

УДК 526.5 : 533.6.011.5

© 1992 г. В. И. ЖУК

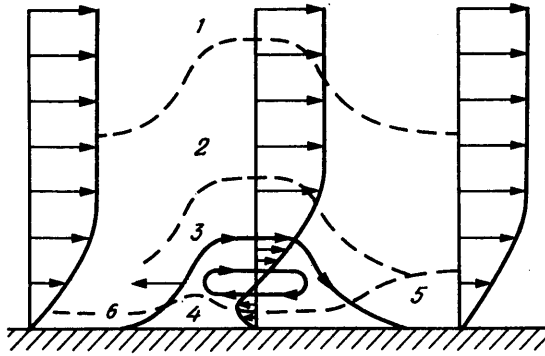
АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАМКНУТОЙ СРЫВНОЙ ЗОНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Хотя решения с локальными рециркуляционными зонами построены численно для целого ряда задач трехпалубной асимптотической теории свободного взаимодействия [1–3], существование стационарных решений при увеличении параметра подобия, характеризующего интенсивность вызывающего отрыв внешнего возмущения, подвергается сомнению [1, 4]. Отличительное свойство приводимого ниже асимптотического решения уравнений Навье – Стокса с замкнутой срывной областью состоит в том, что оно распадается на стационарную часть внизу по потоку (в окрестности присоединения) и на нестационарную часть, распространяющуюся в виде волны отрыва вверх по потоку. Структура возмущенного поля течения дает содержательный пример, когда известные ранее решения локальных задач с эффектом взаимодействия [5–7] непрерывно переходят друг в друга, являясь составными элементами полного решения.

1. Оценка толщин характерных подобластей течения. Рассмотрим отрыв ламинарного пограничного слоя на пластине в сверхзвуковом потоке, вызванный слабым скачком уплотнения. Обозначим через t^* , x^* , y^* – время и координаты декартовой системы с началом на передней кромке, u^* , v^* – компоненты вектора скорости, ρ^* – плотность газа, p^* – давление, M_∞ – число Маха, μ^* – динамический коэффициент вязкости, индексом ∞ пометим параметры набегающего потока. Пусть скачок падает в точку $x^* = x_p^*$, а перепад давления характеризуется величиной $\theta \varepsilon^2 \rho_\infty^* u_\infty^{*2}$, где $\varepsilon = Re^{-1/8}$, число Рейнольдса $Re = \rho_\infty^* u_\infty^* x_p^* / \mu_\infty^* \rightarrow \infty$. Для $\theta = O(1)$ в окрестности x_p^* возникает область свободного взаимодействия с протяженностью $\Delta x^* = O(\varepsilon^3 x_p^*)$. Данный режим хорошо изучен с привлечением численных методов решения уравнений пограничного слоя с самоиндуцированным давлением. Установлено существование при умеренных значениях θ стационарного течения, включающего замкнутую рециркуляционную зону.

Остановимся ниже на случае $1 \ll \theta \ll \varepsilon^{-2}$, считая, что механизм передачи возмущений по-прежнему контролируется взаимодействием пограничного слоя с внешним потоком. В безразмерной системе единиц $t' = t^* u_\infty^* / x_p^*$, $x' = x^* / x_p^*$, $y' = y^* / x_p^*$, $u' = u^* / u_\infty^*$, $v' = v^* / u_\infty^*$, $\rho' = \rho^* / \rho_\infty^*$, $p' = (p^* - p_\infty^*) / (\rho_\infty^* u_\infty^{*2})$ обозначим через l характерную длину области, где давление p' изменяется на величину $\theta \varepsilon^2$, порождая, согласно уравнению сохранения продольной компоненты импульса, возмущение скорости u' порядка $\theta^{1/2} \varepsilon$. По уравнению неразрывности возмущение скорости v' в основной толще пограничного слоя оценивается как $\theta^{1/2} \varepsilon^5 l^{-1}$. Данная величина, превосходя невозмущенную вертикальную компоненту скорости порядка ε^4 , служит также оценкой вносимого во внешний поток возмущения давления p' за счет нарастания толщины пограничного слоя. Сравнение $\theta \varepsilon^2$ с $\theta^{1/2} \varepsilon^5 l^{-1}$ приводит к $l = O(\theta^{-1/2} \varepsilon^3)$.

Таким образом, с увеличением внешнего возмущения, задаваемого параметром θ , характерная длина уменьшается. Тем не менее условие $1 \ll \theta \ll \varepsilon^{-2}$ означает $\varepsilon^4 \ll l \ll 1$, т. е. протяженность взаимодействующей об-



Фиг. 1

ласти превосходит толщину пограничного слоя. В случае $\theta=O(1)$ возвращаемся к оценке $l=O(\epsilon^3)$ трехслойной теории свободного взаимодействия [1-3].

Введем переменные $T=\theta\epsilon^{-2}t'$, $X=\theta^{1/2}\epsilon^{-3}(x'-1)$, $Y_m=\epsilon^{-4}y'$. Профили продольной компоненты скорости U_0 и плотности R_0 в невозмущенном пограничном слое на длинах $X=O(1)$ можно считать зависящими лишь от вертикальной координаты Y_m , причем

$$U_0 \rightarrow \lambda_1 Y_m + \dots, \quad R_0 \rightarrow r_0 + \dots \quad (Y_m \rightarrow 0)$$

$$U_0 \rightarrow 1 + \dots, \quad R_0 \rightarrow 1 + \dots \quad (Y_m \rightarrow \infty)$$

В основной толще пограничного слоя (область 2 на фиг. 1) полагаем

$$u' = U_0(Y_m) + \theta^{1/2}\epsilon u_{1m}(T, X, Y_m) + \dots$$

$$v' = \theta\epsilon^2 v_{1m}(T, X, Y_m) + \theta^{3/2}\epsilon^3 v_{2m}(T, X, Y_m) + \dots$$

$$\rho' = R_0(Y_m) + \theta^{1/2}\epsilon \rho_{1m}(T, X, Y_m) + \dots$$

$$p' = \theta\epsilon^2 p_{1m}(T, X, Y_m) + \theta^{3/2}\epsilon^3 p_{2m}(T, X, Y_m) + \dots$$

Переменная $Y_u = \theta^{1/2}\epsilon^{-3}y'$ порядка единицы в слабовозмущенном сверхзвуковом течении над пограничным слоем (область 1). Соотношение $Y_u = \theta^{1/2}\epsilon Y_m$ означает, что внешний край пограничного слоя соответствует $Y_u \rightarrow 0$. Для $Y_u = O(1)$ решение ищется в виде

$$u' = 1 + \theta\epsilon^2 u_{1u}(T, X, Y_u) + \dots, \quad v' = \theta\epsilon^2 v_{1u}(T, X, Y_u) + \dots$$

$$\rho' = 1 + \theta\epsilon^2 \rho_{1u}(T, X, Y_u) + \dots, \quad p' = \theta\epsilon^2 p_{1u}(T, X, Y_u) + \dots$$

Порядковое соотношение $U_u(Y_u) = O(\theta^{1/2}\epsilon)$ достигается в силу свойства (1.1) в случае, когда переменная $Y_a = \theta^{-1/2}\epsilon^{-5}y' = O(1)$, $Y_m = \theta^{1/2}\epsilon Y_u$. Разложение (1.2) в данной нелинейной области 3 трансформируется следующим образом:

$$u' = \theta^{1/2}\epsilon u_{1a}(T, X, Y_a) + \dots, \quad v' = \theta^{3/2}\epsilon^3 v_{1a}(T, X, Y_a) + \dots$$

$$\rho' = r_0 + \theta^{1/2}\epsilon \rho_{1a}(T, X, Y_a) + \dots, \quad p' = \theta\epsilon^2 p_{1a}(T, X, Y_a) + \dots$$

Наконец, невозможность удовлетворить условию прилипания на твердой поверхности, исходя из разложений (1.4), диктует необходимость введения вязкого пристеночного подслоя (область 4), в котором определена новая переменная $Y_l = \theta^{1/2}\epsilon^{-5}y' = O(1)$, $Y_a = \theta^{-1}Y_l$, а функции

течения имеют вид

$$\begin{aligned} u' &= \theta^{1/2} \varepsilon u_{11}(T, X, Y_1) + \dots, & v' &= \theta^{1/2} \varepsilon^3 v_{11}(T, X, Y_1) + \dots \\ \rho' &= r_0 + \theta^{1/2} \varepsilon \rho_{11}(T, X, Y_1) + \dots, & p' &= \theta \varepsilon^2 p_{11}(T, X, Y_1) + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. Редукция задачи к совместному решению уравнения Бюргерса и системы уравнений Прандтля. Подставляя разложения (1.2), (1.3) в уравнения Навье – Стокса, убеждаемся, что выражения для входящих в них возмущающих функций в точности совпадают с результатом решения асимптотических уравнений верхней и средней палуб трехслойной теории свободного взаимодействия [1–3], а именно

$$\begin{aligned} u_{11m} &= A_1 \frac{dU_0}{dY_m}, & v_{11m} &= -\frac{\partial A_1}{\partial X} U_0, & \rho_{11m} &= A_1 \frac{dR_0}{dY_m}, & p_{11m} &= p_{11m}(T, X), & A_1 &= A_1(T, X) \\ v_{2m} &= -U_0 \frac{\partial p_{11m}}{\partial X} \int_{Y_m}^{\infty} \left(\frac{1}{R_0 U_0^2} - 1 \right) dY_m - Y_m (M_{\infty}^2 - 1) U_0 \frac{\partial p_{11m}}{\partial X} - \frac{\partial A_1}{\partial T} - \\ & - \frac{dU_0}{dY_m} A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} - U_0 \frac{\partial A_2}{\partial X} \\ A_2 &= A_2(T, X), & p_{11u}(T, X, 0) &= \frac{1}{(M_{\infty}^2 - 1)^{1/2}} v_{11u}(T, X, 0) + p_e(X) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь функции p_{11m} , A_1 , A_2 подлежат определению, внешнее давление $p_e(X) = 2P_0 \vartheta(X)$, где $\vartheta(X)$ – единичная функция Хевисайда, формируется в результате отражения падающей на пограничный слой ударной волны интенсивности $\Delta p' = \theta \varepsilon^2 P_0$. Следствием срачивания в верхней части пограничного слоя давления и вертикальной компоненты скорости, а именно $p_{11m} = p_{11u}(T, X, 0)$, $v_{11m}(T, X, Y_m) \rightarrow v_{11u}(T, X, 0)$ для $Y_m \rightarrow \infty$, является, с учетом (1.1), (2.1), краевое условие взаимодействия

$$p_{11m} = -\frac{1}{(M^2 - 1)^{1/2}} \frac{\partial A_1}{\partial X} + p_e$$

Представление (1.4) решения системы уравнений Навье – Стокса в главном приближении дает

$$\frac{\partial u_{1a}}{\partial T} + u_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial X} + v_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial Y_a} = -\frac{1}{r_0} \frac{\partial p_{1a}}{\partial X}, \quad \frac{\partial u_{1a}}{\partial X} + \frac{\partial v_{1a}}{\partial Y_a} = 0, \quad \frac{\partial p_{1a}}{\partial Y_a} = 0 \quad (2.2)$$

Как видно из уравнений (2.2), в нелинейной области \mathcal{Z} сохраняется завихренность $\omega_{1a} = \partial u_{1a} / \partial Y_a$ вдоль траектории каждой частицы. Предполагая для $T=0$ поток невозмущенным, в соответствии с (2.2) находим $\omega_{1a} = dU_0(0)/dY_m$, откуда $u_{1a} = \lambda_1 Y_a + B(T, X)$, $v_{1a} = -Y_a \partial B / \partial X + D(T, X)$. Разложения (1.2) в пределе $Y_m \rightarrow 0$ служат асимптотическим краевым условием для системы невязких уравнений (2.2) на верхнем краю нелинейной области $Y_a \rightarrow \infty$, позволяя определить функции $B(T, X)$ и $D(T, X)$. Выражения (2.1) при $Y_m = O(\theta^{1/2} \varepsilon)$ дают

$$B(T, X) = \lambda_1 A_1, \quad D(T, X) = -\frac{\partial A_1}{\partial T} - \lambda_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} - \frac{1}{\lambda_1 r_0} \frac{\partial p_{11m}}{\partial X}$$

Исключим из последующих формул параметры λ_1 , r_0 , $s = (M_{\infty}^2 - 1)^{1/2}$, P_0 , а также вычисленный по температуре $1/R_0(Y_m)$ невозмущенного пограничного слоя коэффициент вязкости $\mu_0 = \mu(1/r_0)$ при $Y_m = 0$, совершив преобразование

$$t = b_1 T, \quad x = b_x X, \quad y_a = b_y Y_a, \quad y_l = b_y Y_l$$

$$u_a = b_u u_{1a}, \quad v_a = b_v v_{1a}, \quad u_l = b_u u_{1l}, \quad v_l = b_v v_{1l}, \quad (2.3)$$

$$A = b_y A_1, \quad p = b_p p_{1m}, \quad \alpha = 2b_p P_0$$

$$b_l = \lambda_1^{-1/2} \mu_0^{1/2} s^{-1/2}, \quad b_x = \lambda_1^{3/4} r_0^{1/2} \mu_0^{1/4} s^{3/4}, \quad b_y = \lambda_1^{3/4} r_0^{1/2} \mu_0^{-1/4} s^{3/4}, \quad b_p = \lambda_1^{-1/2} \mu_0^{-1/2} s^{1/2} \quad (2.4)$$

$$b_u = \lambda_1^{-1/4} r_0^{1/2} \mu_0^{-1/4} s^{1/4}, \quad b_v = \lambda_1^{-3/4} r_0^{1/2} \mu_0^{-3/4} s^{-1/4}$$

В новых переменных решение в нелинейной невязкой области 3 примет вид

$$u_a = y_a + A, \quad v_a = -y_a \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial t} - A \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = -\frac{\partial A}{\partial x} + \alpha \delta(x) \quad (2.5)$$

Параметры газа в вязком пристеночном подслое 4 подчиняются вытекающим из представления (1.5) системе уравнений и граничным условиям

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial u_l}{\partial y_l} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial y_l^2}, \quad \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{\partial v_l}{\partial y_l} = 0 \quad (2.6)$$

$$y_l = 0: \quad u_l = v_l = 0; \quad y_l \rightarrow \infty: \quad u_l \rightarrow A; \quad |x| \rightarrow \infty: \quad u_l \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

Градиент давления определяется до решения системы (2.6). В самом деле, вертикальная скорость в подслое $y_l = O(1)$, согласно (1.5), порядка $\theta^{1/2} \varepsilon^3$, в невязкой области $y_a = O(1)$ указанная скорость в соответствии с (1.4) имеет оценку $\theta^{1/2} \varepsilon^3$. Следовательно, условие сращивания на границе нелинейной области с вязким подслоем формулируется как $v_a \rightarrow 0$ при $y_a \rightarrow 0$ (напомним, что $y_a = \theta^{-1} y_l$). С учетом выражений для v_a и p из (2.5) получаем уравнение Бюргерса с неоднородной правой частью

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \alpha \delta(x) \quad (2.8)$$

позволяющее найти неизвестную функцию A , а вместе с ней и p .

Все приведенные выше рассуждения остаются в силе, если вместо внешнего скачка источником возмущений служит отклонение участка пластины на угол $\theta \varepsilon^2 \varphi_0$. В этом случае коэффициент α перед дельта-функцией $\delta(x)$ в (2.8) представляет собой угол излома контура тела $\lambda_1^{-1/2} \mu_0^{-1/2} s^{-1/2} \varphi_0$ в системе единиц (2.3), (2.4).

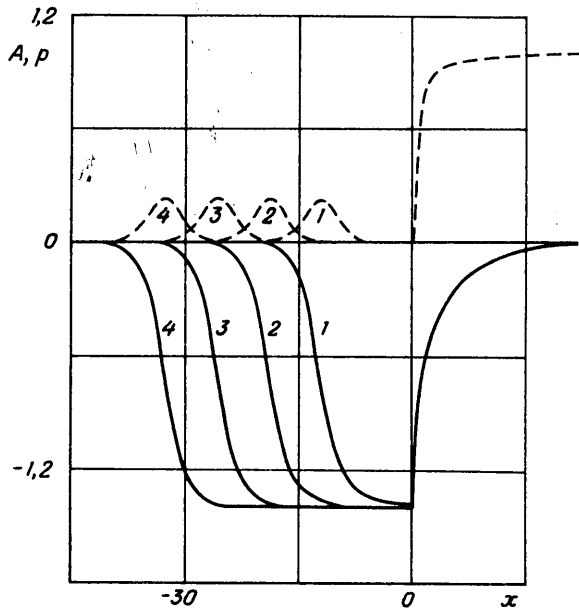
Аналитическое решение задачи о падении в момент времени $t=0$ скачка уплотнения в точку $x=0$, сводящейся к уравнению (2.8) с условиями $|A| \rightarrow 0$ для $|x| \rightarrow \infty$ и $A(0, x) = 0$, построено в [8]. При достаточно больших t картина течения состоит из стационарного решения ниже по потоку от точки падения скачка

$$p = -\frac{2}{(x+x_0)^2} + \alpha, \quad A = -\frac{2}{x+x_0}, \quad x_0 = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}, \quad x > 0 \quad (2.9)$$

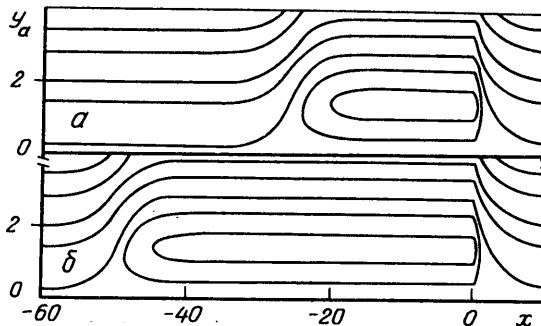
и распространяющейся вверх по потоку с постоянной фазовой скоростью и незатухающей амплитудой волны

$$p = \frac{c_0^2}{2 \operatorname{ch}^2 \xi}, \quad A = -c_0(1 + \operatorname{th} \xi), \quad c_0 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/2}, \quad \xi = \frac{1}{2} c_0(x + c_0 t), \quad x < 0 \quad (2.10)$$

На фиг. 2 приведен вид функций A (сплошные линии) и p (штриховые линии) для моментов времени $t=20, 30, 40, 50$ (помечены цифрами 1-4 соответственно). Без ограничения общности положено $\alpha=1$, поскольку преобразование $t \rightarrow \alpha^{-1} t$, $x \rightarrow \alpha^{-1/2} x$, $y \rightarrow \alpha^{-1/2} y$, $A \rightarrow \alpha^{1/2} A$, $u \rightarrow \alpha^{1/2} u$, $v \rightarrow \alpha^{1/2} v$, $p \rightarrow \alpha p$ исключает параметр α из задачи (2.6), (2.8).



Фиг. 2

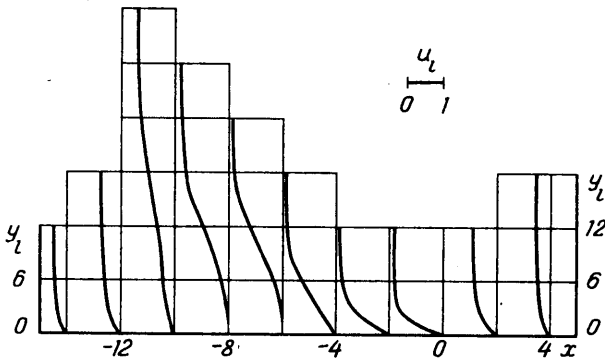


Фиг. 3

Конфигурация линий тока в невязкой области \mathcal{Z} показана на фиг. 3, а для $t=40$ и фиг. 3, б для $t=75$.

Корректность разбиения поля возмущенного течения на четыре подслоя должна быть подтверждена существованием решения уравнений Прандтля (2.6) с градиентом давления, полученным из решения уравнения Бюргерса (2.8). Обратимся к анализу этого вопроса.

Результат совместного численного интегрирования системы уравнений Прандтля для области \mathcal{L} и уравнения Бюргерса представлен на фиг. 4. Постановка задачи с начальными условиями для классических уравнений Прандтля приводит, вообще говоря, к возникновению особенности в конечный момент времени, если градиент давления считается заданной функцией. Пример появления такой особенности и связанного с ней неограниченного роста толщины вытеснения содержится в [9]. Распределения p на фиг. 2 позволяют утверждать, что сингулярность решения уравнений пограничного слоя можно ожидать лишь в окрестности импульса давления, бегущего вверх по потоку вместе с волновым фронтом функции A . Действительно, из выражений (2.9), (2.10) и



Фиг. 4

фиг. 2 следует, что функция A нигде не обращается в нуль, являясь отрицательной на всей оси x . Следовательно, на внешней границе рассматриваемого вязкого пристеночного подслоя компонента скорости $u_i < 0$. Как видно из фиг. 2, всюду, за исключением склона импульса давления, обращенного в противоположную от направления движения волны сторону, градиент давления является благоприятным. Профили продольной компоненты скорости в различных сечениях $x = \text{const}$ вязкого пристеночного подслоя на фиг. 4 соответствуют $t=20$, $\alpha=1$. Численное решение показывает, что особенность в отмеченной области не появляется, что связано с нестационарностью изучаемого течения.

Мгновенные линии тока в нелинейном невязком подслое 3, согласно (2.5), (2.8), задаются уравнением $y_a = -A \pm \sqrt{A^2 + 2\psi_a}$, где ψ_a — значение функции тока. Следовательно, линии тока с $\psi_a < 0$ замкнуты (фиг. 3). Поскольку на всей оси x функция A отрицательна, нулевая линия тока, имеющая уравнение $y_a = -2A$, нигде не касается поверхности тела, хотя и стремится асимптотически к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Затухание функции $A(t, x)$ внизу и вверху по потоку от развивающейся отрывной зоны означает, что при $|x| \rightarrow \infty$ нарушаются предположения, лежащие в основе четырехпалубной схемы, в частности амплитуда возмущенного давления не удовлетворяет требованию $p' \gg \varepsilon^2$.

3. Асимптотическая картина течения при $x \rightarrow \infty$. Переход к трехпалубной структуре поля скоростей. Уравнения пограничного слоя Прандтля с градиентом давления из (2.9) могут быть решены аналитически [10] в автомодельном виде, приводя в области 4 при $x > 0$ к выражениям

$$u_i = -\frac{2}{x+x_0} \left[3 \operatorname{th}^2 \left(\frac{y_i}{x+x_0} + K \right) - 2 \right], \quad K = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{3}} = 1,146 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_i(t, x, 0)}{\partial y_i} = -4 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{(x+x_0)^2}$$

Поведение течения на стенке из (3.1) показывает, что область 4 не содержит точку присоединения пограничного слоя, оторвавшегося выше по потоку от места падения скачка $x=0$. Ниже по потоку от точки $x=0$ отрицательная продольная скорость в вязком пристеночном подслое уменьшается по абсолютной величине с возрастанием x , причем для $x \gg 1$, но $y_i \ll x$ из (3.1) имеем

$$u_i = -4 \sqrt{\frac{2}{3}} y_i / x^2$$

Уже из вида автомодельной переменной $y_i/(x+x_0)$ следует, что тол-

щина области 4 растет с ростом x . Вводя величину

$$\delta_* = \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{u_i(t, x, y_i)}{A(t, x)} \right] dy_i$$

для выражаемой с помощью (3.1) функции u_i находим $\delta_* = 3(x+x_0) \times \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$. В нелинейной невязкой области 3 в случае $x > 0$ продольная компонента скорости

$$u_a = y_a + A, \quad A = -\frac{2}{x+x_0} \quad (3.2)$$

Если $x = O(1)$, граница вязкого подслоя соответствует $y_a = O(\theta^{-1})$, а в качестве условия при $y_i \rightarrow \infty$ в (2.7) для уравнений Прандтля берется $u_i \rightarrow A$, поскольку линейным по y_a членом в (2.5), (3.2) можно пренебречь. Однако для $x \gg 1$ линейное возрастание δ_* приводит к тому, что вязкий подслоя достигается при $y_a = O(\theta^{-1}x)$. Равенство порядков величин обоих слагаемых в (3.2) на границе с вязким подслоем, а именно $A = O(\theta^{-1}x)$, позволяет оценить расстояние $x = O(\theta^{1/2})$, на котором краевые условия при $y_i \rightarrow \infty$ в (2.7) нуждаются в пересмотре. Исходя из явных выражений (2.5), (2.9), в случае $x = O(\theta^{1/2})$ находим

$$\rho = \alpha + O(\theta^{-1}), \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = O(\theta^{-3/2}), \quad u_a = O(\theta^{-1/2}), \quad A = O(\theta^{-1/2}) \quad (3.3)$$

Толщина вязкого подслоя при этом оценивается как $y_a = O(\theta^{-1/2})$, а вертикальная компонента скорости на его внешней границе $v_i \rightarrow -\theta y_a \partial A / \partial x = O(\theta^{-1/2})$. Выделение подобласти 3 с $y_a = O(1)$ теряет смысл, если $x \gg 1$, поскольку убывание согласно (2.9) функции $|A|$ приводит в ней к $y_a \gg |A|$ и, следовательно, возмущение скорости подчиняется линейным уравнениям, как и в основной части пограничного слоя. Что касается нелинейного подслоя для $x = O(\theta^{1/2})$, он в силу (3.3) характеризуется толщиной $y_a = O(\theta^{-1/2})$ и сливается с вязким пристеночным подслоем, образуя область 5 на фиг. 1.

Приведенные оценки указывают вид разложений функций течения для $X = \theta^{1/2} X^+$, где новая переменная $X^+ = O(1)$. Учитывая, что зависимость от времени при $T \gg 1$ за фронтом волны (2.10) исчезает, в нелинейном вязком подслое 5 с $Y_i = \theta^{1/2} Y_i^+$, $Y_i^+ = O(1)$ имеем

$$\begin{aligned} u' &= \varepsilon u_{i1}^+(X^+, Y_i^+) + \dots, & v' &= \varepsilon^3 v_{i1}^+(X^+, Y_i^+) + \dots \\ \rho' &= r_0 + \varepsilon \rho_{i1}^+(X^+, Y_i^+) + \dots, & p' &= 2\theta \varepsilon^2 P_0 + \varepsilon^2 p_{i1}^+(X^+, Y_i^+) + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

В основной толще пограничного слоя

$$\begin{aligned} u' &= U_0(Y_m) + \varepsilon u_{i1}^+(X^+, Y_m) + \dots, & v' &= \varepsilon^2 v_{i1}^+(X^+, Y_m) + \dots \\ \rho' &= R_0(Y_m) + \varepsilon \rho_{i1}^+(X^+, Y_m) + \dots, & p' &= 2\theta \varepsilon^2 P_0 + \varepsilon^2 p_{i1}^+(X^+, Y_m) + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Представление решения в виде (3.4), (3.5) в точности воспроизводит трехслойную теорию свободного взаимодействия [1-3]. Однако область изменения продольной координаты теперь ограничена положительной полуосью $X^+ > 0$. Предполагая снова выполненным аффинное преобразование

$$x^+ = b_x X^+, \quad y^+ = b_y Y_i^+, \quad u^+ = b_u u_{i1}^+, \quad v^+ = b_v v_{i1}^+, \quad p^+ = b_p p_{i1}^+$$

с масштабами из (2.4), в нелинейном вязком подслое 5 получаем задачу

$$u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = -\frac{dp^+}{dx^+} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^{+2}}, \quad \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = 0, \quad p^+ = -\frac{\partial A^+}{\partial x^+}$$

$$y^+ = 0: u^+ = v^+ = 0; \quad y^+ \rightarrow \infty: u^+ \rightarrow y^+ + A^+; \quad A^+ = A^+(x^+)$$

$$x^+ \rightarrow +0: p^+ \rightarrow -\frac{2}{x^{+2}}; \quad x^+ \rightarrow \infty: p^+ \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

Асимптотическое краевое условие в окрестности $x^+ = 0$ вытекает из сращивания с решением из области больших возмущений, где справедлива четырехслойная структура течения. Краевая задача (3.6) известна в теории присоединения слоя смешения при падении сверхзвуковой струи на плоскость [5, 11]. Ее решение, полученное численными методами, представлено в [12]. Состоящая из подслоев 1, 2, 5 трехслойная область $X^+ = O(1)$, исследование которой сводится к (3.6), замечательна тем, что в ней происходит касание нулевой линии тока обтекаемой поверхности при конечном значении координаты $x^+ = x_r^+$. Для $x^+ > x_r^+$ возвратные струйки тока в течении отсутствуют. Дальняя асимптотика $x^+ \gg 1$, рассмотренная в [12], имеет автономный вид и описывает выход на решение, соответствующее невозмущенному пограничному слою.

4. Асимптотическая картина течения при $x \rightarrow -\infty$. По мере продвижения вверх по потоку фронта волны (2.10) в интервале, заключенном между ним и точкой падения скачка $x=0$, устанавливается стационарное решение $A = -(2\alpha)^{1/2}$, $u_a = y_a + A$, $v_a = 0$, $p = 0$. Часть вязкого пристеночного подслоя 4 в указанном интервале $-c_0 t + \Delta < x < 0$ за волной, где $\Delta > 0$ превышает толщину волнового фронта, представляет собой, следовательно, пограничный слой Блазиуса, в который переходит автономное решение (3.1) для $x > 0$. Нулевая линия тока невязкого течения $y_a = -2A$, где A дается формулой (2.10), экспоненциально приближаясь при $x \rightarrow -\infty$ к стенке, тем не менее нигде в области 3 с ней не соприкасается. Перед фронтом волны $x < -c_0 t - \Delta$ имеем

$$(A, p) \rightarrow (-2c_0, 2c_0^2) \exp[c_0(x + c_0 t)] \quad (4.1)$$

Задача нахождения решения уравнений (2.6) в вязком подслое 4 с внешним краевым условием из (2.7), задаваемым предельным выражением (4.1), становится линейной. Положим

$$[u_i, v_i, p] = [-2c_0 f'(y_i), 2c_0^2 f(y_i), 2c_0^2] \exp[c_0(x + c_0 t)]$$

тогда система (2.6) сводится к уравнению

$$f''' - c_0^2 f' = -c_0^2; \quad y_i = 0: f = f' = 0; \quad y_i \rightarrow \infty: f' \rightarrow 1 \quad (4.2)$$

Линеаризация уравнений пограничного слоя Прандтля оказалась возможной благодаря нестационарности течения ($c_0 \neq 0$). По решению задачи (4.2) находим толщину вытеснения и трение на стенке:

$$f = y_i + \frac{1}{c_0} [\exp(-c_0 y_i) - 1] \quad \delta_* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u_i}{A}\right) dy_i = \frac{1}{c_0}$$

$$\frac{\partial u_i(t, x, 0)}{\partial y_i} = -2c_0^2 \exp[c_0(x + c_0 t)]$$

Таким образом, толщина вытеснения остается постоянной при $x \rightarrow -\infty$, а трение на стенке в рассматриваемой области не обращается в нуль ни для каких конечных x . Последнее свойство означает, что не-

стационарный отрыв потока происходит на других масштабах продольной координаты. Постоянство δ_* указывает, что верхняя граница вязкого подслоя в пределе $x \rightarrow -\infty$ по-прежнему соответствует $y_a = O(\theta^{-1})$. В силу экспоненциального затухания функции $A = u_a(t, x, 0)$ внешнее краевое условие для уравнений Прандтля должно измениться на расстоянии, где $A = O(\theta^{-1})$. Данная оценка определяет новую область δ , в которой координата $\xi = \theta \exp(c_0 x)$ порядка единицы. Продольная скорость в указанной вязкой области δ должна иметь при $y_l \rightarrow \infty$ в силу $y_a = \theta^{-1} y_l$ своим пределом

$$u_l \rightarrow \theta^{-1} y_l - 2\theta^{-1} c_0 \xi \exp(c_0^2 t)$$

Представляя решение уравнений Прандтля (2.6) в виде

$$[u_l - \theta^{-1} y_l, v_l, p] = \theta^{-1} [-2c_0 \xi g'(y_l), 2c_0^2 \xi g(y_l), 2c_0^2 \xi] \exp(c_0^2 t)$$

и пренебрегая членами порядка θ^{-2} , получим

$$g'''' - c_0^2 g' = -c_0^2; \quad y_l = 0: \quad g = g' = 0; \quad y_l \rightarrow \infty: \quad g' \rightarrow 1$$

Окончательно продольная скорость в вязком подслое и трение на стенке

$$u_l = \theta^{-1} \{y_l - 2c_0 \xi \exp(c_0^2 t) [1 - \exp(-c_0 y_l)]\}$$

$$\frac{\partial u_l(t, x, 0)}{\partial y_l} = \theta^{-1} - 2c_0^2 \exp[c_0(x + c_0 t)]$$

В неподвижной системе координат точка нестационарного отрыва $\partial u_l(t, x, 0)/\partial y_l = 0$ пограничного слоя определяется следующим образом:

$$x = x_s = -\frac{1}{c_0} \ln(2c_0^2) - c_0 t - \frac{1}{c_0} \ln \theta \quad (4.3)$$

Точка отделения нулевой линии тока от стенки, как следует из (4.3), движется вверх по потоку с фазовой скоростью c_0 и отстоит от области развитого отрыва на расстояние порядка $\ln \theta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нейланд В. Я.* Асимптотическая теория отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // *Успехи механики.* 1981. Т. 4. Вып. 2.
2. *Stewartson K.* D'Alembert's paradox // *SIAM Rev.* 1981. V. 23. № 3. P. 307-343.
3. *Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев В. В., Королев Г. М.* Асимптотическая теория отрывных течений. М.: Наука, 1987. 255 с.
4. *Smith F. T.* A reversed-flow singularity in interacting boundary-layers // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1988. V. 420. № 1858. P. 21-52.
5. *Нейланд В. Я.* К асимптотической теории присоединения сверхзвукового потока // *Тр. ЦАГИ.* 1975. Вып. 1650. С. 3-17.
6. *Жук В. И., Рыжов О. С.* О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // *Докл. АН СССР.* 1982. Т. 263. № 1. С. 56-59.
7. *Крапивский П. Л., Нейланд В. Я.* Отрыв пограничного слоя от подвижной поверхности тела в сверхзвуковом потоке газа // *Уч. зап. ЦАГИ.* 1982. Т. 13. № 3.
8. *Жук В. И., Попов С. П.* О нелинейном развитии длинноволновых невязких возмущений в пограничном слое // *ПМТФ.* 1989. № 3. С. 101-108.
9. *Van Dommelen L. L., Shen S. F.* The spontaneous generation of the singularity in a separating laminar boundary-layer // *J. Comput. Phys.* 1980. V. 38. № 2. P. 125-140.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
11. *Daniels P. G.* Laminar boundary-layer reattachment in supersonic flow // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 90. № 2. P. 289-303.
12. *Daniels P. G.* Laminar boundary-layer reattachment in supersonic flow. Pt. 2. Numerical solution // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 97. № 1. P. 129-144.