

УДК 532.517.4

© 1992 г. А. Г. ГУМИЛЕВСКИЙ

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАНЖЕВЕНА К РАСЧЕТУ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА

Для адекватного численного прогноза разнообразных турбулентных течений на основе двухпараметрических моделей турбулентности типа ϵ - l или ϵ - ϵ (ϵ — скорость диссипации турбулентной энергии ϵ , l — интегральный масштаб турбулентности) необходимо прежде всего хорошо аппроксимировать турбулентные потоки импульса и тепла или коэффициенты турбулентного переноса. Зависимости коэффициентов турбулентного переноса от определяющих параметров могут быть получены на основе алгебраической модели турбулентности [1], которая показывает, что эти коэффициенты являются функциями отношения генерации турбулентной энергии к ее диссипации. Другой способ получения этих зависимостей состоит в использовании уравнений Ланжевена, описывающих движение «броуновских частиц» [2]. Третий способ — это использование модели турбулентного смешения [3, 4], которая близка к подходу на основе уравнений Ланжевена. Однако последний способ математически менее строг, поскольку в модели смешения делаются некоторые априорные суждения о вероятности «рождения» и времени «жизни» молей. Поэтому для описания турбулентных течений будем использовать уравнения Ланжевена (см. [2, 5–9]). В [2, 5] на основе последних построено кинетическое уравнение для плотности вероятности молей в химически реагирующих потоках. В [6] это уравнение обобщено на случай течений со стратификацией плотности. В [7] кинетическое уравнение выводится, исходя из уравнения неразрывности в фазовом пространстве. В [8] для описания движения «турбулентных» молей предложены обобщенные уравнения Ланжевена, в которых коэффициент сопротивления молей α зависит от направления движения, т. е. является тензором второго ранга. Некоторый произвол в выборе компонент α позволяет добиться очень хорошего совпадения данных расчета и эксперимента по плоскому слою смешения, плоскому следу, плоской и осесимметричной струям [9]. В [10] уравнение для плотности вероятности концентраций компонент в потоке с химической реакцией выводится непосредственно из уравнений диффузии и неразрывности. Кроме того, в [10] приведен обзор работ, содержащих различные гипотезы, применяемые при замыкании полученного уравнения.

В настоящей работе на основе кинетического уравнения определяются коэффициенты турбулентного переноса в плоских стратифицированных течениях и в закрученных осесимметричных струях.

1. Турбулентные течения существенно завихренны. Они содержат вихри различных масштабов, начиная от крупных вихрей с размерами порядка размеров течения и кончая мелкими, имеющими размеры порядка Колмогоровского масштаба диссипации. Подобно тому как молекулы в газах ответственны за ламинарный перенос импульса и тепла, крупные энерго-содержащие вихри ответственны за перенос турбулентного импульса и тепла. В то же время мелкие вихри импульс и тепло практически не переносят и ответственны за диссипацию турбулентной энергии.

Построим уравнения, описывающие движение и теплообмен крупных вихрей (молей). Рассмотрим схематично движение молей. В процессе движения на моль действует сила сопротивления $-\alpha\rho(\mathbf{u}-\mathbf{U})$, сила тяжести $\rho\mathbf{g}$, сила, вызванная неравномерностью распределения среднего давления в пространстве $-\nabla P$, центробежные и кориолисовы силы, случайная сила \mathbf{F} (обусловленная пульсациями давления) и, возможно, другие силы. Кроме того, моль обменивается теплом с окружающими молями. Запишем

уравнения движения и теплообмена молей в тензорной форме

$$\frac{du^i}{d\tau} = -\alpha(u^i - U^i) + g^i - \frac{1}{\rho} \nabla^i P - \Gamma_{ks}^i u^k u^s + F^i$$

$$\frac{dt}{d\tau} = -\gamma(t - T) \quad (1.1)$$

$$\alpha = A \frac{\gamma \bar{e}}{l}, \quad \gamma = B \frac{\gamma \bar{e}}{l}$$

Здесь α^{-1} , γ^{-1} — характерные времена выравнивания скорости u и температуры t от средних значений \bar{U} , T ; A , B — константы; Γ_{ks}^i — символы Кристоффеля [11]; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Относительно случайной силы F предположим, что она имеет нулевое среднее и коррелирована с собой на промежутке времени, малом по сравнению с α^{-1} , т. е.

$$\langle F^i(\tau) \rangle = 0 \quad (1.2)$$

$$\langle F^i(\tau_1) F_j(\tau_2) \rangle = 2q\delta(\tau_1 - \tau_2) s_j^i$$

Здесь $\delta(\tau)$ — функция Дирака; s_j^i — компоненты метрического тензора; q — величина, характеризующая скорость подвода энергии к молям из-за действия случайной силы.

Введем плотность вероятности молей $f(x_i, u_j, t, \tau)$ таким образом, что $f dV$ характеризует вероятность нахождения моля в момент времени τ в элементе фазового пространства объемом $dV = s dx_1 dx_2 dx_3 du_1 du_2 du_3 dt$ (s^2 — детерминант метрического тензора s_j^i). Пользуясь уравнением Колмогорова [12], а также (1.1), (1.2), получим уравнение типа Фоккера — Планка

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{u^k}{s} \frac{\partial f s}{\partial x_k} = \gamma \frac{\partial}{\partial t} f(t - T) + q \frac{\partial^2 f}{\partial u_k^2} + \frac{\partial}{\partial u_k} f \left\{ \alpha(u^k - U^k) - g^k + \frac{1}{\rho} \nabla^k P + \Gamma_{mn}^k u^m u^n \right\} \quad (1.3)$$

Кинетическое уравнение (1.3) описывает эволюцию плотности вероятности молей в произвольной системе координат. Оно интегродифференциального типа, поскольку, например, средняя скорость U выражается через интеграл от f

$$U^i = \int f u^i du_1 du_2 du_3 dt \quad (1.4)$$

Уравнение (1.3) может быть решено численно, методом Монте-Карло [8]. Однако удобнее получить на основе (1.3) уравнения для односточечных моментов пульсаций скорости, температуры и, разрешая их, получить формулы для коэффициентов турбулентного переноса. С этой целью умножим (1.3) на контравариантный тензор $Q^{i\dots j}$ и проинтегрируем по пространству скоростей и температуры

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle Q^{i\dots j} \rangle}{\partial \tau} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial x_k} (s \langle u^k Q^{i\dots j} \rangle) - \left\langle u^k \frac{\partial Q^{i\dots j}}{\partial x_k} \right\rangle = \\ = -\gamma \left\langle (t - T) \frac{\partial Q^{i\dots j}}{\partial t} \right\rangle + q \left\langle \frac{\partial Q^{i\dots j}}{\partial u_k^2} \right\rangle - \\ - \left\langle \left\{ \alpha(u^k - U^k) - g^k + \frac{1}{\rho} \nabla^k P + \Gamma_{mn}^k u^m u^n \right\} \frac{\partial Q^{i\dots j}}{\partial u_k} \right\rangle \end{aligned} \quad (1.5)$$

В стратифицированных течениях пульсации плотности крайне малы

по сравнению со средней плотностью $\langle \rho \rangle$. Поэтому, воспользовавшись уравнением состояния, положим

$$-g^h + \frac{1}{\rho} \nabla^h p = \beta g^h (t - T) + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \nabla^h p$$

где β — коэффициент термического расширения, p — отклонение среднего давления от гидростатически равновесного.

Подставляя вместо $Q^{i \dots j}$ величины 1, u^i , t , $u^i u^j$, $u^i t$, t^2 , получим уравнение неразрывности, уравнения Рейнольдса в пренебрежении ламинарными членами, уравнения для вторых моментов

$$\nabla_k U^k = 0$$

$$\frac{\partial U^i}{\partial \tau} + \nabla_k \langle (v^k + U^k) (v^i + U^i) \rangle = - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \nabla^i p$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \nabla_k \langle (v^k + U^k) (\theta + T) \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \langle (v^i + U^i) (v^j + U^j) \rangle + \nabla_k \langle (v^k + U^k) (v^i + U^i) (v^j + U^j) \rangle = \\ & = 2qs^{ij} - 2\alpha \langle v^i v^j \rangle - \beta g^i \langle v^j \theta \rangle - \beta g^j \langle v^i \theta \rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} (U^j \nabla^i p + U^i \nabla^j p) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \langle (v^i + U^i) (\theta + T) \rangle + \nabla_k \langle (v^k + U^k) (v^i + U^i) (\theta + T) \rangle = \\ & = -(\alpha + \gamma) \langle v^i \theta \rangle - \beta g^i \langle \theta^2 \rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} T \nabla^i p \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle (\theta + T)^2 \rangle + \nabla_k \langle (v^k + U^k) (\theta + T)^2 \rangle = -2\gamma \langle \theta^2 \rangle$$

Здесь v — вектор пульсации скорости; θ — пульсация температуры; ∇_k — ковариантная производная [11]. Уравнения (1.6) отличаются от точных уравнений одноточечных моментов скорости, температуры модельными выражениями для корреляций пульсаций давления со сдвигом скорости и с градиентом пульсации температуры

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle p' (\nabla_j v^i + \nabla^i v_j) \rangle &= \alpha \left\{ \langle v^i v_j \rangle - \frac{2}{3} \epsilon s_j^i \right\} \\ - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle p' \nabla^i \theta \rangle &= (\alpha + \gamma) \langle v^i \theta \rangle \end{aligned}$$

При этом диссипация турбулентной энергии моделируется величиной $2\alpha e - 3q$, а диссипация пульсаций температуры — $2\gamma \langle \theta^2 \rangle$.

Предположим, что конвекцией и диффузией дисперсии температурных пульсаций можно пренебречь. Кроме того, положим, что конвекция и диффузия напряжений Рейнольдса, турбулентных потоков тепла пропорциональны конвекции и диффузии турбулентной энергии $e = 0,5 \langle v^k v_k \rangle$ [1]. Тогда для моментов $\langle v^i v^j \rangle$, $\langle v^i \theta \rangle$ получим замкнутую систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \Pi^{ij} + 2qs^{ij} - 2\alpha \langle v^i v^j \rangle &= \frac{\langle v^i v^j \rangle}{e} \left(\frac{\Pi_k^k}{2} + 3q - 2\alpha e \right) \\ \Pi^i - (\alpha + \gamma) \langle v^i \theta \rangle - \beta g^i \frac{\Pi}{\gamma} &= \frac{\langle v^i \theta \rangle}{e} \left(\frac{\Pi_k^k}{2} + 3q - 2\alpha e \right) \\ \Pi^{ij} &= -\langle v^i v^k \rangle \nabla_k U^j - \langle v^j v^k \rangle \nabla_k U^i - \beta g^i \langle v^j \theta \rangle - \beta g^j \langle v^i \theta \rangle \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\Pi^i = -\langle v^k \theta \rangle \nabla_k U^i - \langle v^k v^i \rangle \nabla_k T, \quad \Pi = -\langle v^k \theta \rangle \nabla_k T$$

Здесь Π^i , Π^i , Π — представляют соответственно генерацию турбулентных потоков импульса, тепла, дисперсии температурных пульсаций.

2. Рассмотрим стационарное плоское в среднем течение с постоянным сдвигом скорости и температуры

$$V = W = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial z} = g_x = g_z = 0$$

$$g_y = -g, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \text{const}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \text{const}$$

В этом случае конвекция и диффузия одноточечных моментов обращаются в нуль и уравнения (1.7) линеаризуются. Разрешая последние для коэффициента турбулентной вязкости α_e , числа Прандтля Pr и для отношений среднеквадратичных компонент вектора пульсации скорости к энергии турбулентности получим следующие выражения

$$\alpha_e = \left\{ 3A + \frac{Z_0^2}{2A} + \frac{G_e}{\text{Pr} A} \left(1 + \frac{3(1+\text{Pr})}{2(1+k)} \right) \right\}^{-1}$$

$$\text{Pr} = \frac{k+1}{2} \left\{ 1 + \frac{G_e}{k(k+1)^2 A^2} \right\} \left\{ 1 + \frac{G_e}{2(k+1)A^2} \right\}^{-1}$$

$$\frac{\langle (u-U)^2 \rangle}{e} = \frac{2}{3} \left\{ 1 + \frac{\alpha_e}{A} \left(Z_0^2 + \frac{G_e}{2\text{Pr}} \right) \right\} \quad (2.1)$$

$$\frac{\langle v^2 \rangle}{e} = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \frac{\alpha_e}{A} \left(\frac{Z_0^2}{2} + \frac{G_e}{\text{Pr}} \right) \right\}$$

$$\frac{\langle w^2 \rangle}{e} = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \frac{\alpha_e}{2A} \left(Z_0^2 - \frac{G_e}{\text{Pr}} \right) \right\}$$

$$\alpha_e = -\langle v(u-U) \rangle \left\{ \overline{v} \frac{\partial U}{\partial y} \right\}^{-1}$$

$$\text{Pr} = \langle v(u-U) \rangle \frac{\partial T}{\partial y} \left\{ \langle v \theta \rangle \frac{\partial U}{\partial y} \right\}^{-1}$$

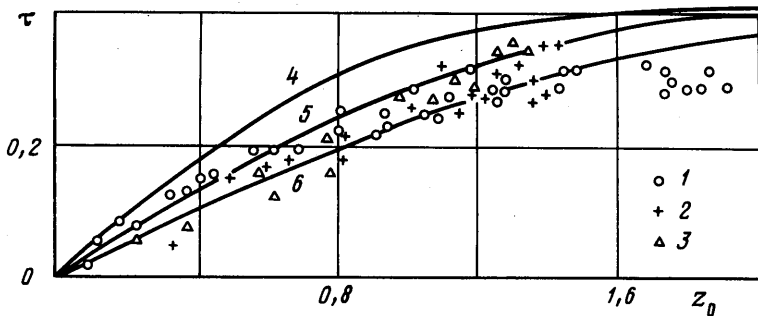
$$Z_0 = l \frac{\partial U}{\partial y} e^{-0.5}, \quad G_e = \beta g l^2 \frac{\partial T}{\partial y} e^{-1}, \quad k = \frac{B}{A}$$

Здесь Z_0 — безразмерный градиент средней скорости; G_e — квадрат отношения частоты Вейселя — Брента к частоте турбулентных пульсаций (число G_e может быть выражено через число Ричардсона $G_e = Z_0^2 \text{Ri}$).

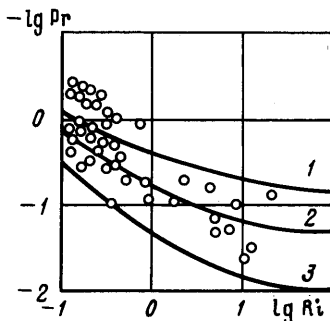
Формулы (2.1) описывают зависимости коэффициентов турбулентного обмена, среднеквадратичных компонент пульсации скорости от числа Ричардсона Ri и сдвига средней скорости Z_0 . Поэтому в экспериментах по изучению влияния стратификации на перенос турбулентного импульса и тепла необходимо определять не только величину Ri , но и Z_0 .

Формулы (2.1) обобщают результаты работ [3–5, 13] на случай турбулентных течений со стратификацией плотности. Они близки к неявным формулам работы [6], в которой постулируется, что плотность вероятности молей описывается двумя различными гауссовскими функциями в верхнем и нижнем полупространствах пространства скоростей.

Для определения констант A и B обратимся к экспериментальным результатам. На фиг. 1 приведены (заимствованные из [13]) экспериментальные данные по пограничному слою на пластине (точки 1), по течению в канале (точки 2), по следу за цилиндром (точки 3). Экспериментальные значения безразмерного трения



Фиг. 1



Фиг. 2

$\tau = -\langle v(u-U) \rangle / \epsilon$ поделены на величину $1 + 0,25l^2 (\partial \ln \epsilon / \partial y)^2$, поскольку градиент энергии приводит к увеличению τ [13], а для течений с однородным сдвигом энергия турбулентности постоянна. Сплошными линиями показаны теоретические зависимости $\tau = \alpha_\epsilon Z_0$ при $A = 0,7; 1,0; 1,3$ (кривые 4-6 соответственно). Наилучшему совпадению с экспериментом соответствует зависимость (2.1) с константой $A = 1,3$.

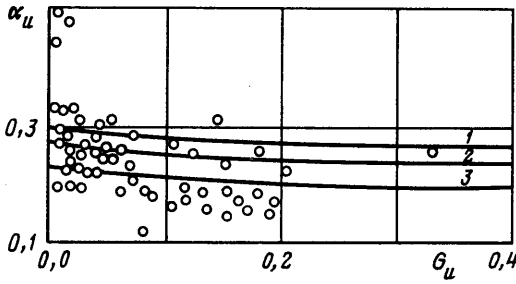
Для определения влияния стратификации на турбулентный перенос (или константы B) воспользуемся данными, приведенными в [6]. Эти данные охватывают течение с постоянным сдвигом средней скорости и температуры в звуковой трубе, а также неоднородные течения со сдвигом средней температуры или солёности. На фиг. 2 представлена зависимость турбулентного числа Прандтля от числа Ri Чардсона. Точки показаны данные [6], сплошными линиями — зависимость (2.1) при $Z_0 = 1; A = 1,3; k = 0,1; 0,05; 0,01$ (кривые 1-3). Силы Архимеда подавляют поперечную компоненту вектора пульсации скорости (а вместе с ней и пульсацию температуры) сильнее, чем продольную, число Pr с ростом Ri увеличивается. Согласно (2.1), число Pr растёт от $0,5(k+1)$, (при $Ri=0$) до k^{-1} (при $Ri \rightarrow \infty$). Несмотря на большой разброс экспериментальных точек, лучше всего соответствует эксперименту зависимость (2.1) с $k = 0,05$.

В течениях с устойчивой стратификацией плотности моли благодаря силам плавучести совершают колебательное движение. Пересекая повторно некоторую контрольную поверхность $y = y_0$, моли переносят противоположный по знаку импульс (по сравнению с предыдущим пересечением), так что, в целом, поток импульса уменьшается. Поэтому с ростом числа Ri в течениях с устойчивой стратификацией турбулентный перенос импульса и тепла подавляется, а в течениях с неустойчивой стратификацией — усиливается. Это находит отражение на фиг. 3, где точками показаны экспериментальные данные [4], а сплошными линиями — теоретическая зависимость $\alpha_u(G_u)$

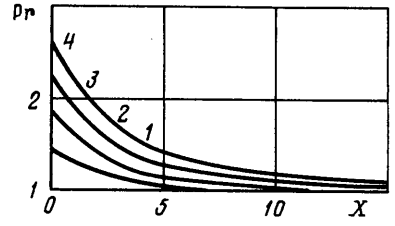
$$\alpha_u = -\langle v(u-U) \rangle \left\{ \sqrt{\langle (u-U)^2 \rangle} l \frac{\partial U}{\partial y} \right\}^{-1}, \quad G_u = \beta g l^2 \frac{\partial T}{\partial y} \langle (u-U)^2 \rangle^{-1}$$

при следующих параметрах: $A = 1,3; k = 0,05; Z_0 = 0,5; 1,0; 1,5$ (кривые 1-3).

3. Рассмотрим турбулентные нестратифицированные осесимметричные струи с закруткой. Направим ось x вдоль оси течения, ось r — по радиусу, ось φ — перпендикулярно осям x, r . Обозначим компоненты средней ско-



Фиг. 3



Фиг. 4

рости вдоль осей x , r , φ буквами U , V , W . Предположим, что средние скорости в струях меняются существенно быстрее по радиусу, чем вдоль по потоку (это предположение справедливо при слабых и умеренных закрутках, когда не возникают рециркуляционные течения [14]). При сделанном предположении физические компоненты тензора генерации Π^i имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi_{\varphi\varphi} &= -2\langle (v-V)(w-W) \rangle \frac{\partial W}{\partial r} \\ \Pi_{xx} &= -2\langle (v-V)(u-U) \rangle \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \Pi_{rx} = -\langle (v-V)^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial r} + \langle (w-W)(u-U) \rangle \frac{W}{r} \\ \Pi_{\varphi x} &= -\langle (v-V)(w-W) \rangle \frac{\partial U}{\partial r} - \langle (v-V)(u-U) \rangle \frac{\partial W}{\partial r} \\ \Pi_{rr} &= 2\langle (v-V)(w-W) \rangle \frac{W}{r}, \\ \Pi_{\varphi r} &= -\langle (v-V)^2 \rangle r \frac{\partial W/r}{\partial r} + \langle (w-W)^2 - (v-V)^2 \rangle \frac{W}{r} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Разрешая уравнения (1.7), для коэффициентов турбулентной вязкости α_{rxrx} , $\alpha_{r\varphi r\varphi}$ и для отношений нормальных напряжений Рейнольдса к энергии турбулентности получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \text{Pr} &= \frac{\alpha_{rxrx}}{\alpha_{r\varphi r\varphi}} = 1 + 3\Omega^2 \{\Omega\Phi + Q^2\}^{-1} \\ \alpha_{r\varphi r\varphi} &= 2C \{4\Omega\Phi + Q^2\}^{-1} \\ \frac{\langle (u-U)^2 \rangle}{e} &= 2\{C + \text{Pr} \alpha_{r\varphi r\varphi} Z^2\} Q^{-1} \\ \frac{\langle (v-V)^2 \rangle}{e} &= 2\{C + \alpha_{r\varphi r\varphi} \Omega(\Omega - \Phi)\} Q^{-1} \\ \frac{\langle (w-W)^2 \rangle}{e} &= 2\{C + \alpha_{r\varphi r\varphi} \Phi(\Phi - \Omega)\} Q^{-1} \\ \alpha_{r\varphi r\varphi} &= -\langle (v-V)(w-W) \rangle \left\{ \sqrt{e} \bar{l} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \right\}^{-1}, \quad C = lq e^{-1,5} \\ \alpha_{rxrx} &= -\langle (v-V)(u-U) \rangle \left\{ \sqrt{e} \bar{l} \frac{\partial U}{\partial r} \right\}^{-1}, \quad Q = 3C + \alpha_{r\varphi r\varphi} \{\text{Pr} Z^2 + (\Phi - \Omega)^2\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$Z = l \frac{\partial U}{\partial r} e^{-0,5}, \quad \Phi = l \frac{\partial W}{\partial r} e^{-0,5}, \quad \Omega = l W r^{-1} e^{-0,5}$$

Здесь Z , Φ — безразмерные градиенты средней продольной и окружной скоростей; Ω — отношение угловой скорости к частоте турбулентных пульсаций. Если для диссипации турбулентной энергии воспользоваться аппроксимацией [15] $\epsilon = C_\epsilon e^{1,5} l^{-1}$ и учесть, что ϵ моделируется величиной $2\alpha\epsilon - 3g$, то константа C может быть определена: $C = (2A - C_\epsilon)/3$.

Формулы (3.2) представляют рекуррентные соотношения для коэффициентов α_{rxx} , $\alpha_{r\varphi\varphi}$. Они значительно упрощаются для течений, в которых конвекцией и диффузией турбулентной энергии можно пренебречь. В этом случае диссипация ϵ уравнивается генерацией $0,5\Pi_k^k$ и формулы (3.2) становятся явными. В напорных струях параметры Z , Ω , Φ порядка единицы. Если линеаризовать (3.2) по параметрам Z , Ω , Φ , то получим явные формулы, аналогичные предложенным в [4]. В общем случае явные формулы для коэффициентов турбулентного переноса построить не удастся, что связано с нелинейной параметризацией конвекции и диффузии рейнольдсовых напряжений.

Согласно (3.2), коэффициенты вязкости α_{rxx} , $\alpha_{r\varphi\varphi}$ при увеличении закрутки падают. Это связано с ростом частоты колебаний молей $2Wr^{-2}\partial/\partial r(rW)$. Уменьшение вязкости в течениях с закруткой аналогично уменьшению вязкости в устойчиво стратифицированных течениях с ростом числа Ричардсона. Отметим, что в закрученных напорных струях продольная, окружная компоненты средней скорости, энергия турбулентности убывают, соответственно, как x^{-1} , x^{-2} , x^{-2} , а масштаб турбулентности растет пропорционально продольному расстоянию x . Поэтому при удалении вниз по потоку параметры Ω , Φ стремятся к нулю, а параметр Z к конечному пределу. Следовательно, достаточно далеко от источника струи турбулентная вязкость становится изотропной. Это находит отражение на фиг. 4, где показано убывание числа $R\Gamma$ вдоль оси струи при четырех степенях закрутки $S=0,13$; $0,23$; $0,42$; $0,6$ с ростом продольного расстояния $X=x/D$. Закрутка определялась как отношение момента количества движения струи к ее продольному импульсу и начальному радиусу $D/2$. При нахождении числа $R\Gamma$ использовались экспериментальные данные [14] (в формулах (3.2) $C=0,73$). Поскольку энергия и масштаб турбулентности в [14] не измерялись, то считалось, что на оси струи $e^{0,5}=0,3U$, а масштаб равен одной пятой части радиуса струи $l=0,06(x-x_0)$ ($x_0=-3D$ — виртуальное начало). Из рисунка следует, что при малых величинах закрутки потока ($S \leq 0,1$) во всем поле течения, а при больших величинах закрутки ($S \geq 0,4$), начиная, примерно, с 10 калибров (по D), для описания струй могут успешно применяться стандартные двухпараметрические модели турбулентности, использующие концепцию изотропной турбулентной вязкости. В то же время при сильных закрутках для описания ближнего поля течения должны применяться модели турбулентности с неизотропной вязкостью [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Роди В. Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 227–322.
2. Чанг П. М. Упрощенная статистическая модель турбулентности в химически реагирующем потоке с поперечным сдвигом // Ракетная техника и космонавтика. 1969. Т. 7. № 10. С. 195–207.
3. Глушко Г. С. Модель турбулентного смешения в потоках со сдвигом // Турбулентные течения. М.: Наука, 1974. С. 56–61.
4. Амбарцумян Е. Н., Глушко Г. С., Гумилевский А. Г., Крюков И. А. Математическая модель турбулентных процессов переноса: Препринт № 461. М.: ИМП АН СССР, 1990. 51 с.
5. Фрост В. А. Модель турбулентного диффузионного факела пламени // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1973. № 6. С. 108–116.

6. Ли Р., Чанг Ш. М. Влияние архимедовых сил на турбулентное течение с поперечным сдвигом // Ракетная техника и космонавтика. 1975. Т. 13. № 12. С. 58-68.
7. Онуфриев А. Т. О модельном уравнении для плотности вероятности в полуэмпирической теории турбулентного переноса // Турбулентные течения. М.: Наука, 1971. С. 110-117.
8. Haworth D. C., Pope S. B. A generalized Langevin model for turbulent flows // Phys. Fluids. 1986. V. 29. № 2. P. 387-405.
9. Haworth D. C., Pope S. B. A pdf modeling study of self-similar turbulent free shear flows // Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 4. P. 1026-1044.
10. Кузнецов В. Р., Сабельников В. А. Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986. 287 с.
11. Векун И. И. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.
12. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988. 447 с.
13. Глушко Г. С. Некоторые особенности турбулентных течений несжимаемой жидкости с поперечным сдвигом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 4. С. 128-136.
14. Хигир Н. А., Червинский А. Экспериментальное исследование закрученного вихревого движения в струях // Тр. амер. об-ва инж.-мех. Прикл. механика. 1967. Т. 34. № 2. С. 207-216.
15. Rotta J. Statistische Theorie Nichtthomogener Turbulenz // Z. Phys. 1951. B. 129. № 6. S. 547-572.

Москва

Поступила в редакцию
1.III.1990