – специальному режиму нагнетания жидкости в скважину для осесимметричной трещины $q(t) = q_0 f^2(\tau) Q(\xi=0, \tau)$.

Пренебрегая в уравнениях (2.2)–(2.6) и граничных условиях (2.7)–(2.9) членами при малых параметрах ϵ , β и размерами скважины ($\epsilon = \beta(\tau) = g(\tau) = 0$), получим двумерную автомодельную задачу о гидравлическом разрыве проницаемого пласта в квазистационарном приближении с автомодельными переменными ξ , η ($f(\tau) = \exp(\tau/\alpha)$). При этом $P(\xi, \tau) = P(\xi)$, $P(\xi, \eta, \tau) = P(\xi, \eta)$ и т. д. Уравнения (2.2)–(2.6) и граничные условия (2.7)–(2.9) после некоторых преобразований могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi^n W^{1/2} \left| \frac{d}{d\xi} P \right|^{1/2} \right] = -\operatorname{sgn} \left(\frac{d}{d\xi} P \right) \xi^n \frac{\partial}{\partial \eta} P_1(\xi, \eta=0) \quad (2.10)$$

$$\xi \frac{d}{d\xi} P_1 + \alpha \frac{d^2}{d\eta^2} P_1 = 0 \quad (2.11)$$

$$W(\xi, \tau) = \int_0^1 \int_0^{\theta} \frac{[P(\xi) - 1] \xi^n d\xi \theta^{1-n} d\theta}{\sqrt{\theta^2 - \xi^2} \sqrt{\theta^2 - \xi^2}} \quad (2.12)$$

$$\int_0^1 d\xi \xi^n [P(\xi) - 1] (1 - \xi^2)^{-1/2} = 0 \quad (2.13)$$

$$P(\xi) = P_1(\xi, \eta=0), \quad P_1(\xi \rightarrow \infty, \eta) = M \quad (2.14)$$

$$P(\xi=0) = P_1(\xi=0, \eta) = N \quad (n=0) \quad (2.15)$$

$$Q(\xi=0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} (\xi WU) \quad (n=1) \quad (2.16)$$

Для плоской трещины ($n=0$) параметры обезразмеривания определяются через давление нагнетания p_0 , для осесимметричной трещины ($n=1$) – через параметр при расходе – q_0 .

3. Метод решения. Рассмотрим случай когда скорость трещины гидро-разрыва больше или равна скорости переноса жидкости в среде. При этом предположении краевые условия (2.14) для уравнения (2.11) можно записать в виде

$$P_1(\xi, \eta=0) = P(\xi), \quad P_1(\xi \geq \xi_j, \eta) = M, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.1)$$

где ξ_j – координата границы, разделяющей области с возмущенной и невозмущенной жидкостями.

Для интегрирования уравнения (2.11) введем переменную $s = -\ln \xi$ ($s \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 1$ и $s \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow 0$). Задача (2.11), (3.1) в переменных s , η

имеет вид $(P_2(s, \eta) = P_1(e^{-s}, \eta))$

$$\frac{\partial}{\partial s} P_2 = \alpha \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} P_2, \quad P_2(s, \eta=0) = P(e^{-s}), \quad P_2(s \leq s_1, \eta) = M \quad (3.2)$$

Интегрируя (3.2), получим

$$P_2(s, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^{\eta} \frac{\eta}{(s-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\eta}{4\alpha(s-\tau)}\right\} P(e^{-\tau}) d\tau + M \operatorname{erf}\left\{i \frac{\eta}{2\sqrt{\alpha s}}\right\} \quad (3.3)$$

Переходя в уравнении (2.10) от переменных ξ, η к переменным s, η и подставляя в правую часть уравнения выражение (3.3), получим $(Q^*(s) = Q(\xi) = \xi^n U(\xi) W(\xi))$

$$\sqrt{\pi\alpha} \frac{d}{ds} Q^* = e^{-(n+1)s} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{P(\tau) - M}{\sqrt{s-\tau}} d\tau \quad (3.4)$$

Интегрируя уравнение (3.4) и возвращаясь к исходным переменным ξ, η , найдем

$$Q(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{\xi}^1 d\zeta S_n^0(\xi, \zeta) (P(\zeta) - M) + Q_* \quad (3.5)$$

$$S_n^0(\xi, \zeta) = \frac{\zeta^{n+1}}{\xi \sqrt{\ln(\zeta/\xi)}} + (n+1) \int_{\xi}^{\zeta} d\tau \frac{\tau^n}{\xi \sqrt{\ln(\zeta/\xi)}}$$

Здесь Q_* — постоянная интегрирования.

Ниже потребуется другое представление выражения (3.5), для получения которого формально проинтегрируем уравнение движения жидкости разрыва в трещине (2.3)

$$P(\xi) - M = \Delta_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\xi}^1 \frac{d\zeta}{\zeta^{2n}} \rho(\zeta) \quad (3.6)$$

$$\rho(\zeta) = \frac{\sqrt{\alpha} Q^2}{W^3}, \quad \Delta_1 = P(1) - M$$

Подставив (3.6) в (3.5), преобразуем (3.5) к виду

$$Q(\xi) = \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \int_{\xi}^1 d\zeta K_n(\zeta, \xi) \rho(\zeta) + \frac{\Delta_1}{\sqrt{\pi\alpha}} K_n(\xi/\xi, \xi) + Q_* \quad (3.7)$$

$$K_n(\zeta, \xi) = \frac{2\xi}{\zeta^n} \left[\left(\frac{\xi}{\zeta} \right)^n - (n+1) \right] \sqrt{\ln\left(\frac{\zeta}{\xi}\right)} + \sqrt{\pi} (n+1) \zeta^{1-n} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\ln\left(\frac{\zeta}{\xi}\right)}\right)$$

Выразим раскрытие трещины (2.12) также через функцию $\rho(\xi)$. Для этого подставим выражение (3.6) в (2.12) и после некоторых преобразо-

ваний получим

$$\sqrt{\alpha} W(\xi) = -\sqrt{\alpha} \Delta_2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1-n} \sqrt{1-\xi^2} + \int_0^1 d\zeta R_n(\xi, \zeta) \rho(\zeta) \quad (3.8)$$

$$R_n(\xi, \zeta) = \frac{1}{\xi^{2n}} \int_0^\zeta d\theta \theta^n \int_{\chi(\theta, \xi)}^1 d\eta \frac{\eta^{1-n}}{\sqrt{\eta^2 - \theta^2} \sqrt{\eta^2 - \xi^2}}$$

$$\chi(\theta, \xi) = \begin{cases} \theta, & \theta > \xi \\ \xi, & \xi > \theta \end{cases}, \quad \Delta_2 = 1 - P(1)$$

Константа α находится из критерия разрушения (2.13), который после подстановки в него выражения (3.6) может быть приведен к виду

$$\sqrt{\alpha} \Delta_2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1-n} = \int_0^1 d\zeta F_n(\zeta) \rho(\zeta) \quad (3.9)$$

$$F_0(\zeta) = \arcsin \zeta, \quad F_1(\zeta) = \frac{1}{\xi^{2n}} [1 - \sqrt{1-\zeta^2}]$$

Используя (3.9), преобразуем раскрытие трещины (3.8) к виду

$$\sqrt{\alpha} W(\xi) = \int_0^1 d\zeta B_n(\xi, \zeta) \rho(\zeta), \quad B_n(\xi, \zeta) = R_n(\xi, \zeta) - F_n(\xi, \zeta) \quad (3.10)$$

В плоском случае ($n=0$) ядро $B_0(\xi, \zeta)$ (3.10) выражается через элементарные функции

$$B_0(\xi, \zeta) = 2\zeta \ln \frac{\sqrt{1-\zeta^2} + \sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{|\zeta^2 - \xi^2|}} - 2\xi \ln \frac{\xi \sqrt{1-\zeta^2} + \zeta \sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{|\zeta^2 - \xi^2|}} \quad (3.11)$$

в осесимметричном случае ($n=1$) — через эллиптические интегралы первого ($F(\varphi, k)$) и второго рода ($E(\varphi, k)$)

$$B_1(\xi, \zeta) = - \left(\frac{1-\xi^2}{1-\zeta^2} \right)^{s/2} - \frac{1}{\zeta} \left(\frac{\xi}{\zeta} \right)^{(1+s)/2} E \left(\arcsin \left(\frac{1-\xi^2}{1-\zeta^2} \right)^{s/2}, \left(\frac{\zeta}{\xi} \right)^s \right) + \\ + \frac{1}{\zeta} \left[\left(\frac{\zeta}{\xi} \right)^{(1+s)/2} - \left(\frac{\xi}{\zeta} \right)^{(1+s)/2} \right] F \left(\arcsin \left(\frac{1-\xi^2}{1-\zeta^2} \right)^{s/2}, \left(\frac{\zeta}{\xi} \right)^s \right) \quad (3.12)$$

где $s = \operatorname{sgn}(\xi - \zeta)$.

Следовательно, раскрытие трещины и все динамические характеристики задачи гидроразрыва пласта (2.10) — (2.15): давление, поток жидкости разрыва в трещине и распределение давления жидкости определяются через одну функцию $\rho(\xi)$. Функция $\rho(\xi)$ может быть определена из интегрального уравнения, которое получается после подстановки (3.7), (3.8) в выражение $\rho(\xi) = \sqrt{\alpha} Q^2 / W^3$

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^1 d\zeta K_n(\zeta, \xi) \rho(\zeta) + \sqrt{\alpha} \Delta_1 K_n(\xi, \xi) + \alpha \sqrt{\pi} Q_* \right]^2 / \\ / \left[\int_0^1 d\zeta B_n(\xi, \zeta) \rho(\zeta) \right]^3 \quad (3.13)$$

Для определения констант Δ_1 и Q_* , входящих в интегральное уравнение, необходимо задать дополнительные условия на границе ξ_j , разделяющей закачиваемую в трещину жидкость разрыва и пластовую жидкость. В качестве одного из этих условий используем условие непрерывности давления на границе проникновения ξ_j

$$P(\xi_j-0) = P(\xi_j+0) = M \quad (3.14)$$

Второе условие получим из анализа локальной структуры решения задачи о гидроразрыве пронизываемого пласта вблизи вершины трещины.

4. Асимптотики решения при $0 < \xi \ll 1$ и $0 < 1 - \xi \ll 1$. В теории гидроразрыва наибольший интерес представляют режимы, когда давление p_0 закачиваемой в трещину жидкости разрыва незначительно превышает горное давление σ_∞ . Для таких перепадов давления длина заполнения трещины жидкостью разрыва сравнима с длиной трещины и в силу принятого нами предположения $\xi_j \ll 1$ (п. 3) $0 < 1 - \xi_j \ll 1$. Это обстоятельство и позволяет исследовать локальную структуру решения задачи о трещине гидроразрыва вблизи ее вершины.

Асимптотика раскрытия трещины при пренебрежении модулем сцепления горной породы и при $0 < 1 - \xi \ll 1$ может быть получена из (3.11), (3.12)

$$W(\xi) = \alpha^{-1/2} C_n (1 - \xi^2)^{n/2}, \quad n=0, 1 \quad (4.1)$$

$$C_0 = \int_0^1 d\xi \xi (1 - \xi^2)^{-1/2} \rho(\xi), \quad C_1 = \frac{1}{3} \int_0^1 d\xi (1 - \xi^2)^{-1/2} \rho(\xi)$$

Оставляя главный член в разложении ядра K_n (3.7) по параметру $(\xi - \xi_j)/\xi_j \ll 1$, найдем

$$K_n(\xi, \xi) = 2\sqrt{\xi - \xi_j}, \quad n=0, 1 \quad (4.2)$$

Подставив (4.1), (4.2) в (3.13) при $\xi \rightarrow \xi_j$, получим, что для выполнения условия (3.14) необходимо положить

$$\Delta_1 = 0 \text{ или } P(\xi_j) = M \quad (4.3)$$

Кроме условия непрерывности давления (3.14) на границе зоны проникновения ξ_j для решения интегрального уравнения (3.13) необходимо еще одно условие. Обычно, это – условие непрерывности потока жидкости. Константа Q_* соответствует потоку жидкости на границе ξ_j и определяется в процессе интегрирования уравнения (3.13). Разным значениям давления закачиваемой в скважину жидкости разрыва (плоская задача: $n=0$ (2.15)) или расхода (осесимметричная задача: $n=1$ (2.16)) соответствуют различные значения Q_* , поэтому $Q_* \neq 0$. В рамках принятого квазистационарного приближения при не слишком больших перепадах между горным давлением и давлением закачки (N) жидкость разрыва практически полностью заполняет трещину гидроразрыва: $\varepsilon = 1 - \xi_j \ll 1$ [1].

Пренебрегая малыми членами в разложении решения интегрального уравнения (3.13) вблизи границы ξ_j по переменной $\xi_j - \xi$ ($\xi \rightarrow \xi_j$), для давления, потока и функции ρ получим

$$P(\xi) = M + Q_* O[(1 - \xi_j)^{-1/2} - (1 - \xi)^{-1/2}] \quad (4.4)$$

$$Q(\xi) = Q_* \{1 + O[(1 - \xi_j)^{-3} - (1 - \xi)^{-3}]\}$$

$$\rho(\xi) = Q_* O[(1 - \xi)^{-3/2}], \quad \xi \leq \xi_j; \quad \rho(\xi) = 0, \quad \xi > \xi_j$$

Из асимптотик решения (4.4) интегрального уравнения (3.13) при $\xi_j \rightarrow 1$ следует, что в случае пренебрежения модулем сцепления, т. е. при плавном смыкании берегов трещины (4.1), в общем случае реализуется режим с неполным заполнением трещины жидкостью разрыва: $\xi_j < 1$ [1]. Следовательно, координата фронта заполнения ξ_j удовлетворяет неравенству $0 < \varepsilon = 1 - \xi_j \ll 1$.

В полном уравнении пьезопроводности, поскольку $\beta \ll 1$, пренебрегается второй производной по r от p , тем самым полная краевая задача заменяется вырожденной, решение которой справедливо вне пограничного слоя: $1 - \varepsilon < \xi \leq 1$; $\varepsilon \ll 1$.

Интегральное уравнение (3.13) позволяет также исследовать локальную структуру решения вблизи скважины. Для плоской задачи имеем $P(\xi) = P_0 + o(1)$; $\rho(\xi) = -O(1)$; $Q = O(1)$; для осесимметричной – $\rho(\xi) \propto (\ln \xi^{-1})^{-3/2}$; $W(\xi) \propto (\ln \xi^{-1})^{1/2}$; $P(\xi) \propto \alpha (\ln \xi^{-1})^{1/2} \xi$; $Q \propto Q_0 + o(1)$. Расходимость давления жидкости в трещине и ее раскрытия при $\xi \rightarrow 0$ (вблизи скважины) аналогичны расходимостям, возникающим в авторемодельных задачах фильтрации жидкости от скважины, и связаны с пренебрежением конечности радиуса скважины ($r_0 = 0$) [11]. Для исключения этих расходимостей

в расчетах обычно используют понятие эффективной расширяющейся скважины [11], радиус которой за время расчета остается всегда меньшим радиуса реальной скважины.

Приведенные асимптотики решения автомодельной задачи о трещине гидроразрыва, распространяющейся в проницаемом пласте, позволяют проанализировать особенности поведения решения этой задачи и при неавтомодельных постановках.

5. Результаты численных расчетов. Интегральное уравнение (3.13) интегрировалось методом последовательных приближений. Стандартный метод последовательных приближений не применим к решению уравнения (3.13), так как приводит к расходящимся итерационным алгоритмам. Поэтому был использован подход, предложенный в [12]: метод последовательных приближений применялся к уравнению, эквивалентному (3.13), но записанному в специальной форме: $\rho_{s+1} = (\rho_s^3 \rho[\xi, \rho_s])^{1/4}$, где ρ_s — значение функции ρ на s -й итерации, а $\rho[\xi, \rho_s]$ дается выражением (3.13).

Были проведены две серии расчетов для плоской краевой трещины ($n=0$) и осесимметричной трещины ($n=1$). Полученная автомодельная задача зависит от двух безразмерных параметров: давления закачиваемой в трещину жидкости разрыва $\Delta_3 = P(0) - 1$ ($n=0$) или расхода Q_0 на скважине ($n=1$) и перепада между горным давлением и пластовым давлением $\Delta_2 = 1 - M$. Цель расчетов заключалась в исследовании влияния этих параметров на главные показатели гидроразрыва: размер трещины $l(t)$, объем трещины $V(t)$, раскрытие трещины $w(t)$ и утечки жидкости в пласт.

Результаты расчетов приведены на фиг. 2–5.

На фиг. 2, а, б показаны профили давления жидкости разрыва вдоль трещины в плоском ($n=0$) (фиг. 2, а: $\Delta_2=0,6$; $\Delta_3=0,71$ (1), 0,5 (2), 0,32 (3)) и осесимметричном случаях ($n=1$) (фиг. 2, б: $\Delta_2=0,6$; $Q_0=1,6$ (1), 0,73 (2), 0,08 (3)). Раскрытие трещин при тех же значениях параметров приведены на фиг. 3, а, б. Плотность утечек жидкости из трещины $Q_L = \xi^n V(\xi, \tau)$

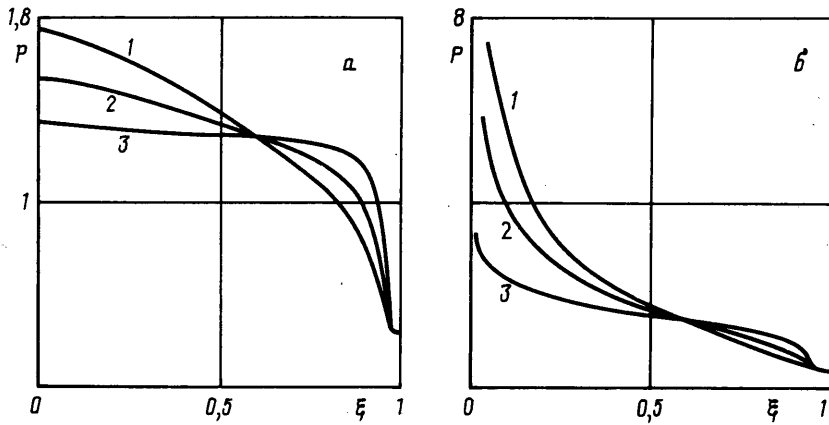
$$Q_L(\xi) = \frac{\xi^n}{\alpha \sqrt{\pi}} \int_{\xi}^1 \frac{d\eta \rho(\eta)}{\eta^{2n} \sqrt{\ln(\eta/\xi)}}$$

почти постоянна в средней части трещины и резко возрастает вблизи фронта заполнения ξ_f (фиг. 4, а, б).

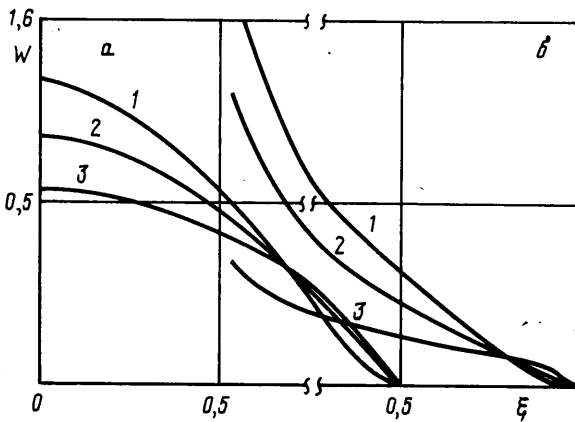
Выразим основные величины, характеризующие гидроразрыв, через параметры автомодельных решений. Используя (2.1), получим следующие выражения для объема трещины V_c , объема утечек V_f , максимальной глубины проникновения жидкости разрыва в пласт $y_{f_0} = y_f(\xi, t)$, расхода q и размера трещины $l(t)$

$$\begin{aligned} V_c &= \int_0^l dr r^n w = w_0 l_0^{-1} \Pi_1 l^{n+2}; & \Pi_1 &= \int_0^1 d\xi \xi^n W(\xi) \\ V_f &= 2m \int_0^l dr r^n y_f = y_0 \Pi_2 l^{n+1}; & \Pi_2 &= \int_0^1 d\xi \xi^n Y_f(\xi) \\ y_{f_0} &= y_0 Y_f(\xi); & q &= u_{L_0} Q(\xi=0) l^2; & l(t) &= l_0 \exp\left\{\frac{\tau}{\alpha}\right\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из (5.1) видно, что граница зоны проникновения y_f не зависит от длины трещины l в подвижной системе координат ξ , поэтому увеличение зоны проникновения связано только лишь с распространением трещины. С течением времени увеличивается длина трещины l , при этом объем трещины V_c увеличивается быстрее, чем объем утечек V_f . Для трещины Перкинса —



Фиг. 2



Фиг. 3

Керна, рассмотренной в [4] при тех же приближениях, справедливо обратное утверждение.

В данной задаче свойства жидкости разрыва совпадают со свойствами иластовой жидкости. Границу зоны проникновения жидкости разрыва в пласт определим из баланса массы

$$\int_{\xi}^{\xi_j} d\xi \xi^n Y_f(\xi) = \int_{\xi}^{\xi_j} d\xi \xi^n \int_{r_f(\xi)}^{\infty} d\eta \left(\frac{\rho(\eta, \xi)}{\rho_0} - 1 \right) \quad (5.2)$$

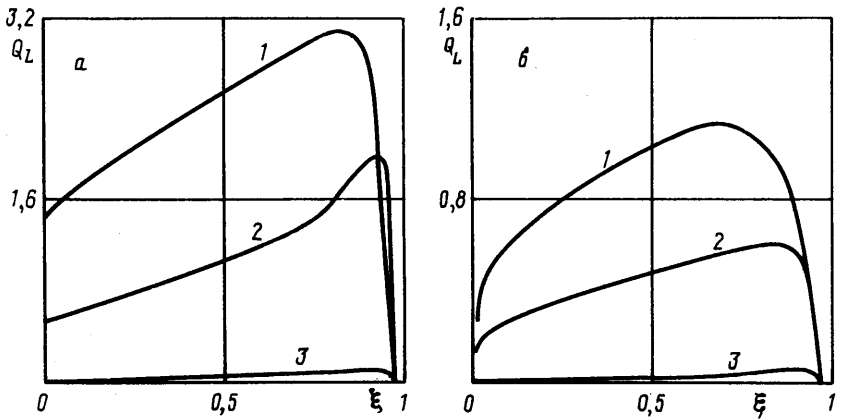
где ρ_0 — плотность пластовой жидкости при давлении p^0 .

Для слабосжимаемых жидкостей, для которых и получено уравнение изотермической упругости, плотность жидкости и пористость среды связана с давлением выражением ($K_p, K_m \sim 10^4$ МПа — модули сжимаемости)

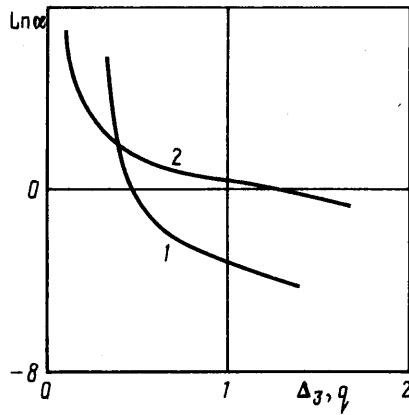
$$\rho - \rho_0 = \rho_0 K_p^{-1} (p - p^0), \quad m - m_0 = m_0 K_m^{-1} (p - p^0) \quad (5.3)$$

Из (5.3) следует, что поле давления в пласте $P(\xi, \eta)$ при $\xi < \xi_j$, $0 < |\eta| < \infty$ определяется только распределением давления $P(\xi)$ на отрезке $\xi < \xi < \xi_j$, $\eta = 0$.

Подставив (5.3) в (5.2) и пренебрегая малыми величинами, получим



Фиг. 4



Фиг. 5

$$(K^{-1} = K_p^{-1} + K_m^{-1})$$

$$\int_{\xi}^{\xi_f} d\xi \xi^n Y_f(\xi) = K^{-1} \sigma \int_{\xi}^{\xi_f} d\xi \xi^n \int_{Y_f(\xi)}^{\infty} d\eta (P(\xi, \eta) - M) \quad (5.4)$$

После дифференцирования (5.4) по ξ и подстановки в него выражения (3.3), найдем значение границы зоны проникновения Y_f

$$Y_f(\xi) = K^{-1} \sigma \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{\xi}^{\xi_f} d\xi \xi^{-1} \frac{(P(\xi) - M)}{\sqrt{\ln(\xi/\xi)}} \exp\left\{-\frac{Y_f^2(\xi)}{4\alpha \ln(\xi/\xi)}\right\} \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) может быть решено методом итераций. В теории гидроразрыва представляют интерес медленные скорости распространения трещин ($\max(Y_f/\alpha) \ll 1$, величины α см. фиг. 5), отвечающие небольшим перепадам между горным давлением и давлением нагнетания. В этом случае в уравнении (5.5) экспоненциальный множитель может быть заменен единицей, а после подстановки в него (3.6) получим формулу для границы зоны проникновения жидкости в пласт.

$$Y_j(\xi) = 2K^{-1}\sigma \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_{\xi}^1 \frac{d\xi}{\xi^{2n}} \sqrt{\ln\left(\frac{\xi}{\xi}\right)} \rho(\xi)$$

При проведении операции гидроразрыва пласта основными параметрами, которые могут контролироваться на скважине, являются: давление закачки p , расход q и объем закаченной жидкости $V = V_c + V_j$. Из полученных выражений (5.1) легко находятся простые соотношения между этими параметрами.

Таким образом, найденные автомодельные решения дают возможность не только тестировать сложные численные алгоритмы решения неавтомодельных задач, но и при создании соответствующих режимов закачки жидкости в пласт по параметрам на скважине p , q , V определять длину трещины l , объем трещины V_c и объем жидкости V_j , отфильтровавшейся в пласт. Кроме того, из выражений (5.1) можно получить зависимость между объемом жидкости V , закаченной в пласт, и расходом q : $V = A_1 q^{(n+2)/2} + A_2 q^{(n+1)/2}$, ($A_1 = w_0 l_0^{-1} (u_{L_0} Q(\xi=0))^{-(n+2)/2} \Pi_1$, $A_2 = y_0 (u_{L_0} Q(\xi=0))^{-(n+1)/2}$), которая позволяет определить один из неизвестных параметров пласта, например проницаемость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.
2. Енгов В. М., Завоский А. Ф., Стелин И. Б., Хараидзе Д. М. Одномерная модель распространения трещины гидроразрыва // Численные методы решения задач фильтрации. Динамика многофазных сред. 9-й Всесоюз. семинар. Якутск, 1988. Новосибирск, 1989. С. 94–95.
3. Nilson R. H. Similarity solutions for wedge-shaped hydraulic fractures driven into a permeable medium by a constant inlet pressure // Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 1988. V. 12. № 5. P. 477–495.
4. Гордеев Ю. Н., Завоский А. Ф. Автомодельные задачи о глубокопроникающем гидравлическом разрыве пласта // Изв. АН СССР. МТТ. 1991.
5. Daneshy A. A. On the design of vertical hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. 1973. V. 25. № 1. P. 83–97.
6. Geertsma J., Klerk F. de. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures // J. Petrol. Technol. 1979. V. 21. № 12. P. 1571–1581.
7. Nordgren R. P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // Soc. Petrol. Eng. J. 1972. C. 12. № 4. P. 306–314.
8. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 475–486.
9. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье. М.: Изд. иностр. лит., 1955. 668 с.
10. Баренблатт Г. И., Христианович С. А. О модуле сцепления в теории трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. № 2. С. 70–75.
11. Баренблатт Г. И., Енгов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в пористых пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
12. Алексеенко О. П., Вайсман А. М. Прямолинейный гидроразрыв в упругой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 145–149.

Москва

Поступила в редакцию
4.IV.1991