

УДК 532.517.2.013.4

© 1992 г. С. В. МАНУЙЛОВИЧ

О ПРОХОЖДЕНИИ ВОЛНЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЧЕРЕЗ УЧАСТОК КАНАЛА ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

Проблема ламинаризации течений вязкой жидкости делает актуальным поиск способов подавления неустойчивых колебаний потока. По характеру подавления эти способы подразделяются на два основных типа. К первому типу относятся различного рода распределенные воздействия, стабилизирующие осредненное течение и, как следствие, уменьшающие коэффициенты усиления волн неустойчивости. Классическими примерами таких способов могут служить отсос газа и охлаждение обтекаемой поверхности [1]. Второй тип составляют методы непосредственного уменьшения амплитуды неустойчивых колебаний путем формирования в потоке искусственной волны неустойчивости в противофазе к волне естественного происхождения. Возможность подавления волны Толлмина – Шлихтинга на основе упомянутого принципа суперпозиции была впервые продемонстрирована в [2]. Ниже исследуется новый способ ослабления неустойчивых колебаний, основанный на взаимодействии волны Толлмина – Шлихтинга с малой двумерной неровностью обтекаемой поверхности. Механизм взаимодействия рассмотрен на примере простейшего из вязких течений – плоского течения Пуазейля, обладающего наряду со свойством неустойчивости важным свойством продольной однородности, что позволяет произвести точный количественный анализ явления. Полученные результаты допускают эквивалентные физические интерпретации в рамках методов обоих вышеупомянутых типов: количественные характеристики ослабления волны Толлмина – Шлихтинга могут быть получены как при изучении стабилизирующего влияния неровностей стенок, так и из анализа образования вторичной волны неустойчивости при рассеянии основной волны на неоднородности течения в окрестности искривленных стенок.

1. Постановка задачи. Будем изучать двумерные возмущения плоского течения Пуазейля – установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными плоскими стенками под действием перепада давления. Обезразмерим параметры течения, выбрав в качестве основных единиц максимальную скорость невозмущенного потока и полуширину канала. Числом Рейнольдса R назовем величину, обратную кинематическому коэффициенту вязкости.

Введем декартову систему координат с началом в центре канала, ось x направим вдоль вектора скорости невозмущенного течения, а ось y – по нормали к стенкам. Безразмерное время обозначим t . Возмущение функции тока $\psi(t, x, y)$ удовлетворяет уравнению [3]

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \left(1 - y^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \left(2 - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{R} \Delta^2 \psi = 0 \quad (1.1)$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Будем предполагать, что из области $x < 0$ вниз по течению распространяется гармоническая по времени волна Толлмина – Шлихтинга

$$\psi \sim \operatorname{Re}(\varepsilon \psi_1), \quad |\varepsilon| \ll 1 \quad (1.2)$$
$$\psi_1(t, x, y) = \varphi_1(y) \exp(i\alpha x - i\omega t)$$

Здесь $\omega > 0$ — частота волны, α — комплексное волновое число, ε — комплексная амплитуда. Такая волна может быть порождена колебаниями вибратора, установленного выше по потоку [4, 5]. Поскольку причина возникновения волны выходит за рамки рассматриваемой постановки, формулу (1.2) в дальнейшем будем считать асимптотическим условием, налагаемым на возмущение при $x \rightarrow -\infty$. Заметим, однако, что при фиксированном ε рассматриваемая область течения фактически ограничена условием малости возмущения (1.2): $|\varepsilon| \exp(-x \operatorname{Im} \alpha) \ll 1$, т. е. имеет, в зависимости от знака $\operatorname{Im} \alpha$, конечную протяженность либо вниз, либо вверх по потоку.

Предположим далее, что в окрестности начала координат волна Толмина — Шлихтинга проходит через неоднородный участок течения, порожденный слабым локальным искривлением стенок канала. Формулу искривления зададим соотношениями

$$y_{+,-} = \pm 1 + h f_{+,-}(x), \quad 0 < h \ll 1 \quad (1.3)$$

где h — параметр, характеризующий высоту неровностей, а $f_{+,-}$ — финитные функции (индекс плюс соответствует верхней, минус — нижней стенке). На стенках (1.3) должны быть выставлены условия прилипания.

Решение уравнения (1.1), описывающее прохождение волны (1.2) между искривленными стенками (1.3), будем искать в виде

$$\psi = \operatorname{Re}(\varepsilon \psi_1) + h \psi_2 + \operatorname{Re}(\varepsilon h \psi_3) + O(|\varepsilon|^2) + O(h^2) \quad (1.4)$$

Первое слагаемое в формуле (1.4) задает классическую волну Толмина — Шлихтинга, распространяющуюся в канале с плоскими стенками. Второе слагаемое соответствует стационарному обтеканию неровностей (1.3), исследуемому в линейном приближении. Нелинейные поправки к возмущениям этих двух видов вынесены в остаточные члены амплитудного разложения (1.4). Третий член разложения (1.4) описывает нелинейное взаимодействие волны (1.2) со стационарной неоднородностью течения, порожденной неровностями (1.3). Гармоничность по времени набегающей волны в сочетании с продольной неоднородностью течения в окрестности неровностей создают необходимые физические предпосылки для формирования вторичной волны Толмина — Шлихтинга, изменяющей амплитуду исходной. Введем количественную характеристику этого изменения — комплексный коэффициент прохождения K , полагая, что выражение для прошедшей волны получается из формулы (1.2) для набегающей с помощью замены $\varepsilon \rightarrow K\varepsilon$. Основной целью данной работы является нахождение коэффициента K . Ниже рассмотрены также некоторые другие нелинейные эффекты, возникающие при рассеянии волны неустойчивости на неоднородности течения в окрестности искривленных стенок.

Используя свойство симметрии невозмущенного потока относительно плоскости $y=0$, будем разделять возмущение на симметричную и антисимметричную части. В литературе принято (см., например, [6]) называть симметричными возмущения, для которых функция ψ является четной по переменной y . С физической точки зрения, естественнее называть симметричными те возмущения, для которых четная функция — продольная компонента возмущенной скорости, а вертикальная компонента и возмущение функции тока являются нечетными функциями. Именно такой терминологии будем придерживаться в дальнейшем, полагая $\psi_{2,s} = \psi_{2s,3s} + \psi_{2a,3a}$, где первые слагаемые — нечетные, а вторые — четные по переменной y . Функции, задающие форму неровностей стенок, также разделим на симметричную и антисимметричную части: $f_{s,a} = (f_+ \mp f_-)/2$. Как известно [7], функция φ_1 является четной, так что волна

Толлина – Шлихтинга представляет собой антисимметричное возмущение потока.

2. Линейное приближение. Подставим амплитудное разложение (1.4) в уравнение (1.1) и соберем члены при одинаковых комбинациях малых параметров ϵ и h . Выделяя члены порядка ϵ и используя условия прилипания и симметрии, получим краевую задачу для функции φ_1 – задачу на собственные значения для уравнения Орра – Зоммерфельда

$$\left(1 - y^2 - \frac{\omega}{\alpha}\right) \Delta_\alpha \varphi_1 + 2\varphi_1 - \frac{1}{i\alpha R} \Delta_\alpha^2 \varphi_1 = 0, \quad \Delta_\alpha = \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2$$

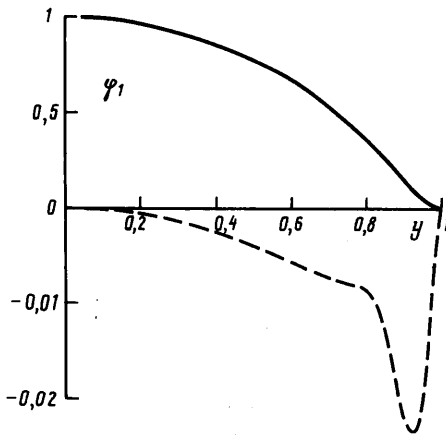
$$\varphi_1(1) = \frac{d\varphi_1}{dy}(1) = \frac{d\varphi_1}{dy}(0) = \frac{d^3\varphi_1}{dy^3}(0) = 0, \quad \varphi_1(0) = 1$$
(2.1)

Уравнение (2.1) и первые четыре краевых условия являются однородными; они определяют волновое число $\alpha(\omega, R)$, соответствующее неустойчивой моде. Последнее краевое условие нормирует собственную функцию. Решение задачи (2.1) для $R = 10\,000$, $\omega = 0,22$ дает значение $\alpha = 0,9487 - i0,0123$, график соответствующей собственной функции приведен на фиг. 1 (сплошная линия – $\text{Re}\varphi_1$, штриховая – $\text{Im}\varphi_1$).

Сгруппируем теперь члены порядка h . Как и функции ψ_1 , функции $\psi_{2s, 2a}$ удовлетворяют линеаризованному уравнению (1.1)

$$(1 - y^2) \frac{\partial \Delta \psi_{2s, 2a}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi_{2s, 2a}}{\partial x} - \frac{1}{R} \Delta^2 \psi_{2s, 2a} = 0$$
(2.2)

Здесь опущен лишь нестационарный член, тождественно равный нулю в рассматриваемом случае. Краевые условия для уравнения (2.2), задаваемые при $y=1$ и $y=0$, следуют из условий прилипания и симметрии



Фиг. 1

$$\frac{\partial \psi_{2s, 2a}}{\partial x}(x, 1) = 0, \quad \frac{\partial \psi_{2s, 2a}}{\partial y}(x, 1) = 2f_{s, a}(x)$$
(2.3)

$$\psi_{2s}(x, 0) = \frac{\partial \psi_{2a}}{\partial y}(x, 0) =$$

$$= \frac{\partial^2 \psi_{2s}}{\partial y^2}(x, 0) = \frac{\partial^3 \psi_{2a}}{\partial y^3}(x, 0) = 0$$

Второе условие (2.3) компенсирует невязку порядка h – ненулевую скорость не возмущенного потока на неровностях (1.3). Кроме условий (2.3) на решение задачи (2.2), (2.3) должно быть наложено условие затухания при $x \rightarrow \pm\infty$.

Основное течение однородно в продольном направлении. Это обстоятельство делает эффективным при исследовании структуры возмущений аппарат преобразования Фурье по переменной x . Представим искомое решение задачи (2.2), (2.3) в виде

$$\psi_{2s, 2a}(x, y) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{s, a}^*(k) \varphi_{2s, 2a}(y; k) \exp(ikx) dk$$
(2.4)

$$f_{s, a}^* = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{s, a}(x) \exp(-ikx) dx$$

Преобразование (2.4) исключает из рассматриваемых краевых задач дифференцирование по x и сводит их к неоднородным краевым задачам для обыкновенного дифференциального уравнения – стационарного аналога уравнения Орра – Зоммер-

фельда; роль неизвестных функций играют нормированные фурье-образы $\varphi_{2s, 2a}$:

$$(1-y^2)\Delta_k\varphi_{2s, 2a}+2\varphi_{2s, 2a}-\frac{1}{ikR}\Delta k^2\varphi_{2s, 2a}=0 \quad (2.5)$$

$$\varphi_{2s, 2a}(1)=0, \quad \frac{d\varphi_{2s, 2a}}{dy}(1)=2$$

$$\varphi_{2s}(0)=\frac{d\varphi_{2a}}{dy}(0)=\frac{d^2\varphi_{2s}}{dy^2}(0)=\frac{d^3\varphi_{2a}}{dy^3}(0)=0$$

Везде, где это не является необходимым, у функций $\varphi_{2s, 2a}$ (а также у вводимых в разд. 3 функций $\varphi_{3s, 3a}$) опущен второй аргумент. Отметим, что исследуемая здесь задача обтекания неровностей — частный случай задачи о восприимчивости течения Пуазейля к локализованным вибрациям стенок, рассмотренной в [5]: математическая постановка [5] сводится к соотношениям (2.2)–(2.5), если частоту вибрации положить равной нулю. Воспользуемся формулой комплексного анализа, описывающей поведение интеграла Фурье (2.4) в области, лежащей вниз по потоку от места локализации неоднородных граничных условий (суммирование ведется по бесконечному множеству полюсов фурье-амплитуды, расположенных в верхней полуплоскости):

$\text{Im } k_{2s, 2a}^{(n)} > 0$; вычеты вычисляются в точках $k = k_{2s, 2a}^{(n)}$

$$\varphi_{2s, 2a} = \sum f_{s, a}^* [k_{2s, 2a}^{(n)}] \varphi_{2s, 2a}^{(n)}(y) \exp[ik_{2s, 2a}^{(n)} x] \quad (2.6)$$

$$\varphi_{2s, 2a}^{(n)} = \text{res}[i\varphi_{2s, 2a}(y; k)], \quad x > \sup(\text{supp } f_{s, a}^{(n)})$$

Таким образом, вниз по течению от участка с искривленными стенками возмущения $\varphi_{2s, 2a}$ представляют собой суперпозицию стационарных мод: функции $\varphi_{2s, 2a}^{(n)}$

удовлетворяют уравнению (2.5) и однородным краевым условиям. Численный поиск, выполненный для $R=10\,000$ в квадрате $0 \leq \text{Re}k \leq 1$, $0 \leq \text{Im}k \leq 1$ (в стационарном случае особые точки зеркально-симметричны относительно мнимой оси), выявил 24 симметричные и 24 антисимметричные моды. Всем этим модам соответствуют чисто мнимые волновые числа (за исключением антисимметричной моды с $k_{2a} = 0,2227 + i0,4584$). Скорость затухания решений (2.6) при $x \rightarrow +\infty$ определяется модами, имеющими наименьший декремент. При $R=10\,000$ минимальный декремент затухания имеет симметричная мода с волновым числом $k_{2s}^{(1)} = i0,0028$ и антисимметричная с $k_{2a}^{(1)} = i0,0073$.

3. Взаимодействие волны с неровностью. В линейном приближении возмущения не взаимодействуют друг с другом. Для исследования процесса взаимодействия волны Толлмина — Шлихтинга со стационарной неоднородностью течения, вызванной локальным искривлением стенок канала, следует изучить члены порядка ϵh .

Функции $\varphi_{3s, 3a}$ удовлетворяют линейному неоднородному уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta \varphi_{3s, 3a}}{\partial t} + (1-y^2) \frac{\partial \Delta \varphi_{3s, 3a}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \varphi_{3s, 3a}}{\partial x} - \frac{1}{R} \Delta^2 \varphi_{3s, 3a} = \\ & = \frac{\partial \Delta \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{2a, 2s}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \Delta \varphi_{2a, 2s}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \Delta \varphi_{2a, 2s}}{\partial x} - \frac{\partial \Delta \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{2a, 2s}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.1)$$

правая часть которого, билинейная по возмущениям φ_1, φ_2 , порождена нелинейными членами уравнения (1.1). Неоднородность задачи расчета функции φ_3 не ограничивается наличием правой части у уравнения (3.1), она проявляется также и в граничных условиях, задаваемых при $y=1$. В самом деле, наложение на функцию φ_1 однородных краевых условий на плоскостях $y=\pm 1$ вместо поверхностей (1.3) изначально предполагает дефект порядка ϵh , который должен быть компенсирован при формулировке краевой задачи для функции φ_3 . С учетом вышеизложенного крае-

вые условия для возмущений обоих типов симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{3s,3a}}{\partial x}(t, x, 1) = 0, \quad \frac{\partial \psi_{3s,3a}}{\partial y}(t, x, 1) = -\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}(t, x, 1) f_{a,s}(x) \quad (3.2) \\ \psi_{3s}(t, x, 0) = \frac{\partial \psi_{3s}}{\partial y}(t, x, 0) = \frac{\partial^2 \psi_{3s}}{\partial y^2}(t, x, 0) = \frac{\partial^3 \psi_{3s}}{\partial y^3}(t, x, 0) = 0 \end{aligned}$$

В отличие от функции ψ_2 не будем налагать на функцию ψ_3 конкретных условий при $x \rightarrow \pm\infty$. Вместо этого будем ограничивать поиск решения задачи (3.1), (3.2) функциями некоторого класса, определяемого свойствами уравнения (3.1). Подставим в правую часть (3.1) интегральное представление (2.4), вынесем знак интегрирования за операции дифференцирования, умножения, суммирования и произведем замену переменной $k \rightarrow k - \alpha$. В результате правая часть уравнения (3.1) запишется в виде интеграла по k вдоль луча $(-\infty + i\sigma, +\infty + i\sigma)$, $\sigma = \text{Im } \alpha$ с ядром Фурье $\exp(ikx)$. В такой же форме будем искать и само решение задачи (3.1), (3.2)

$$\psi_{3s,3a}(t, x, y) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty + i\sigma}^{+\infty + i\sigma} f_{a,s}^*(k - \alpha) \varphi_{3s,3a}(y; k) \exp(ikx - i\omega t) dk \quad (3.3)$$

Поскольку описание набегающей волны Толлмина — Шлихтинга ограничивается первым слагаемым в разложении (1.4), в случае функции ψ_3 особая точка $k = \alpha$ должна быть обойдена снизу по полуокружности малого радиуса. Подстановка интегралов (3.3) в (3.1), (3.2) приводит к неоднородным краевым задачам Орра — Зоммерфельда для функций $\varphi_{3s,3a}$

$$\begin{aligned} \left(1 - y^2 - \frac{\omega}{k}\right) \Delta_k \varphi_{3s,3a} + 2\varphi_{3s,3a} - \frac{1}{ikR} \Delta_k^2 \varphi_{3s,3a} = \quad (3.4) \\ = \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) \frac{d\Delta_\alpha \varphi_1}{dy} \varphi'_{2a,2s} + \frac{\alpha}{k} \varphi_1 \frac{d\Delta_{k-\alpha} \varphi'_{2a,2s}}{dy} - \\ - \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) \frac{d\varphi_1}{dy} \Delta_{k-\alpha} \varphi'_{2a,2s} - \frac{\alpha}{k} \Delta_\alpha \varphi_1 \frac{d\varphi'_{2a,2s}}{dy} \\ \varphi_{3s,3a}(1) = 0, \quad \frac{d\varphi_{3s,3a}}{dy}(1) = -\frac{d^2 \varphi_1}{dy^2}(1) \\ \varphi_{3s}(0) = \frac{d\varphi_{3s}}{dy}(0) = \frac{d^2 \varphi_{3s}}{dy^2}(0) = \frac{d^3 \varphi_{3s}}{dy^3}(0) = 0 \end{aligned}$$

Здесь символами $\varphi'_{2s,2a}$ обозначены функции $\varphi_{2s,2a}(y; k - \alpha)$. Произведенная в (2.4), (3.3) нормировка фурье-амплитуд на величины $f_{s,a}^*$ выделяет зависимость искомого решения от геометрических параметров и придает универсальный характер задачам (2.5), (3.4).

Как и в случае ψ_2 , функция ψ_3 вниз по потоку от неровностей представима в виде умноженной на i суммы вычетов подынтегрального выражения (3.3) в полюсах $k = k_{3s,3a}^{(n)}$, $\text{Im}[k_{3s,3a}^{(n)} - \alpha] \geq 0$

$$\begin{aligned} \psi_{3s,3a} = \sum f_{a,s}^*[k_{3s,3a}^{(n)} - \alpha] \varphi_{3s,3a}^{(n)}(y) \exp[ik_{3s,3a}^{(n)} x - i\omega t] \quad (3.5) \\ \varphi_{3s,3a}^{(n)} = \text{res}[i\varphi_{3s,3a}(y; k)], \quad x > \sup(\text{supp } f_{a,s}) \end{aligned}$$

Множество полюсов функций φ_{3a} , φ_{3a} разделяется на два основных класса. Первый класс составляют собственные значения оператора Орра — Зоммерфельда, подробно исследованные в [5] (элементам этого класса будем присваивать нечетные номера n). Так, функция φ_{3a} имеет полюс в точке $k=k_{3a}^{(1)}=\alpha$; соответствующее слагаемое в разложении (3.5) функции φ_{3a} представляет собой распространяющуюся вниз по потоку вторичную волну Толлмина — Шлихтинга. Из последнего условия (2.4) и формулы (3.5) получаем искомое выражение для коэффициента прохождения

$$K=1+hf_s^*(0)A, \quad A(\omega, R)=\varphi_{3a}^{(1)}(0) \quad (3.6)$$

Формула (3.6) может быть получена из общих соображений. В самом деле, квазилинейный характер системы (1.1), вид амплитудного разложения (1.4), а также свойства симметрии диктуют следующее выражение для коэффициента прохождения: $K=1+hI[f_s]$, где I — линейный функционал. Поскольку, с точки зрения взаимодействия с неровностью, волна Толлмина — Шлихтинга является однородным по x возмущением, этот функционал должен быть инвариантен относительно смещения искривленного участка: $I[f(x-\xi)]=I[f(x)]$. Используя это свойство, а также представление функции f в виде свертки, получим

$$I[f(x)]=I\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)I[\delta(x-\xi)]d\xi=A\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d\xi$$

Для нахождения постоянной A рассмотрим искривление частного вида, при котором на участке длиной $L \gg 1$ полуширина канала увеличена на постоянную величину h : $f_s=0$ при $x < 0$ и $x > L$; $f_s=1$ при $0 \leq x \leq L$. Чтобы не выходить за рамки рассматриваемой постановки, будем считать $hL \ll 1$. В расширенном участке канала нестационарная составляющая возмущения представляет собой волну Толлмина — Шлихтинга с волновым числом α' , соответствующим тем же ω и R , но увеличенной безразмерной полуширине канала $1+h$. В этом случае величина K равна отношению коэффициента усиления волны в расширенном участке канала к коэффициенту усиления волны на невозмущенном участке канала той же длины: $K=\exp[i(\alpha'-\alpha)L] \approx 1+i(\alpha'-\alpha)L$, откуда

$$A=i\left.\frac{d\alpha'}{dh}\right|_{h=0}=i\left(2\omega\frac{\partial\alpha}{\partial\omega}-\alpha\right) \quad (3.7)$$

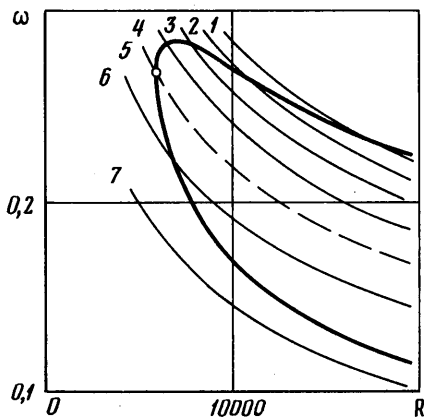
Заметим, что то же выражение для постоянной A получается и из вторых соотношений (3.5), (3.6), поскольку при $k \rightarrow \alpha$ функция φ_{3a} представима разложением

$$\varphi_{3a} \sim \frac{1}{h'}\varphi_1\left(\frac{y}{1+h'}\right), \quad h'=\frac{k-\alpha}{A}$$

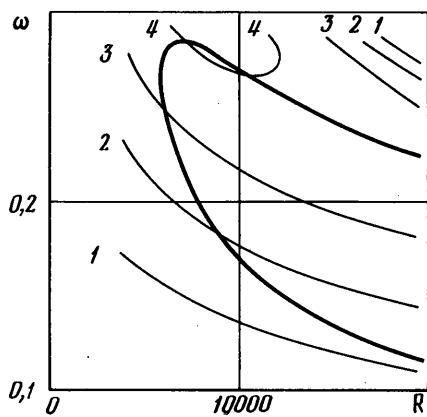
В результате формула для коэффициента прохождения волны неустойчивости через участок канала переменной ширины приобретает окончательный вид

$$K=1+ih\left(\omega\frac{\partial\alpha}{\partial\omega}-\frac{\alpha}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}[f_+(x)-f_-(x)]dx$$

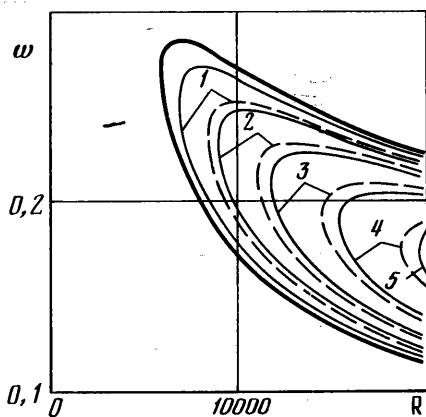
Рассмотрим величину $|K| \sim 1+hf_s^*(0)\operatorname{Re}A$, характеризующую отношение амплитуд прошедшей и набегающей волн. При $|K| > 1$ набегающая на неровность волна усиливается, а при $|K| < 1$ — ослабляется. Учитывая



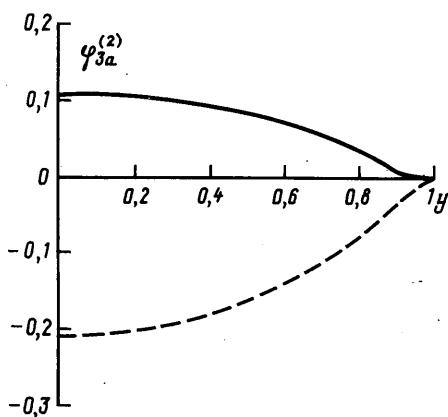
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

второе равенство (2.4) и определение функции $f_s(x)$, назовем случай $f_s^*(0) < 0$ сужением, а случай $f_s^*(0) > 0$ — расширением канала. Таким образом, при $\text{Re } A > 0$ сужение канала ослабляет, а расширение — усиливает волну неустойчивости (при $\text{Re } A < 0$ — наоборот). На фиг. 2 приведены линии уровня функции $\text{Re } A(\omega, R)$: на кривых 1–7 эта функция принимает значения от $-0,4$ до $0,2$ с шагом $0,1$. Сплошной жирной линией отмечена нейтральная кривая $\text{Im } \alpha(\omega, R) = 0$ (см. также фиг. 3, 4). Штриховой линией 5 выделена кривая, определяемая соотношением $\text{Re } A = 0$. Как показывает формула (3.7), эта кривая расположена между нижней ветвью нейтральной кривой и линией максимумов инкремента нарастания, задаваемой соотношениями $\text{Im}(\partial \alpha / \partial \omega) = 0$, $\text{Im } \alpha < 0$; в частности, она пересекает нейтральную кривую в критической точке ($R_c = 5772$, $\omega_c = 0,2694$ [6]). Результаты расчетов показывают, что высокочастотная волна ослабляется расширением, а низкочастотная — сужением канала. Функция $\arg K \sim h f_s^*(0) \text{Im } A$ определяет сдвиг фазы прошедшей волны относительно набегающей. На фиг. 3 показаны линии уровня функции $\text{Im } A(\omega, R)$: вдоль кривых 1–4 эта функция принимает значения от $0,15$ до $0,45$ с шагом $0,1$. При $R = 10000$, $\omega = 0,22$ постоянная $A = -0,0072 + i0,3603$.

Исследуем теперь возмущения, связанные со вторым классом полюсов функций $\varphi_{3s, 3a}$. Волновые числа, соответствующие этим полюсам, име-

ют вид $k_{3s,3a}^{(n)} = k_{2a,2s}^{(m)} + \alpha$, $n=2m$; сами же возмущения представляют собой собственные колебания, обусловленные нелинейным взаимодействием волны Толлмина — Шлихтинга со стационарными модами (2.6), вносимыми в поток искривлением стенок. При некоторых значениях параметров инкремент нарастания волны неустойчивости может превысить декременты затухания одной или нескольких стационарных мод. В этом случае рассеяние волны Толлмина — Шлихтинга на неровностях стенок приводит к генерации растущих вниз по потоку возмущений нового типа. Эти возмущения имеют ту же частоту и длину волны, что и волна Толлмина — Шлихтинга, но меньшие инкременты нарастания. На фиг. 4 изображены нейтральные кривые вторичной неустойчивости — линии на плоскости

параметров R , ω , где выполнены соотношения $\text{Im } k_{3s,3a}^{(2m)}(\omega, R) = 0$. Сплошные линии отвечают случаю антисимметричных возмущений (в качестве номеров кривых использованы соответствующие значения m). Между кривыми 1 и 2 возбуждается одна антисимметричная волна вторичной неустойчивости, между кривыми 2 и 3 — две таких волны и т. д. Например, при $R=10000$, $\omega=0,22$ возбуждаются две антисимметричных вторичных волны, из которых наибольший инкремент нарастания имеет волна с $k_{3a}^{(2)} = 0,9487 - i0,0095$. График функции $\varphi_{3a}^{(2)}(y)$, характеризующей поперечное распределение интенсивности пульсаций в этой волне, приведен на фиг. 5 (вещественная часть отмечена сплошной линией, мнимая — штриховой; $\varphi_{3a}^{(2)}(0) = 0,1052 - i0,2094$).

На фиг. 4 штриховыми линиями показаны нейтральные кривые для случая симметричных волн вторичной неустойчивости. При $R=10000$, $\omega=0,22$ возбуждается лишь одна такая волна с $k_{3s}^{(2)} = 0,9487 - i0,0049$. Расчеты показывают, что эта волна имеет малую начальную амплитуду: $d\varphi_{3s}^{(2)}/dy = (7,0 + i0,7) \cdot 10^{-7}$ при $y=0$.

В заключение заметим, что нестационарная компонента построенного решения (сумма первого и третьего членов в разложении (1.4)) может трактоваться как собственное возмущение стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале со слабо искривленными стенками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
2. Milling R. W. Tollmien-Schlichting wave cancellation // Phys. Fluids. 1981. V. 24. № 5. P. 979–981.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
4. Bogdanova E. V., Ryzhov O. S. Free and induced oscillations in Poiseuille flow // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1983. V. 36. № 2. P. 271–287.
5. Мануйлович С. В. О восприимчивости плоского течения Пуазейля к вибрации стенок канала // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. № 4.
6. Orszag S. A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. № 4. P. 689–703.
7. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.V.1991