МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1992

УДК 532.517.4

© 1992 г. С. Р. БОГДАНОВ, С. И. СОБОЛЕВ

К ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОРРЕЛЯЦИЙ ДАВЛЕНИЕ — СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

На основе спектрального представления «быстрой» части $\varphi_{ij,2}$ тензора корреляций $\langle p(\partial u_i/\partial x_j)\rangle$ с использованием теоремы Крамера получено неравенство $\varphi_{ij,2}(\partial u_j/\partial x_i)\geqslant 0$. В отличие от условий реализуемости оно может служить непосредственным и весьма жестким критерием модельных выражений для $\varphi_{ij,2}$. В частности, показано, что наиболее известные из подобных выражений этому критерию не удовлетворяют.

1. При расчетах турбулентных течений широко используются модели так называемого первого порядка, в рамках которых для компонент тензора рейнольдсовых напряжений $\langle u_iu_j\rangle$ используются те или иные алгебраические представления через тензор средних скоростей деформации $U_{ij}\equiv\partial U_i/\partial x_j$. Физически более содержательными и гибкими являются модели второго порядка [1, 2], которые основаны на использовании уравнений переноса для $\langle u_iu_j\rangle$. При этом автоматически учитывается нелокальный характер связи между тензорами $\langle u_iu_j\rangle$ и U_{ij}, а также появляется возможность более адекватного описания межкомпонентного переноса. Однако здесь помимо чисто вычислительных возникают и принципиальные трудности, связанные прежде всего с моделированием тензора $\varphi_{ij}\equiv\langle p(\partial u_i/\partial x_j)\rangle$, характеризующего корреляции пульсаций давления со скоростями деформаций. Его нелинейная часть $\varphi_{ij,1}$ обычно аппроксимируется соотношением Ротта

$$(\varphi_{ij,1})_s\sim(\langle u_iu_j\rangle-\langle u_l^2\rangle\delta_{ij}/3)$$

Здесь и в дальнейшем индекс s означает симметризацию по свободным индексам, по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Для «быстрой» (линейной) части этого тензора $\varphi_{ij,2}$ предложено большое число полуэмпирических выражений. Среди них одним из наиболее распространенных является следующее представление [3]:

$$(\varphi_{ij,2})_s=-\frac{1}{11}(C_2+8)\left(P_{ij}-\frac{2}{3}P\delta_{ij}\right)-\frac{1}{55}(15C_2-1)\times$$
$$\times(U_{ij}+U_{ji})\langle u_l^2\rangle-\frac{2}{11}(4C_2-1)\left(D_{ij}-\frac{2}{3}P\delta_{ij}\right)\qquad(1.1)$$
$$P_{ij}=-(\langle u_iu_l\rangle U_{jl})_s,\quad P={}^1/{}_2P_{ii}$$
$$D_{ij}=-(\langle u_iu_l\rangle U_{lj})_s$$

Здесь P_{ij} — тензор, описывающий порождение компоненты $\langle u_iu_j\rangle$ за счет градиента средней скорости, C_2 — некоторая константа.

Первое слагаемое в правой части (1.1) предположительно играет доминирующую роль, поэтому вместо (1.1) часто используется так называемая квазиизотропная модель

$$(\varphi_{ij,\,2})_s=-\gamma\,(P_{ij}-{}^2/_3\delta_{ij}) \tag{1.2}$$

Соотношение (1.2) допускает простую физическую интерпретацию: корреляции $\langle p(\partial u_i/\partial x_j)\rangle$ выравнивают степени порождения различных компонент $\langle u_iu_j\rangle$.

Из сравнения с экспериментом для констант γ и C_2 предложены приближенные значения 0,6 и 0,4 соответственно.

Отмеченная выше трудность, связанная с представлениями (1.1), (1.2) и аналогичных им, заключается в том, что при использовании любого из них не гарантировано выполнение так называемых условий реализуемости для решений системы уравнений переноса. К этим условиям относятся, в частности, неравенства

$$\langle u_1^2\rangle\geqslant 0;\ \langle u_2^2\rangle\geqslant 0;\ \langle u_1u_2\rangle^2\leqslant\langle u_1^2\rangle\langle u_2^2\rangle \tag{1.3}$$

Вероятность непредумышленного нарушения этих условий, как отмечено в [2], значительна. Для исключения таких возможностей следует отказаться от предположения о постоянстве коэффициентов (например, C_2) и моделировать их зависимость от инвариантов тензора $\langle u_iu_j\rangle$. Такие попытки были предприняты, например, в работах [2, 4, 5], при этом для $\varphi_{ij,\,2}$ были получены весьма громоздкие выражения, которые в практических расчетах пока не использовались. Кроме того, несмотря на использование физически содержательных идей, указанные выражения построены на основе формальных интерполяционных формул, так что проблема реализуемости (и особенно выполнения последнего из условий (1.3)) фактически не снимается.

В данной работе выводится неравенство, представляющее собой ограничение на возможные значения компонент тензора $\langle p(\partial u_i/\partial x_j)\rangle$. В отличие от условий реализуемости это неравенство может служить непосредственным критерием адекватности моделей в том смысле, что его проверку можно осуществить, не решая систему уравнений переноса.

2. Используя условие несжимаемости, для той части пульсационного давления p, которая обусловлена неоднородностью средней скорости, нетрудно получить соотношение

$$p(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi}\int U_{il}(\mathbf{x}')\frac{\partial u_l(\mathbf{x}')}{\partial x_i'}\frac{d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{2.1}$$

Из (2.1) с учетом условия локальной однородности $l\ll L$ (l — интегральный масштаб турбулентности, L — характерный внешний масштаб длины) имеем [6]

$$\left\langle p(\mathbf{x}_1)\left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x}_2)}{\partial x_{2j}}\right)\right\rangle=-\frac{1}{2\pi}U_{lm}(x)\int\frac{\partial^2R_{im}(\mathbf{x},\mathbf{r})}{\partial r_l\,\partial r_j}\frac{d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{2.2}$$

$$R_{im}(\mathbf{x},\mathbf{r})\equiv\langle u_i(\mathbf{x})u_m(\mathbf{x}+\mathbf{r}),\qquad \mathbf{x}=\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2),\qquad \mathbf{r}=\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1$$

Здесь R_{im} — тензор корреляций скорости.

Из формулы (2.2) с использованием спектрального тензора $F_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{k})$ получаем представление для $\varphi_{ij,\,2}$ [2, 4]

$$\varphi_{ij,2}=2U_{lm}\int F_{im}\theta_l\theta_j\,dk\equiv 2U_{lm}f_{im}^{(lj)} \tag{2.3}$$

$$F_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{k})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int R_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})d\mathbf{r},\qquad \boldsymbol{\theta}=\frac{\mathbf{k}}{k}$$

Соотношение (2.3) является отправной точкой полуэмпирического моделирования величины $\varphi_{ij,\,2}$, при этом основная трудность заключается в отыскании компонент тензора четвертого порядка $f_{mi}^{(lj)}$. Они должны удовлетворять следующим очевидным условиям:

$$f_{im}^{(lj)} = f_{mi}^{(lj)} = f_{mi}^{(jl)}; \qquad f_{im}^{(ll)} = \langle u_i u_m \rangle; \qquad f_{im}^{(lm)} = 0$$

Этих условий, однако, недостаточно для определения всех 81 компонент указанного тензора — необходимы дополнительные предположения. Так, в [4] принята гипотеза о совпадении собственных векторов тензоров $f_{mi}^{(lj)}$ и $\langle u_i u_j \rangle$; в результате число неизвестных компонент удается уменьшить до трех.

В [2] предполагается, что тензор $f_{mi}^{(lj)}$ является изотропной функцией тензора анизотропии $b_{ij} \equiv \langle u_i u_j \rangle / \langle u_l^2 \rangle - {}^1/_3 \delta_{ij}$, при этом возникает девять неизвестных коэффициентов, зависящих от инвариантов тензора b_{ij}. Если далее ограничиться линейным по b_{ij} приближением, неизвестным остается лишь один коэффициент, который обычно считают постоянным. В результате для $\varphi_{ij,2}$ получается выражение

$$\varphi_{ij,2} = -\frac{2}{3} U_{lj} \langle u_l u_i \rangle + \frac{2}{3} U_{il} \langle u_l u_j \rangle + \frac{1}{15} \langle u_l^2 \rangle (4U_{ij} - U_{ji}) +$$
$$+ 2C \Big(\delta_{ij} U_{lm} \langle u_l u_m \rangle + U_{jl} \langle u_l u_i \rangle + U_{li} \langle u_l u_j \rangle + \frac{1}{3} \langle u_l^2 \rangle (4U_{ij} - U_{ji}) -$$
$$- \frac{11}{3} U_{lj} \langle u_l u_i \rangle - \frac{4}{3} U_{il} \langle u_l u_j \rangle \Big) \qquad (2.4)$$

$C = \mathrm{const}$

При симметризации (2.4) по индексам i, j получаем представление (1.1) с $C_2 = -{}^2/_3 (11C+1)$.

В работе [7] моделирование осуществляется на основе представления спектрального тензора F_{ij} в виде изотропной функции вектора $\boldsymbol{\theta}$ и тензора b_{ij}.

Из формулы (2.3) можно, однако, непосредственно вывести существенные ограничения на компоненты тензора $\varphi_{ij,2}$ без использования каких-либо дополнительных предположений. Воспользуемся для этого теоремой Крамера [8], согласно которой

$$F_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j \geqslant 0 \qquad (2.5)$$

Здесь $\boldsymbol{\xi}$ — произвольный вектор, черта над величиной означает комплексное сопряжение.

Если вектор $\boldsymbol{\xi}$ не зависит от $\boldsymbol{\theta}$, условие (2.5) после интегрирования по всем k сводится к известному ограничению: матрица $\langle u_i u_j \rangle$ должна быть положительно определенной и, в частности, должны выполняться условия (1.3).

С другой стороны, выбирая в качестве ξ_i вектор $U_{li}\theta_l$, после интегрирования (2.5) по всем $\mathbf{k}$ получим

$$\int F_{ij} (U_{li} \theta_l)(U_{qj} \theta_q) dk \geqslant 0 \qquad (2.6)$$

Из сравнения формул (2.3) и (2.6) имеем

$$\varphi_{ij,2} U_{ji} \geqslant 0 \qquad (2.7)$$

Простое неравенство (2.7) представляет собой довольно жесткое ограничение: оно должно выполняться для любого допустимого с физической точки зрения тензора U_{ij}, а также тех тензоров (чаще всего b_{ij}), которые фигурируют в модельном выражении для $\langle p (\partial u_i / \partial x_j) \rangle$.

3. Проверим выполнение неравенства (2.7) для наиболее распространенных из описанных выше моделей.

Сворачивая в (2.4) индексы i, j с U_{ij}, с использованием (2.7) получим

$$-\frac{2}{3}U_{lj}U_{ij}\langle u_lu_i\rangle+\frac{2}{3}U_{il}U_{ij}\langle u_lu_j\rangle+\frac{1}{15}\langle u_l^2\rangle(4U_{ij}U_{ij}-U_{ij}U_{ji})+$$
$$+2C\Big(U_{jl}U_{ij}\langle u_lu_i\rangle+U_{li}U_{ij}\langle u_lu_j\rangle+\frac{1}{3}\langle u_l^2\rangle(4U_{ij}U_{ij}-U_{ij}U_{ji})-$$
$$-\frac{11}{3}U_{lj}U_{ij}\langle u_lu_i\rangle-\frac{4}{3}U_{il}U_{ij}\langle u_lu_j\rangle\Big)\geqslant 0 \qquad (3.1)$$

Неравенство (3.1), как было отмечено, должно выполняться при любых U_{ij} и $\langle u_iu_j\rangle$. Характер возникающих при этом ограничений проиллюстрируем на простейшем примере, когда $U_{ij}=\delta_{i1}\delta_{j2}U_{12}$. Соотношение (3.1) при этом существенно упрощается

$$\alpha_2-\alpha_1+{}^2/_5+C(4-11\alpha_1-4\alpha_2)\geqslant 0 \qquad (3.2)$$

Здесь $\alpha_1=\langle u_1^2\rangle/\langle u_l^2\rangle$ – относительная интенсивность пульсаций вдоль оси 1; α_2, α_3 определяются аналогично.

Формула (3.2) должна выполняться при любых α_1 и α_2 из промежутка [0, 1], однако очевидно, что ни при каком значении константы C этого добиться невозможно. И наоборот, если для C использовать, например, рекомендуемое значение $-{}^1/_6$ (соответствующее $C_2=0{,}4$), то из (3.2) получаем ограничение

$$\alpha_3-\alpha_2\leqslant 51/75 \qquad (3.3)$$

При значениях α_3, близких к единице, условие (3.3), очевидно, не выполняется. Это свидетельствует о некорректности аппроксимации (2.4) или ее неприемлемости для расчета сильно несимметричных течений. На последнее обстоятельство указывается также в [1, 2, 7].

Аналогичные результаты дает тестирование модели работы [5]. В одном из ее вариантов для тензора $f_{mj}^{(li)}$ постулируется представление

$$f_{mj}^{(li)}+f_{mi}^{(lj)}=[2C_1\lambda_l\lambda_m+(C_3-C_1-C_2)\mu_l\mu_m+(C_2-C_1-C_3)\varkappa_l\varkappa_m]\lambda_i\lambda_j+$$
$$+[(C_3-C_1-C_2)\lambda_l\lambda_m+2C_2\mu_l\mu_m+(C_1-C_2-C_3)\varkappa_l\varkappa_m]\mu_i\mu_j+$$
$$+[(C_2-C_1-C_3)\lambda_l\lambda_m+(C_1-C_2-C_3)\mu_l\mu_m+2C_3\varkappa_l\varkappa_m]\varkappa_i\varkappa_j \qquad (3.4)$$

Здесь λ, μ, $\varkappa$ – собственные векторы тензора $\langle u_iu_j\rangle$, соответствующие оси в дальнейшем обозначаются индексами 1, 2, 3. Коэффициенты C_i предполагаются пропорциональными интенсивностям пульсаций вдоль соответствующих осей: $C_1=\text{const}\langle u_1^2\rangle$, ..., значение константы одинаково для всех трех соотношений.

В данном случае для проверки модельного выражения (3.4) удобно использовать диагональный тензор U_{ij}, его отличные от нуля компоненты запишем в виде [9] $U_{11}=1$, $U_{22}=F$, $U_{33}=-(F+1)$. Для симметричного тензора неравенство (2.7) можно переписать так: $(\varphi_{ij,2})_sU_{ij}\geqslant 0$, или, что эквивалентно: $U_{lm}(f_{mj}^{(li)}+f_{mi}^{(lj)})U_{ij}\geqslant 0$. В результате, сворачивая в (3.4) индексы l, m и i, j с U_{lm} и U_{ij}, получим

$$C_1(1-F)(F+2)+C_2(F-1)(2F+1)+C_3(F+2)(2F+1)\geqslant 0 \qquad (3.5)$$

Даже простейшие частные случаи дают контрпримеры, при которых нарушается условие (3.5). Так, например, при $F=-1$ (плоское искажение) из (3.5) имеем $\alpha_3\leqslant{}^2/_3$. Следовательно, в рамках рассматриваемой модели при значениях α_3, близких к единице, неравенство (2.7) не выполняется.

Таким образом, обе рассмотренные модели неадекватны с точки зрения выполнения критерия (2.7). Практически их можно использовать в качестве формальной аппроксимации лишь при расчете слабонесимметричных течений. В целом этот вывод может свидетельствовать о том, что проблема турбулентности является еще более нелокальной, чем это предполагается в рамках моделей второго порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаундер Б. Е.* Модели замыкания для напряжений – третье поколение // Турбулентные сдвиговые течения. 1. М.: Машиностроение, 1982. С. 270–279.
2. *Ламли Дж.* Модели второго порядка для турбулентных течений // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 7–34.
3. *Launder B. E., Reece G. J., Rodi W.* Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure // J. Fluid Mech. 1975. V. 68. № 3. P. 537–566.
4. *Gallagher B., Magaard L., Gutteling E.* Closure for velocity pressure-gradient correlations in turbulent shear flow // J. Phys. Fluids. 1981. V. 24. № 9. P. 1605–1610.
5. *Gallagher B.* Testing a closure for velocity pressure-gradient correlations in nonuniform turbulent flow // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 7. P. 2083–2087.
6. *Ротта Ю. Х.* Семейство моделей турбулентности для трехмерных пограничных слоев // Турбулентные сдвиговые течения. 1. М.: Машиностроение, 1982. С. 279–291.
7. *Матье Ж., Жандель Д.* Патологическое поведение турбулентных течений и спектральный метод // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 35–102.
8. *Cramer H.* On the theory of stationary random processes // Ann. Mathem. 1940. V. 41. № 1. P. 215–230.
9. *Reynolds A. J., Tucker H. J.* The distortion of turbulence by general uniform irrotational strain // J. Fluid Mech. 1975. V. 68. № 4. P. 673–693.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
31.I.1991