

УДК 532.525.2.013.4 : 537.84

© 1992 г. К. Е. ДЖАУГАШТИН, Ж. Н. КАЛИЕВ

ВЯЗКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ СТРУИ В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Численное исследование вязкой неустойчивости плоской затопленной струи несжимаемой жидкости при отсутствии магнитного поля в линейной постановке, т. е. методом малых возмущений, проведено рядом авторов [1–5]. Оценка критического числа Рейнольдса для той же задачи, но в нелинейной постановке, выполнена в двух работах: в [6] на основе энергетического метода, а в [7] путем анализа уравнений для одноточечных моментов второго порядка в рамках полумпирической теории турбулентности. В данной работе рассмотрена вязкая неустойчивость плоской затопленной струи несжимаемой жидкости в однородном параллельном магнитном поле двумя методами – методом малых возмущений и методом, основанным на уравнении баланса пульсационной энергии.

1. Метод малых возмущений приводит к двум задачам на собственные значения (для четной и нечетной мод) для модифицированного уравнения Орра – Зоммерфельда [8]

$$v^{IV} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v - i\alpha R \{ (U-c)(v'' - \alpha^2 v) - U'' v + i\alpha N v \} = 0 \quad (1.1)$$

с соответствующими для каждой моды краевыми условиями. Здесь $v = v_r + iv_i$ – комплексная амплитуда поперечной составляющей скорости возмущения, $\alpha = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны, $c = c_r + ic_i$ – комплексная фазовая скорость, $R = U_m l/\nu$ – число Рейнольдса, U_m, l – характерные скорость и длина, которые определяются ниже, ν – кинематическая вязкость, $N = \sigma B^2 l/\rho U_m$ – параметр магнитного воздействия (число Стюарта), σ – электропроводность жидкости, B – индукция магнитного поля, ρ – плотность жидкости.

Влияние продольного магнитного поля на стационарное основное течение в обычно используемом приближении пограничного слоя пропорционально порядку отбрасываемых членов в уравнениях магнитной гидродинамики, и поэтому скорость основного течения U в уравнении (1.1) определяется, как и в чисто гидродинамическом случае, из системы уравнений ламинарного пограничного слоя, дополненной краевыми условиями

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$y=0: \quad V = \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad y=\pm\infty: \quad U=0$$

Отсюда для продольной составляющей скорости основного течения имеем

$$U = 1 - th^2 \eta$$

где $\eta = y/l$ – безразмерная переменная подобия, $\eta \in]-\infty, +\infty[$, $l = (48\nu^2 x^2 / M)^{1/2}$, $U_m = U(x, 0) = (3M^2 / 32x\rho^2 \nu)^{1/2}$ – соответственно характерные длина и

скорость (скорость на оси струи), $M = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 dy = \text{const}$ — проекция на ось x количества движения жидкости (импульс струи). Прямоугольная система координат выбрана обычным образом: начало координат совпадает с центром узкой щели, ось x направлена по оси струи в сторону ее истечения, ось y — вертикально вверх.

Основное течение не является строго параллельным, однако исследование его неустойчивости по отношению к малым возмущениям в виде бегущих волн рассматривается здесь в рамках уравнения (1.1), т. е. применяется обычный подход для исследования неустойчивости пограничного слоя на теле [9]. Смысл его состоит в том, что течение считается локально-плоскопараллельным и характеризуется локальными значениями характерных параметров $U_m(x)$, $l(x)$, взятыми при фиксированном значении x .

Поскольку основное течение и краевые условия (условия затухания возмущений при $\eta \rightarrow \pm\infty$) являются симметричными относительно прямой $\eta=0$, то краевая задача для уравнения (1.1) допускает два независимых решения — четное и нечетное. Поэтому при $\eta=0$ имеем две группы краевых условий

$$v'(0)=0, \quad v'''(0)=0 \quad (1.3)$$

$$v(0)=0, \quad v''(0)=0 \quad (1.4)$$

Краевые условия при $\eta \rightarrow \infty$ ($v \rightarrow 0$, $v' \rightarrow 0$) известной процедурой сводятся к условиям при конечном $\eta=\eta_1$ (здесь $\eta_1=6$)

$$v''' + av'' - b^2(v' + av) = 0 \quad (1.5)$$

$$v''' + bv'' - a^2(v' + bv) = 0$$

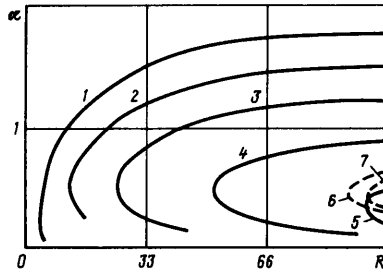
$$a = \sqrt{\alpha^2 + (m - \sqrt{m^2 - n})/2}, \quad b = \sqrt{\alpha^2 + (m + \sqrt{m^2 - n})/2}$$

$$m = i\alpha R(U_1 - c), \quad n = 4\alpha^2 RN, \quad U_1 = U(\eta_1)$$

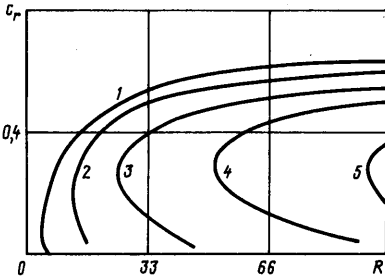
Краевые условия (1.3), (1.5) отвечают антисимметричным возмущениям, а (1.4), (1.5) — симметричным.

Две задачи на соответственные значения (1.1), (1.3), (1.5) и (1.1), (1.4), (1.5) решались численно путем их редукции к соответствующим задачам Коши, т. е. методом стрельбы. Характеристические уравнения решались методом двумерных секущих.

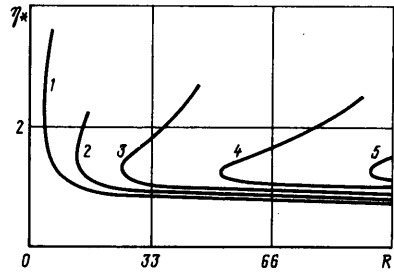
На фиг. 1 представлены нейтральные кривые $\alpha = \alpha(R)$ для антисимметричных (сплошные линии) и симметричных (штриховые линии) возмущений при различных значениях параметра магнитного воздействия: кривая 1 соответствует $N=0$; 2 — 0,1; 3 — 0,2; 4 — 0,3; 5 — 0,38; 6 — 0; 7 — 0,01. Видно, что параллельное магнитное поле подавляет возмущения, причем для подавления симметричных возмущений требуется магнитное поле меньшей напряженности, чем для антисимметричных, т. е. последние, как и в чисто гидродинамическом случае, являются наиболее опасными. Для обоих типов возмущений увеличение параметра N сокращает интервал неустойчивых волновых чисел. При всех значениях N длинноволновые возмущения являются неустойчивыми и, наоборот, коротковолновые возмущения — устойчивыми. На фиг. 2 представлены нейтральные кривые $c_r = c_r(R)$ для антисимметричных возмущений при различных значениях числа Стюарта: кривая 1 соответствует $N=0$; 2 — 0,1; 3 — 0,2; 4 — 0,3; 5 — 0,38. Расчеты показывают, что при возрастании значений параметра N критические собственные значения R_* , α_* , c_{r*} ведут себя по-разному: критическое число Рейнольдса растет



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

по степенному закону, остальные два вначале растут, затем достигают максимума (при разных значениях N), далее уменьшаются. Относительно c_{r*} это означает, что увеличение напряженности параллельного магнитного поля приводит вначале к разгону возмущений, т. е. к увеличению их скорости распространения, затем после достижения некоторого критического значения числа Стюарта скорости распространения возмущений падают.

На фиг. 3 показана для антисимметричных возмущений зависимость положения критической точки η_* , в которой, по определению, скорость распространения возмущения c_r совпадает со скоростью основного течения U , т. е. $U(\eta_*) - c_r = 0$, от числа Рейнольдса при различных значениях параметра магнитного воздействия: кривая 1 соответствует $N=0$; 2 — 0,1; 3 — 0,2; 4 — 0,3; 5 — 0,38. Как видно, кривые $\eta_* = \eta_*(R, N)$ образуют топологию, аналогичную обычным нейтральным кривым (фиг. 1, 2), причем для всех вариантов имеем, что $\eta_* \in]0; 4[$. Отсюда ясно, что в рассматриваемой задаче ширина отрезка интегрирования $[0; \eta_1]$ при различных значениях R и α должна быть такой, чтобы критическая точка η_* не выходила из области интегрирования, т. е. $\eta_1 > 4$. С этим связано, видимо, завышенное значение $R=7,5$ в работе [2], где значение $\eta_1=3$.

После вычисления критических чисел Рейнольдса R_* , соответствующих различным значениям параметра магнитного поля, можно для каждого варианта определить критическое значение продольной координаты x_* , в которой происходит потеря устойчивости ламинарного течения

$$x_* = \frac{2}{9} \frac{R_*^3}{R_0^2}, \quad R_0 = \frac{U_0 d}{\nu}$$

где R_0 — начальное число Рейнольдса, U_0 — скорость истечения струи из узкой щели размера d .

2. Анализ критического режима течения в рамках полуэмпирической теории турбулентности основан на уравнениях для одноточечных мо-

ментов второго порядка, замкнутых с помощью гипотез Колмогорова – Ротта [10], при этом среднее течение в отличие от (1.2) определяется из уравнений пограничного слоя, в которых учитывается турбулентное касательное напряжение трения $\langle uv \rangle$ при переходном режиме течения [7]. Таким образом, исходные для анализа уравнения для течений с поперечным сдвигом без учета диффузий имеют вид [11]:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} - \langle uv \rangle \right), \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + k \frac{\sqrt{E}}{l} \left(\langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right) + c_1 \nu \frac{\langle u_i u_j \rangle}{l^2} + \\ + \frac{2}{3} c \delta_{ij} \frac{E^{3/2}}{l} + \frac{\beta \sigma}{\rho} (2 \langle u_i u_j \rangle B_s B_s - \langle u_i u_s \rangle B_j B_s - \langle u_j u_s \rangle B_i B_s) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь U_i , u_j – составляющие осредненной и пульсационной скоростей соответственно, $E = (\langle u^2 \rangle + \langle v^2 \rangle + \langle w^2 \rangle) / 2$ – среднекинетическая энергия пульсационного движения, приходящаяся на единицу массы, $i, j, k, s = 1, 2, 3$, l – величина, имеющая размерность длины, $c_1 \approx 5\pi/4$ – постоянная, оцениваемая из теории изотропной турбулентности [10], $k/c \approx 7$ – эмпирическая константа, $\beta \approx 0,5$ – константа, связанная с разделением зарядов в магнитном поле [11], индекс s указывает на ориентацию вектора магнитной индукции B .

Рассмотрим уравнения для компонент тензора турбулентных напряжений в случае продольного магнитного поля ($B_1 = B_x = B$, $B_2 = B_3 = 0$). Тогда из (2.2) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{R_I}{E} \langle uv \rangle + k R_E + c_1 - \frac{(k-c) R_E [3(k R_E + c_1) + 2\beta H_I^2]}{3(k R_E + c_1 + 2\beta H_I^2)} = 0 \\ \frac{k R_E + c_1 + 2\beta H_I^2}{E} \langle v^2 \rangle - \frac{2}{3} (k-c) R_E = 0 \\ R_I \langle v^2 \rangle + (k R_E + c_1 + \beta H_I^2) \langle uv \rangle = 0 \\ \langle w^2 \rangle = \langle v^2 \rangle, \quad \langle vw \rangle = 0, \quad \langle uw \rangle = 0 \end{aligned}$$

Здесь

$$R_E = \frac{l \sqrt{E}}{\nu}, \quad R_I = \frac{l^2}{\nu} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad H_I^2 = \frac{\sigma B^2 l^2}{\rho \nu}$$

– локальные числа Рейнольдса и Гартмана соответственно. Из этой системы уравнений найдем выражение для $\langle uv \rangle$

$$-\langle uv \rangle = \nu g \frac{\partial U}{\partial y}, \quad g = g(R_E, H_I) = \frac{2(k-c) R_E^3}{3(k R_E + c_1 + \beta H_I^2) (k R_E + c_1 + 2\beta H_I^2)}$$

Уравнение баланса пульсационной энергии запишем в виде

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varphi_1 = \frac{2}{3} (k-c) R_E R_I^2$$

$$\varphi_2 = (k R_E + c_1 + \beta H_I^2) \left[(c R_E + c_1) (k R_E + c_1 + 2\beta H_I^2) + \frac{4}{3} (k-c) R_E \beta H_I^2 \right]$$

где φ_1 соответствует порождению энергии пульсационного движения, а φ_2 – ее диссипации.

Условия критического режима течения, как и в теории теплового взрыва горючей смеси [7, 12], имеют вид

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{d\varphi_1}{dR_E} = \frac{d\varphi_2}{dR_E}$$

Отсюда в параметрической форме определяются критические значения локальных чисел R_E^+ и R_l^+ в зависимости от H_l (Фиг. 4, сплошная линия — R_E^+ , штриховая линия — R_l^+)

$$R_l^2 = (kR_E + c_1 + \beta H_0^2) \left[(cR_E + c_1)(kR_E + c_1 + 2\beta H_l^2) + \frac{4}{3}(k-c)R_E\beta H_l^2 \right] \left[\frac{2}{3}(k-c)R_E \right]^{-1}$$

$$\beta H_l^2 = \frac{1}{12} \frac{k}{c_1} (5c+4k)R_E^2 - \frac{3}{4} c_1 +$$

$$+ \frac{1}{4} \sqrt{\left[\frac{1}{3} \frac{k}{c_1} (5c+4k)R_E^2 - 3c_1 \right]^2 + 8(kR_E + c_1) \left(2 \frac{kc}{c_1} R_E^2 + kR_E - c_1 \right)}$$

Для вычисления критического значения числа Рейнольдса R^+ , определенного в разд. 1, следует рассчитать среднее течение на основном участке струи. Краевые условия для уравнений (2.1) те же, что и для уравнений (1.2). Преобразуя диффузионный член в (2.1) к виду

$$\nu \frac{\partial U}{\partial y} - \langle uv \rangle = \nu_{en} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \nu_{en} = \nu\theta, \quad \theta = 1 + g$$

и полагая $U = U_m F'(\eta)$, $\eta = y/l$, получим известную автомодельную задачу, решение которой для рассматриваемого случая в безразмерной форме имеет вид

$$U_m = \left(\frac{3}{32} \frac{R_0}{\theta x} \right)^{1/2},$$

$$l = 4 \sqrt{\frac{3}{4} \left(\frac{\theta x}{R_0} \right)^{3/2}}, \quad R_0 = \frac{U_0 d}{\nu}$$

Выражение для локального числа Рейнольдса примет вид

$$R_l = R^+ \theta^{1/2} \gamma$$

где $\gamma = F''(\eta^+) = 0,77$ — значение градиента скорости в точке перегиба. Отсюда получим формулу для критического значения числа Рейнольдса

$$R^+ = \frac{R_l}{\theta^{1/2} \gamma} \quad (2.3)$$

Здесь характерные величины представлены в виде

$$U_m = U_m^\circ(x) f(\theta), \quad l = l^\circ(x) \psi(\theta)$$

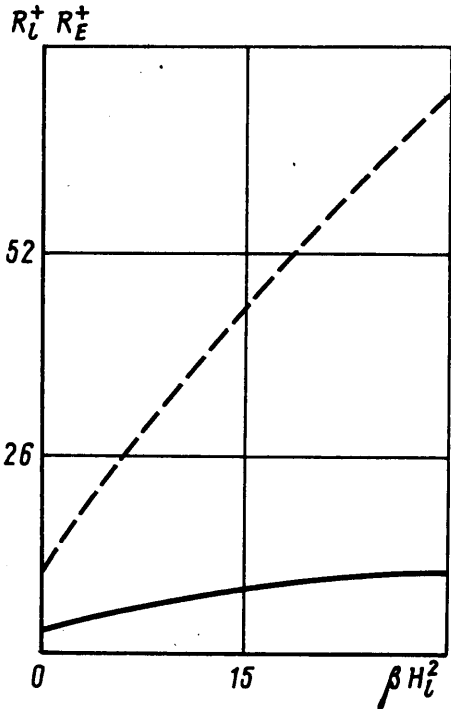
где U_m° , l° соответствуют ламинарному течению, $f(\theta) = \theta^{1/2}$, $\psi(\theta) = \theta^{1/2}$ учитывают их изменения в критическом режиме течения.

Преобразуем теперь выражения для локальных чисел Рейнольдса и Гартмана

$$R_l = \frac{l^2}{\nu} \frac{\partial U}{\partial y} = R_0 U_m l F'' = \sqrt{\frac{g}{2}} \theta^{1/2} \gamma R^2 \quad (2.4)$$

$$H_l^2 = \frac{\sigma B^2 l^2}{\rho \nu} = N_0 R_0 l^2 = 8 \sqrt{\frac{g}{2}} \theta^{1/2} \frac{N}{R^2}$$

Здесь $N_0 = \sigma B^2 d / \rho U_0$ — начальное число Стюарта, $R = R_0 x^{1/2}$, $N = N_0 x^{3/2}$ — локальные значения начальных чисел Рейнольдса и Стюарта соответственно.



Фиг. 4

Из соотношений (2.4) получим следующие выражения для локальных значений R и N

$$R = \frac{1}{3\gamma} \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \frac{R_l^{3/2}}{\theta^{3/2}}, \quad N = \frac{1}{24} \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \frac{R_l^{3/2} H_l^2}{\theta^{3/2}} \quad (2.5)$$

В формулах (2.3)–(2.5) берутся критические значения R_l и θ при заданных числах Гартмана H_l .

Для определения зависимости критического значения продольной координаты x^+ , в которой происходит смена режимов течения, от начальных параметров N_0 и R_0 получим параметрическое соотношение

$$x^+ = \left(\frac{N}{N_0} \right)^{3/2}, \quad R_0 = \frac{R}{\sqrt{x^+}}$$

график которого для различных N_0 приведен на фиг. 5: кривая 1 соответствует $N_0=0$; 2 – 0,04; 3 – 0,2; 4 – 0,6; 5 – 1.

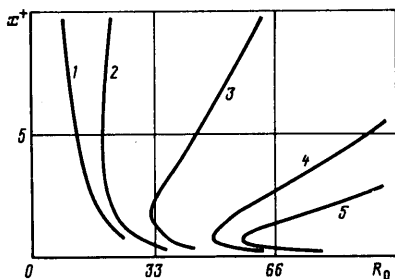
Обсудим полученные результаты. В отсутствие магнитного поля ($H_l=0$) критические значения локальных чисел Рейнольдса соответственно равны $R_E^+=3$, $R_l^+=11$. При увеличении напряженности магнитного поля (фиг. 4) критическое значение локального числа Рейнольдса пульсационного движения R_E^+ медленно возрастает ($R_E^+=11,5$ при $\beta H_l^2=30$), а критическое значение локального числа Рейнольдса осредненного движения R_l^+ растет быстро ($R_l^+=75,0$ при $\beta H_l^2=30$). Это означает, что критические режимы конкретного течения в однородном параллельном магнитном поле обуславливаются в первую очередь характеристиками среднего течения.

При чисто гидродинамическом течении с увеличением начального числа Рейнольдса критическая точка x^+ приближается к устью струи. Можно утверждать, что вниз по течению от этой точки возмущения нарастают и приводят к турбулизации потока.

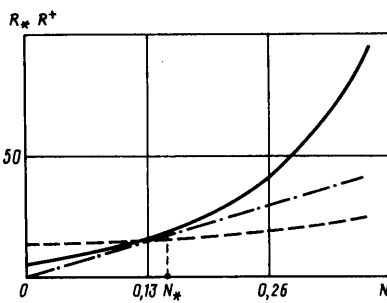
Иная картина критических режимов получается при наличии продольного магнитного поля (фиг. 5). Действительно, при любых значениях начальных параметров R_0 и N_0 (например, $R_0=50$, $N_0=0,2$) возрастание локального значения R приводит к критическому режиму течения ($x_1^+ \approx 0,3$). В дальнейшем, однако, магнитное поле замедляет рост значения R , поскольку последнее пропорционально расходу, а продольное поле препятствует развитию струи, т. е. уменьшает по сравнению с обычным течением значение расхода. В то же время локальное значение параметра магнитного воздействия N вниз по течению растет ($N \sim x^{3/2}$). Оба эти фактора приводят к тому, что при дальнейшем развитии струи, начиная с некоторого значения N_0 , вновь наступает критический режим (для тех же значений R_0 , N_0 в выше приведенном примере имеем $x_2^+ \approx 6$). Но в отличие от первой критической точки x_1^+ , где происходит потеря устойчивости ламинарного течения (наступает турбулизация), во второй критической точке x_2^+ ($x_2^+ > x_1^+$) турбулентное течение стабилизируется, т. е. приобретает устойчивость (наступает ламинаризация). Таким образом, существенным для течений в однородном продольном магнитном поле является наличие двух критических точек, т. е. двух критических режимов.

Как видно, на фиг. 5 для каждого значения начального параметра N_0 существует такое критическое число R_0^+ , что при всех значениях начального числа Рейнольдса R_0 меньше его, т. е. при всех $R_0 < R_0^+$ ламинарное течение в плоской струе всегда будет устойчивым (например, для $N_0=0,6$ значение $R_0^+=49,5$).

3. Проведем сравнение результатов, полученных двумя методами. На фиг. 6 показаны зависимости критических чисел Рейнольдса R_* и R^+ (R_* соответствует методу малых возмущений – сплошная линия и R^+ –



Фиг. 5



Фиг. 6

методу анализа критических режимов — пунктирная линия) от числа Стюарта N . Здесь же показана касательная к кривой $R_*(N)$, проходящая через начало координат (штрихпунктирная линия). Абсцисса точки касания соответствует пороговому значению N_* [13]: при $N \leq N_*$ наиболее опасными являются двумерные возмущения, при $N > N_*$ — трехмерные. Для чисто гидродинамического случая ($N=0$) имеем $R_*=4$, $R^+=12$. Для этого же случая энергетический метод [6] дает $R_{cn}=2,5$, а эксперименты — $R_{exp} \approx 10$. Таким образом, для случая $N=0$ имеет место цепочка неравенств

$$R_{en} < R_* < R_{exp} < R^+$$

При $0 \leq N < N_*$ справедливо неравенство $R^+ > R_*$. В малой окрестности N_* значения R_* и R^+ совпадают; при $N > N_*$ сравнение не имеет смысла, так как в этом случае в методе малых колебаний надо рассматривать трехмерные возмущения. Таким образом, по сравнению с экспериментом метод малых возмущений дает несколько заниженное значение критического числа Рейнольдса, а метод анализа критических режимов — чуть завышенное.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Clenshaw C. W., Elliott D. A. A numerical treatment of the Orr — Sommerfeld equation in the case of a laminar jet // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1960. V. 13. № 3. P. 300—313.
2. Сопруненко И. П. Устойчивость струйных течений // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 4. С. 31—35.
3. Ko Sung Hwan, Lessen Martin. Viscous instability of an incompressible full jet // Phys. Fluids. 1969. V. 12. № 11. P. 2270—2273.
4. Терехова Н. М. Гидродинамическая устойчивость плоскопараллельной струи // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1974. Вып. 1. № 3. С. 79—81.
5. Калугин В. Н., Чечко Г. А. Исследование вязкой неустойчивости несжимаемой плоской струи // Инж.-физ. журн. 1974. Т. 26. № 2. С. 305—308.
6. Сагалаков А. М., Штерн В. Н. Энергетический анализ устойчивости плоскопараллельных течений с точкой перегиба профиля скорости // ПМТФ. 1971. № 6. С. 86—93.
7. Джаугаштин К. Е. О критическом режиме струйных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 3. С. 11—15.
8. Drazin P. G. Stability of parallel flow in a parallel magnetic field at small magnetic Reynolds numbers // J. Fluid Mech. 1960. V. 8. № 1. P. 130—142.
9. Линь Цзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
10. Rotta J. C. Statistische theorie nichthomogener turbulenz. 1 // Z. Phys. 1951. V. 129. № 6. S. 547—572.
11. Ковнер Д. С., Левин В. Б. О турбулентном течении электропроводной жидкости в трубе в продольном магнитном поле // Теплофизика высоких температур. 1964. Т. 2. № 5. С. 742—748.
12. Вудис Л. А. Тепловой режим горения. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1954. 288 с.
13. Врановер Г. Г., Цинобер А. Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука, 1970. 379.