

УДК 532.517.2.013.4 : 533.6.011.55

© 1992 г. И. В. САВЕНКОВ

О ВЯЗКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ КЛИНА

Гиперзвуковые течения характеризуются наличием в потоке ударных волн и энтропийных слоев. Их влияние на устойчивость течения изучено пока слабо. Устойчивость пограничного слоя при наличии энтропийного слоя во внешнем течении исследовалась в [1]. Характерные масштабы задачи выбирались соответствующими теории свободно взаимодействующего пограничного слоя [2, 3], когда возмущенное течение носит существенно вязкий характер. Таким образом, в [1] изучались так называемые «вязкие» моды. К сожалению, основной вывод работы [1] неверен: на самом деле наличие энтропийных слоев в рамках принятой модели не приводит к вязкой неустойчивости пограничного слоя (см. об этом ниже).

Влияние ударной волны на устойчивость гиперзвукового течения недавно изучалось в [4]. Рассматривалось обтекание тонкого клина с присоединенной ударной волной, когда энтропийных слоев в потоке не возникает. Было установлено, что ударная волна оказывает слабое влияние на «невязкие» моды, тогда как вязкие моды претерпевают значительные изменения под ее воздействием. В [4] изучались трехмерные неустойчивые волны, распространяющиеся в окрестности конуса Маха. Режим свободного взаимодействия для таких волн в гиперзвуковом пределе осуществляется за счет поперечного (в трансверсальном направлении) перепада давления в вязкой подобласти пограничного слоя.

В данной работе изучается влияние ударной волны на распространение двухмерных вязких мод в режиме гиперзвукового взаимодействия [2, 3]. Эти моды обладают большими инкрементами нарастания (в масштабах числа Маха), чем рассмотренные в [4], поэтому они представляются более опасными с точки зрения ламинарно-турбулентного перехода.

1. Уравнения движения. Рассмотрим обтекание тонкого клина равномерным гиперзвуковым потоком вязкого газа. Носик клина острый, а соотношение угла раствора клина и числа Маха набегающего потока таково, что в течении возникает присоединенная ударная волна, берущая начало от носика клина. Потребуем, чтобы ударная волна попала во внешнюю часть области свободного взаимодействия, возникшую из-за наличия некоторой локальной неоднородности течения (бугорок, вдув-отсос и т. п.), отстоящей на расстоянии L^* от носика клина. Введем число Рейнольдса $R = \rho_\infty^* U_\infty^* L^* / \mu_\infty^*$ по параметрам равномерного потока за ударной волной (U_∞^* — скорость, ρ_∞^* — плотность, μ_∞^* — динамическая вязкость) и выразим через него малый параметр $\varepsilon = R^{-1/4}$. Устремим также число Маха M_∞ потока за ударной волной к бесконечности.

Наиболее содержательным в теории свободного взаимодействия является вязкий пристеночный подслой с характерными пространственными координатами и временем

$$x^* = L^* (1 + \varepsilon^3 M_\infty^{-3/4} x'), \quad y^* = L^* \varepsilon^5 M_\infty^{-1/4} y_3'$$

$$t^* = (L^* / U_\infty^*) \varepsilon^2 M_\infty^{-1/2} t'$$

где ось x^* декартовой системы координат направлена вдоль щеки клина. Асимптотические разложения для компонента скорости u^* и v^* в проек-

ции на оси x^* и y^* , давления p^* и плотности ρ^* в этой области имеют вид

$$u^* = U_\infty^* [\varepsilon M_\infty^{-1/4} u_3' + \dots], \quad v^* = U_\infty^* [\varepsilon^3 M_\infty^{3/4} v_3' + \dots]$$

$$p^* = p_\infty^* + \rho_\infty^* U_\infty^{*2} [\varepsilon^2 M_\infty^{-1/2} p_3' + \dots], \quad \rho^* = \rho_\infty^* [\rho_3' + \dots]$$

Подстановка этих разложений в уравнения Навье – Стокса приводит к уравнениям пограничного слоя

$$\frac{\partial u_3'}{\partial x'} + \frac{\partial v_3'}{\partial y_3'} = 0, \quad \frac{\partial p_3'}{\partial y_3'} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{T_w} \left(\frac{\partial u_3'}{\partial t'} + u_3' \frac{\partial u_3'}{\partial x'} + v_3' \frac{\partial u_3'}{\partial y_3'} \right) = - \frac{\partial p_3'}{\partial x'} + \mu_w \frac{\partial^2 u_3'}{\partial y_3'^2}$$

где для простоты пластина считается теплоизолированной, откуда $\rho_3' = \rho_w = \text{const}$; $\rho_w T_w = 1$, поскольку давление поперек пограничного слоя постоянно (индекс w относится к параметрам на поверхности клина).

Решение в основной толще пограничного слоя имеет простую структуру: линии тока в ней мгновенно смещаются на $-A'(t', x')$, где неизвестная функция A' входит также в условие срачивания при $y_3' \rightarrow \infty$

$$u_3' - \lambda (\mu_w T_w)^{-1/2} y_3' \rightarrow \lambda (\mu_w T_w)^{-1/2} A' \quad (1.2)$$

здесь $\lambda = 0,3321$ – постоянная из решения Блазиуса для пограничного слоя.

Для замыкания задачи (1.1) – (1.2) требуется связь между p_3' и A' , которая устанавливается после рассмотрения течения во внешней области, где

$$u^* = U_\infty^* [1 + \varepsilon^2 M_\infty^{-1/2} u_1' + \dots], \quad v^* = U_\infty^* [\varepsilon^2 M_\infty^{3/2} v_1' + \dots]$$

$$p^* = p_\infty^* + \rho_\infty^* U_\infty^{*2} [\varepsilon^2 M_\infty^{-1/2} p_1' + \dots], \quad \rho^* = \rho_\infty^* [1 + \varepsilon^2 M_\infty^{3/2} \rho_1' + \dots],$$

$$y^* = L^* \varepsilon^3 M_\infty^{-1/4} y_1' \quad (1.3)$$

Течение в этой области определяется волновым уравнением, граничные условия к которому при $y_1' = 0$ получаются из срачивания с решением в основной толще пограничного слоя

$$\frac{\partial^2 p_1'}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 p_1'}{\partial y_1'^2} = 0 \quad (1.4)$$

$$y_1' = 0: \quad p_1' = p_3'(t', x'), \quad \frac{\partial p_1'}{\partial y_1'} = \frac{\partial A'}{\partial x'^2}$$

Фактически уравнение (1.4) надо использовать только при $0 \leq y_1' \leq y_0'$, где координата y_0' характеризует положение ударной волны, так как за нее возмущения проникнуть не могут. Подстановка разложений (1.3) в соотношения Ренкина – Гюгонио на ударной волне после громоздких преобразований (см. Приложение в [4]) приводит к условию

$$y_1' = y_0': \quad p_1' = 0$$

которое завершает формулировку задачи о свободном взаимодействии. Зная общий вид решения волнового уравнения (1.4), нетрудно получить искомое условие вязко-невязкого взаимодействия

$$p_3'(t', x' - y_0') + p_3'(t', x' + y_0') = \frac{\partial A'(t', x' - y_0')}{\partial x'} - \frac{\partial A'(t', x' + y_0')}{\partial x'} \quad (1.5)$$

В завершение совершим еще аффинные преобразования

$$\begin{aligned}t' &= \mu_w^{1/2} T_w^{3/2} \lambda^{-1/2} t, & x' &= \mu_w^{3/2} T_w^{3/2} \lambda^{-3/2} x \\y_3' &= \mu_w^{5/2} T_w^{7/2} \lambda^{-5/2} y, & y_1' &= \mu_w^{3/2} T_w^{3/2} \lambda^{-3/2} y_1 \\u' &= \mu_w^{1/2} T_w^{3/2} \lambda^{1/2} u, & v' &= \mu_w^{3/2} T_w^{1/2} \lambda^{5/2} v \\p' &= \mu_w^{1/2} T_w^{-1/2} \lambda^{1/2} p, & A' &= \mu_w^{3/2} T_w^{3/2} \lambda^{-3/2} A\end{aligned}$$

Они позволяют избавиться от констант T_w , μ_w и λ при формулировке задачи

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$p(t, x-y_0) + p(t, x+y_0) = \frac{\partial A(t, x-y_0)}{\partial x} - \frac{\partial A(t, x+y_0)}{\partial x}$$

$$y \rightarrow \infty: u-y \rightarrow A, \quad x \rightarrow -\infty: u \rightarrow y, \quad p \rightarrow 0$$

Систему уравнений (1.6) нужно еще дополнить граничными условиями на стенке.

2. Анализ устойчивости. Изучим малые собственные колебания системы. С этой целью добавим к уравнениям (1.6) однородные условия

$$y=0: u=v=0 \quad (2.1)$$

и линеаризуем получившуюся задачу по амплитудному параметру $\delta \rightarrow 0$, выделив гармоническую зависимость искомых функций от x и t

$$(u-y, v, p, A) = \delta(u_0, v_0, p_0, A_0) \exp(\omega t + ikx)$$

Интегрирование полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений дает [5]

$$\Phi(\Omega) = Q(k); \quad Q = (ik)^{1/2} k \operatorname{tg}(ky_0) \quad (2.2)$$

$$\Phi = \frac{d \operatorname{Ai}(\Omega)}{d\zeta} \left[\int_n^\infty \operatorname{Ai}(\zeta) d\zeta \right]^{-1}, \quad \Omega = \omega (ik)^{-3/2}$$

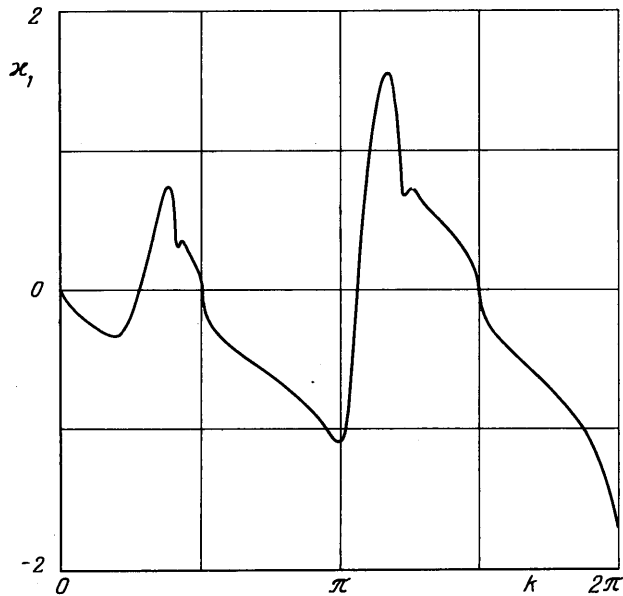
где $\operatorname{Ai}(\zeta)$ — функция Эйри, экспоненциально затухающая в секторе $-\pi/3 < \arg \zeta < \pi/3$.

Дисперсионное соотношение (2.2) имеет счетный набор корней $\omega_n(k) = (ik)^{2/3} \Omega_n(k)$, нумерацию которых удобно связать с нумерацией нулей $\Omega_n^{(0)}$ производной $d \operatorname{Ai}(\Omega)/d\zeta$, поскольку $\Omega_n(0) = \Omega_n^{(0)}$. В дальнейшем в силу симметрии достаточно ограничиться диапазоном $k > 0$. Тип дисперсионного соотношения (2.2) определяется аргументом функции Q ($m=0, 1, 2, \dots$)

$$\pi m < ky_0 < \pi/2 + \pi m: \arg Q = \pi/6 \quad (2.3)$$

$$\pi/2 + \pi m < ky_0 < \pi + \pi m: \arg Q = 5\pi/6 \quad (2.4)$$

Случай (2.3) очень хорошо изучен, поскольку дисперсионное соотношение того же типа получается при описании самовозбуждающихся неустойчивых колебаний в пограничном слое несжимаемой жидкости [5]. Отсюда заключаем, что на каждом отрезке $\pi m < ky_0 < \pi/2 + \pi m$ имеется диапазон $k_{m*} < ky_0 < \pi/2 + \pi m$, где $\operatorname{Re} \omega_1(k) > 0$. В случае же (2.4) соотношение (2.2) имеет тот же тип, что и при гиперзвуковом взаимодействии



Фиг. 1

энтروпийным слоем, когда этот слой играет определяющую роль в процессе взаимодействия [1]. На основе анализа асимптотических свойств функции Эйри, дополненного численным счетом, можно показать, что все корни дисперсионного соотношения в этом случае устойчивы. Поэтому основной вывод работы [1] о появлении неустойчивых мод в присутствии энтропийного слоя ошибочен. Таким образом, $\text{Re } \omega_1(k) < 0$ при $\pi/2 + \pi m < k y_0 < \pi + \pi m$. Приведем пример расчета инкремента нарастания $\kappa_1(k) = \text{Re } \omega_1(k)$ при $y_0 = 1$ для $0 < k < 2\pi$ (фиг. 1). Далее на каждом из отрезков $[\pi m, \pi(m+1)]$, $m = 2, 3, \dots$, картина качественно повторяется: имеется ярко выраженный максимум $\kappa_1^{(m)} = \max \kappa_1(k)$, $\pi m < k < \pi(m+1)$. Нетрудно получить оценку $\kappa_1^{(m)} \sim m^{3/2}$ при $m \rightarrow \infty$, следовательно, инкремент может получать сколько угодно большие значения с увеличением k . Этот вывод отражает дефект асимптотической теории, развитой для чисел $k \sim 1$. Тем не менее он говорит о довольно сильной вязкой неустойчивости гиперзвукового потока в присутствии ударных волн.

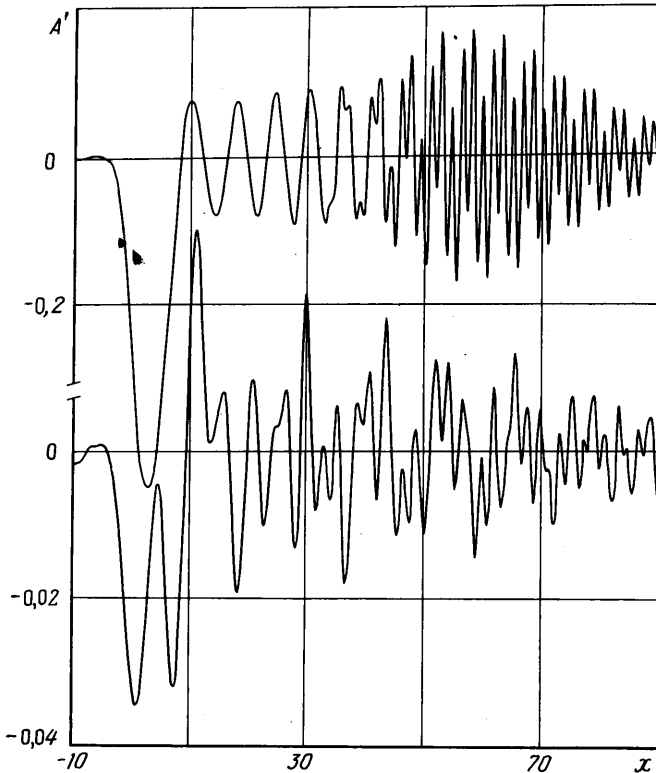
3. Волновые пакеты. Наличие счетного числа локальных максимумов $\kappa_1^{(m)}$, величина которых нарастает при переходе от одного максимума к другому, должно приводить к качественному своеобразию развития волновых пакетов. Волновые пакеты порождаются импульсным воздействием на пограничный слой. С этой целью функцию v_0 , описывающую вдув-отсос через щель в щеле клина

$$y=0: u=0, \quad v=\delta v_0(t, x) \quad (3.1)$$

будем считать равной нулю при $t \leq 0$ и исчезающе малой при $t \rightarrow \infty$.

Линеаризовав задачу (1.6), (3.1) и использовав преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной координате x , будем иметь

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \text{Re} \left[\int_0^{\infty} S(k, t) dk \right] + I_0 \quad (3.2)$$



Фиг. 2

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_0^*(\omega_n, k)}{d\Phi[\Omega_n(k)]/d\Omega} \exp(\omega_n(k)t + ikx)$$

где I_0 — интеграл, определяемый особенностями функции v_0^*

$$v_0^* = \int_0^{\infty} dt e^{-\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(t, x) e^{-ikx} dx$$

Поскольку $\text{Re } \omega_1(k)$ может принимать сколь угодно большие значения при $k \rightarrow \infty$, интеграл (3.2) существует не для всех функций v_0^* , что говорит о некорректности поставленной начально-краевой задачи Коши. Однако этот интеграл будет сходящимся, если функцию v_0^* выбрать достаточно быстро затухающей при $k \rightarrow \infty$. Такой способ регуляризации отражает физику дела: отбрасывая мелкомасштабные колебания, тем самым избавляемся от возмущений, не описываемых асимптотической теорией. Выбрав же функцию $v_0(t, x)$ в виде $f(t)g(x)$ с $g = \exp(-\alpha x^2)$ и приняв $\alpha = 2$, диапазон интегрирования в (3.2) можно сузить до $[0, 2\pi]$ при $t \leq 5$.

Результаты расчетов для $y_0 = 1$ и 3 на моменты времени $t = 4$ и 2 приведены на фиг. 2. Здесь $f = te^{-\beta t}$, причем значение $\beta = 1$ бралось при $y_0 = 1$ (верхний график) и $\beta = 4$ при $y_0 = 3$ (нижний график); в сумме по n для S из (3.2) достаточно ограничиться первыми 10 членами. Поскольку во втором случае при $y_0 = 3$ на интервале $0 < k < 2\pi$ уместается шесть локальных максимумов функции $\chi_1(k)$, шаг интегрирования выбирался достаточно мелким: $\Delta k = 0,001 \dots 0,005$ с 3000-ми узловыми точками. Именно

наличием большого числа максимумов на интервале интегрирования объясняется разительное несходство графиков на фиг. 2. В первом случае ($y_0=1$) картину течения предсказать несложно, поскольку она возникает при наложении двух волновых пакетов, тогда как во втором случае из-за наличия шести быстро растущих групп волн течение приобретает весьма запутанный, трудно прогнозируемый характер (в линейном приближении!). Положение усугубляется с увеличением y_0 , когда на заданном интервале интегрирования появляется все больше локальных максимумов функции $\kappa_1(k)$.

В заключение подытожим сказанное. На основе асимптотического анализа при $R \rightarrow \infty$ и $M_\infty \rightarrow \infty$ установлено, что наличие в потоке ударных волн может приводить к вязкой неустойчивости течения. Данный вывод относится необязательно к гиперзвуковым течениям: важно только, чтобы в конкретных условиях конечных R и $M_\infty > 1$ ударная волна достаточно близко подходила к обтекаемой поверхности. Характерным свойством появляющейся вязкой неустойчивости является наличие счетного числа чередующихся локальных максимумов и минимумов инкремента нарастания возмущений, что может быть интерпретировано как ветвление корня дисперсионного соотношения на счетное количество неустойчивых корней. Наличие же большого числа быстро растущих групп волн с несонизмеримыми частотами и волновыми числами может сильно запутать картину течения и сделать ее практически непредсказуемой уже на линейной стадии развития возмущений.

Автор благодарит участников семинара О. С. Рыжова за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколов Л. А. О влиянии энтропийного слоя на распространение нестационарных возмущений в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПМТФ. 1984. № 3. С. 51–53.
2. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
3. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. A. 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.
4. Cowley S., Hall P. On the instability of hypersonic flow past a wedge // J. Fluid Mech. 1990. V. 214. P. 17–42.
5. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О переходном режиме, характеризующем запуск вибратора в дозвуковом пограничном слое на пластинке // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 974–986.

Москва

Поступила в редакцию
25.VI.1991