МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1992

УДК 532.516

© 1992 г. Ю. Я. БОЛДЫРЕВ

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННАЯ С ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ РЕЙНОЛЬДСА

Рассматривается периодическая задача об оптимизации микрогеометрии подшипника на газовой смазке по критерию максимума подъемной силы. Поле давления в газовом слое определяется с помощью уравнения Рейнольдса газовой смазки. Изучается случай малых чисел сжимаемости.

Проведены анализ системы необходимых условий экстремума вариационной задачи, на основе которого установлено существование оптимального профиля с бесконечным числом разрывов, и расширение вариационной задачи. Найдены предельные периодические оптимальные профили.

1. Постановка задачи. В [1, 2] найдена оптимальная микрогеометрия в задачах для подшипников с газовой смазкой, сообщающихся с атмосферой (средой) по всей своей границе. Предполагается, что подшипники работают в режиме малых чисел сжимаемости, а в качестве критерия оптимальности используется подъемная сила. Ниже в аналогичной постановке рассматривается задача об оптимизации микрогеометрии периодического профиля.

Стационарное уравнение Рейнольдса газодинамической теории смазки для случая малых чисел сжимаемости $\Lambda=6\mu LU/(h_0^2p_a)$ запишем в безразмерной дивергентной форме

$$\operatorname{div}\mathbf{Q}=0,\quad \mathbf{Q}=-h^3\nabla p_1+h\mathbf{v} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{Q}$ — нормированный вектор объемного расхода, p_1 — безразмерное избыточное давление, отнесенное к соответствующему значению во внешней среде p_a $(p=1+\Lambda p_1+o(\Lambda^2))$, h — местная толщина смазочного слоя, отнесенная к характерной толщине h_0; $\mathbf{v}$ — местный вектор скорости скольжения, нормированный по характерной скорости U; μ — динамический коэффициент вязкости, L — характерный размер. В формулах (1.1) div и ∇ — двумерные операторы дивергенции и градиента (определяемые вдоль поверхности смазочного слоя).

Предполагаем, что профилируемая поверхность неподвижна, а гладкая поверхность лежит в плоскости (x_1, x_2) декартовых координат (x_1, x_2, x_3) и движется в направлении оси x_2 с постоянной скоростью $\mathbf{v}=\mathbf{i}_2$ (фиг. 1).

Пусть область Ω, в которой изменяются переменные x_1 и x_2, такова: $|x_1|<0{,}5$, $0<x_2<1$. Обозначим границу $\partial\Omega$, а ее части

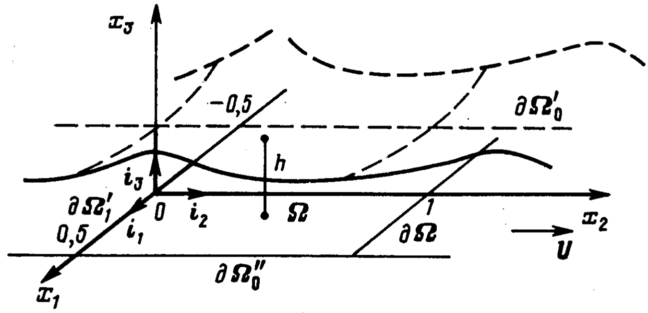
$$\partial\Omega_0'=\{x_1, x_2|x_1=-0{,}5,\ 0\leqslant x_2\leqslant 1\},\ \partial\Omega_0''=\{x_1, x_2|x_1=0{,}5,\ 0\leqslant x_2\leqslant 1\}$$

$$\partial\Omega_1'=\{x_1, x_2|x_2=0,\ |x_1|\leqslant 0{,}5\},\ \partial\Omega_1''=\{x_1, x_2|x_2=1,\ |x_1|\leqslant 0{,}5\}$$

Предположим, что на частях $\partial\Omega_0'$ и $\partial\Omega_0''$, которые назовем внешними границами Ω, заданы условия равенства избыточного давления нулю

$$p_1|_{\partial\Omega_0'}=0,\quad p_1|_{\partial\Omega_0''}=0 \tag{1.2}$$

На двух других — $\partial\Omega_1'$ и $\partial\Omega_1''$, которые будем считать разделяющими



Фиг. 1

периоды, заданы условия периодичности по давлению и нормальной компоненте расхода

$$p_1(s)|_{\partial\Omega_1'}=p_1(s)|_{\partial\Omega_1''},\quad Q_n(s)|_{\partial\Omega_1'}=Q_n(s)|_{\partial\Omega_1''} \tag{1.3}$$

где s — криволинейная координата контура.

Решение краевой задачи (1.1)—(1.3) будем искать в классе квадратично-суммируемых функций, имеющих первую обобщенную производную $W_2^1(\Omega)$. На величину толщины зазора $h(x_1, x_2)$, которая является в данной задаче управляющей функцией, принадлежащей к классу существенно ограниченных функцией $L_\infty(\Omega)$, наложены ограничения

$$h_{\min}=1\leqslant h(x_1, x_2)\leqslant h_{\max} \tag{1.4}$$

Здесь $h_{\max}$ задано, а равенство $h_{\min}=1$ определяется нормировкой.

Главный вектор сил давления $\mathbf{R}=-\Lambda\int\limits_\Omega p_1\mathbf{n}\,d\Omega$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Ω, $d\Omega$ — ее дифференциал. В дальнейшем предполагаем, что вектор нагрузки имеет направление, совпадающее с направлением оси x_3 исходной декартовой системы координат, связанной с подшипником. Проекция вектора $\mathbf{R}$ на ось x_3 имеет вид

$$J=-\Lambda\int\limits_\Omega p_1\,d\Omega \tag{1.5}$$

В дальнейшем индекс 1 у избыточного давления опускаем. Итак, будем искать минимум функционала (1.5) при ограничениях (1.1)—(1.4) методами вариационного исчисления.

Удовлетворим первому из уравнений (1.1), определив периодическую функцию $M(x_1, x_2)$ соотношением $\mathbf{Q}=\mathbf{rot}(M\mathbf{i}_3)$, где $\mathbf{i}_3$ — орт оси x_3.

Перейдем к открытой области изменения функции $h(x_1, x_2)$, используя соотношение $\Psi\equiv(h_{\max}-h)(h-1)-\nu^2=0$, где $\nu(x_1, x_2)$ — дополнительное управление.

Построим вспомогательный функционал $I=\int\limits_\Omega F\,d\Omega$ с расширенной функцией F вида

$$F=-p+(\boldsymbol\eta, \mathbf{Q}-\mathbf{rot}(M\mathbf{i}_3))+(\boldsymbol\lambda, \mathbf{Q}+h^3\nabla p-h\mathbf{v})+\xi\psi \tag{1.6}$$

где $\boldsymbol\eta$, $\boldsymbol\lambda$, ξ — функциональные множители Лагранжа, первые два из которых — векторные, а ξ — скалярный; символом (,) обозначено скалярное произведение векторов. Очевидно, что функционал I равен исходному J с точностью до постоянного множителя Λ при выполнении всех ограничений.

2. Необходимые условия экстремума функционала I и их анализ. Уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\lambda}=0, \quad (\mathbf{i}_3, \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta})=0 \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div}(h^3\boldsymbol{\lambda})+1=0 \tag{2.2}$$

$$(\boldsymbol{\lambda}, 3h^2\nabla p-\mathbf{v})+\xi(h_{\max}+1-2h)=0, \quad \xi\nu=0 \tag{2.3}$$

Условия трансверсальности на границе $\partial\Omega$ таковы

$$\lambda_\tau\delta M-h^3\lambda_n\delta p-\left(F+\lambda_\tau\frac{\partial M}{\partial\tau}-h^3\lambda_n\frac{\partial p}{\partial n}\right)\delta n=0 \tag{2.4}$$

где индексы τ и n — проекция величины на направление касательной $\boldsymbol{\tau}$ и внешней нормали $\mathbf{n}$ к $\partial\Omega$, а δn — вариация нормали. В выражении (2.4) вариации δM и δp — полные, т. е. учитывают возможную подвижность границы.

В предположении, что функция профиля h имеет в Ω разрывы первого рода вдоль некоторых гладких линий γ, получим условия Эрдмана — Вейерштрасса

$$[\lambda_\tau]_-^+\delta M-[h^3\lambda_n]_-^+\delta p-\left[F+\lambda_\tau\frac{\partial M}{\partial\tau}-h^3\lambda_n\frac{\partial p}{\partial n}\right]_-^+\delta n=0 \tag{2.5}$$

Здесь символами $[\ ]_-^+$ обозначены разности величин, стоящих в скобках, справа и слева от линии разрыва γ, а τ и n аналогично формуле (2.4) — проекции векторов касательной и нормали к γ, δn — вариация нормали к γ.

Приведем условие Вейерштрасса сильного минимума функционала I, опуская его подробный вывод, описанный в [2]

$$\begin{gathered}\varepsilon=(H-h)[(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{R}(H, h)-m\lambda_nR_n(H, h)]>0\\ m=(H^3-h^3)/H^3, \quad \mathbf{R}(H, h)=(H^2+Hh+h^2)\nabla p-\mathbf{v}\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь H — допустимое значение профиля, причем ∇p и $\boldsymbol{\lambda}$ вычисляются на оптимальном профиле h. В условии Вейерштрасса (2.6) учитывается не только поточечное влияние величины H, но и поточечная ориентация области варьирования [3]. Из условия (2.6) следует

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{R}(h_{\min}, H))-m_{\min}\lambda_nR_n(h_{\min}, H)>0, \quad h=h_{\min}\\ (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{R}(h, h))=0, \quad h_{\min}<h<h_{\max}\\ (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{R}(h_{\max}, H))-m_{\max}\lambda_nR_n(h_{\max}, H)<0, \quad h=h_{\max}\\ m_{\min}=\frac{H^3-h_{\min}^3}{H^3}, \qquad m_{\max}=\frac{H^3-h_{\max}^3}{H^3}\end{gathered} \tag{2.7}$$

Из (2.7), в частности, находим

$$(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{R}(h_{\min}, h_{\min}))>0, \quad (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{R}(h_{\max}, h_{\max}))<0 \tag{2.8}$$

Выберем ориентацию области варьирования в произвольной точке такой, что $\lambda_n=0$ в (2.6), и перепишем (2.6) в виде

$$\varepsilon=(H-h)(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{R}(h, h))+3h(H-h)^2(\boldsymbol{\lambda}, \nabla p)+(H-h)^3(\boldsymbol{\lambda}, \nabla p)>0$$

Отсюда получаем, что условие Вейерштрасса не нарушается в случае

$$(\boldsymbol{\lambda}, \nabla p)>0 \tag{2.9}$$

при $h_{\min}\leqslant h\leqslant h_{\max}$ в строго внутренних точках области Ω.

Неравенство (2.9) позволяет сделать выводы о знаке произведения $(\lambda, \mathbf{v})$ в каждом из случаев, определяемых как условиями (2.8), так и промежуточным режимом, соответствующим последнему из соотношений (2.7). А именно для промежуточного режима $h_{\min}<h<h_{\max}$, согласно (2.7), имеем

$$(\lambda, \mathbf{v})>0 \tag{2.10}$$

Для $h_{\min}$ и $h_{\max}$ неравенства (2.8) выполняются наиболее сильно, если

$$(\lambda, \mathbf{v})\leqslant 0, \quad h=h_{\min} \tag{2.11}$$

$$(\lambda, v)\geqslant 0, \quad h=h_{\max} \tag{2.12}$$

Итак, неравенства (2.10)–(2.12) показывают, как характер оптимального профиля h связан со знаками соответствующих скалярных произведений. Попытаемся определить знаки последних.

Приведем систему уравнений (2.1), (2.2) к виду

$$\lambda=\nabla\lambda_0, \quad \operatorname{div}(h^3\lambda)+1=0 \tag{2.13}$$

с помощью скалярной функции λ_0, введенной для удовлетворения второму из уравнений (2.1). Краевые условия к системе уравнений для λ_0 (2.13) найдем из рассмотрения условий трансверсальности (2.4). В силу того, что контур области Ω фиксирован, имеем для вариаций нормали $\delta n=0$, а из граничных условий (1.2) следует $\delta p=0$ на $\partial\Omega_0'$ и $\partial\Omega_0''$. Тогда, согласно (2.4), находим $\lambda_\tau\delta M=\partial\lambda_0/\partial\tau\delta M=0$, откуда в силу произвольности δM, выбрав соответствующую постоянную равной нулю, получим

$$\lambda_0(s)|_{\partial\Omega_0'}=0, \quad \lambda_0(s)|_{\partial\Omega_0''}=0 \tag{2.14}$$

где s — координата контура.

На тех же частях $\partial\Omega$, где выполняются условия периодичности (1.3), учитывая сказанное, найдем

$$(\lambda_\tau(s)|_{\partial\Omega_1'}-\lambda_\tau(s)|_{\partial\Omega_1''})\delta M(s)-(h^3(s)\lambda_n(s)|_{\partial\Omega_1'}-h^3(s)\lambda_n(s)|_{\partial\Omega_1''})\delta p(s)=0$$

Отсюда в силу независимости вариаций получаем условия периодичности

$$\lambda_\tau(s)|_{\partial\Omega_1'}=\lambda_\tau(s)|_{\partial\Omega_1''}, \quad h^3(s)\lambda_n(s)|_{\partial\Omega_1'}=h^3(s)\lambda_n(s)|_{\partial\Omega_1''} \tag{2.15}$$

В [1, 2] при разыскании структуры оптимального профиля h существенно использовалось поведение векторов ∇p и $\lambda=\nabla\lambda_0$ на границе Ω.

Применяя этот же подход, рассмотрим неравенство Вейерштрасса (2.6) на границах $\partial\Omega_0'$ и $\partial\Omega_0''$. Заметим, что оно рассматривается в предельном смысле при движении из внутренности Ω к соответствующим границам. При этом предполагается, что к рассматриваемым точкам границы примыкают гладкие куски функции h. Согласно условию трансверсальности, здесь $\lambda_\tau=\partial\lambda_0/\partial\tau=0$, а $v_n=0$ из постановки задачи, и неравенство (2.6) принимает вид

$$(H^3-h^3)\left(\frac{\partial\lambda_0}{\partial n}\right)\frac{\partial p}{\partial n}>0$$

Отсюда, в частности, следует, что при $h=h_{\max}$ и $h_{\min}<h<h_{\max}$ условие (2.9) не выполняется на внешних границах Ω, так как $H^3-h^3<0$ в первом случае и H^3-h^3 знакопеременно во втором.

Учитывая краевые условия (2.14) на $\partial\Omega_0'$ и $\partial\Omega_0''$, получаем, что вектор $\lambda=\nabla\lambda_0$ ортогонален внешней границе, как и в случае, рассмотренном в [2]. При этом, здесь также $(\lambda, \mathbf{v})=0$ и, согласно (2.11) и (2.9), в указанном предельном смысле $h=h_{\min}$.

Изучим поведение вектора ∇p на внешних границах. Во-первых, в силу вида краевых условий (1.2) здесь $\nabla p=\mathbf{n}\partial p/\partial n$ ($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль). Во-вторых, в силу симметрии задачи и условий периодичности (1.3) из уравнений (1.1) имеем

$$\oint_{\partial\Omega} \operatorname{div} \mathbf{Q}\, ds = 2\int_0^1 Q_n\, dx_2 = 2\int_0^1 h^3 \frac{\partial p}{\partial n} dx_2 = 0 \qquad (2.16)$$

Отсюда легко видеть, что величина $\partial p/\partial n$ знакопеременна на каждой из границ $\partial\Omega_0'$ и $\partial\Omega_0''$.

Из последнего следует, что к внешним границам Ω, согласно краевым условиям (1.2), примыкают как области повышения давления, так и области разрежения газа. С точки зрения поиска минимума функционала (1.5), естественно выбирать положительные в Ω функции h. Иначе говоря, необходимо искать такие поля давления, для которых всюду или на большей части внешних границ справедливо неравенство $\partial p/\partial n<0$. Исходя из этого, условие (2.16) может быть удовлетворено, в частности, при $h_{\max}\to\infty$ в одной или в ряде точек внешней границы, где $\partial p/\partial n>0$. Очевидно, что соотношение (2.16) надо рассматривать здесь в предельном смысле, т. е. при $h_{\max}\to\infty$ и $\partial p/\partial n\to+0$.

Оставляя этот случай для отдельного рассмотрения, укажем иной путь удовлетворения соотношению (2.16). А именно попытаемся найти такое поле давления, при котором на внешней границе среднее значение величины $\partial p/\partial n<0$. При этом потребуем, чтобы интеграл от произведения $h^3\partial p/\partial n$ обращался в нуль благодаря соответствующему скачкообразному изменению функции h на границах $\partial\Omega_0'$ и $\partial\Omega_0''$. С увеличением числа скачков до бесконечности получаем на границах так называемый скользящий режим, отвечающий бесконечному числу разрывов у оптимального профиля в области Ω.

Такая ситуация часто возникает в оптимальных процессах, описываемых уравнениями эллиптического типа с управляющими функциями в главной части дифференциального оператора [3, 4]. По этой причине необходимо расширить класс управляющих функций h за пределы пространства кусочно-гладких управлений и разыскивать в $L_\infty(\Omega)$ обобщенное оптимальное управление.

3. Расширенная вариационная задача. Для расширения требуется изменить исходную постановку задачи, произведя G-замыкание уравнения (1.1) [5]. Последнее означает переход к предельному аналогу уравнения Рейнольдса, отвечающему наличию в Ω бесконечно большого числа разрывов у функции h. Оставляя в стороне вывод предельных соотношений [6], приведем их окончательный вид в локальных координатах $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$, связанных с линиями разрыва

$$\operatorname{div} \mathbf{Q}^*=0, \quad \mathbf{Q}^*=-D\cdot\nabla p^*+R\cdot\mathbf{v} \qquad (3.1)$$

$$D=\lambda_1\mathbf{aa}+\lambda_2\mathbf{bb}, \quad R=\mu_1\mathbf{aa}+\mu_2\mathbf{bb} \qquad (3.2)$$

Здесь D и R – симметричные тензоры второго ранга, звездочки указывают на предельный характер величин, точкой обозначено скалярное произведение тензора на вектор, $\mathbf{aa}$ и $\mathbf{bb}$ – диады, λ_1, λ_2 и μ_1, μ_2 – собственные числа тензоров, отвечающие собственным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, направленным по нормали и касательной к линии разрыва.

Важную роль в выводе уравнений (3.1) играет понятие предельной концентрации $\varkappa$ областей с $h>h_{\min}$ в данной точке Ω

$$\lim_{|S|\to 0} \frac{|S_+|}{|S|}=\varkappa \qquad (3.3)$$

Здесь элемент S, такой, что его площадь $|S|$ много меньше площади Ω, однако его размеры велики по отношению к характерному размеру микроструктуры, $|S_+|$ и $|S_-|$ – соответственно площади, занятые в пределах S областями с $h=h_+>h_{\min}$ и $h=h_-=h_{\min}$.

Аналогично (3.3) число $1-\varkappa$ характеризует концентрацию в пределах S областей с толщиной h_- в данной точке Ω.

Определив средние значения h_+ и h_- следующим образом

$$\langle h_+{}^M\rangle = \frac{1}{|S_+|}\int\limits_{S_+} h_+{}^M\, d\Omega, \qquad \langle h_-{}^M\rangle = \frac{1}{|S_-|}\int\limits_{S_-} h_-{}^M\, d\Omega, \qquad |M|\geqslant 1$$

найдем среднее значение h^M на S

$$\langle h^M\rangle = \frac{|S_+|}{|S|}\langle h_+{}^M\rangle + \frac{|S_-|}{|S|}\langle h_-{}^M\rangle$$

и, переходя к пределу при $|S|\to 0$, получим

$$\langle h^M\rangle=\varkappa\langle h_+{}^M\rangle+(1-\varkappa)\langle h_-{}^M\rangle, \quad |M|\geqslant 1 \tag{3.4}$$

Приведем вид введенных выше собственных чисел, использующий конструкцию (3.4) [6]

$$\lambda_1=\langle h^{-3}\rangle^{-1},\ \lambda_2=\langle h^3\rangle;\ \mu_1=\langle h^{-2}\rangle\langle h^{-3}\rangle^{-1},\ \mu_2=\langle h\rangle \tag{3.5}$$

Итак, описание предельного поведения смазочного слоя в локальных координатах ($\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}$), связанных с линией разрыва h, дается соотношениями (3.1) – (3.5).

В качестве управляющих функций возьмем элементы тензоров D и R, определяемых соотношениями (3.2), (3.4) и (3.5). При этом само понятие управляющей функции требует здесь некоторого уточнения. Действительно, в данном случае в оптимальном профиле предполагается наличие некоторой предельной периодической структуры, которая может быть аппроксимирована большим числом одинаковых микропериодов в виде «микроканавок» на неподвижной поверхности.

Из сказанного очевиден смысл функции $\varkappa$, определяемой соотношением (3.3), — она характеризует предельную поточечную концентрацию микроканавок. При этом в микроканавках $h=h_+>h_{\min}$, а вне их $h=h_-=$ $=h_{\min}$. Это замечание позволяет определить управляющую функцию — глубину микроканавок Δ — следующим образом: $\Delta>0$ при $h>h_{\min}$ и $\Delta=0$ при $h=h_{\min}=1$.

Наконец, в качестве управляющей функции, очевидно, будет выступать и угол β — местный угол наклона оси предельного периода к направлению оси x_2, вдоль которой происходит скольжение. Этот угол характеризует наклон одного из собственных векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$, которые направлены по касательной $\boldsymbol{\tau}$ и нормали $\mathbf{n}$ к линии разрыва функции h, в пределе совпадающей с осью микропериода.

Итак, предельные управляющие функции $\varkappa$, Δ и β определяют элементы тензоров D и R.

Заметим, что случай $\beta=0$, отвечающий микроканавкам, параллельным оси x_2, необходимо исключить, так как соответствующее ему решение системы (3.1) в согласии с исходными уравнениями (1.1) тривиально: $p=0$ в Ω. Этот случай также не соответствует условию периодичности предельного профиля h по x_2.

Отсюда и из того, что все микроканавки одинаковы, следует, что поле давления, определяемое уравнениями (3.1), «сглажено» в направлении скольжения вдоль оси x_2 и едино в каждом из сечений плоскостью $x_2=$ $=\text{const}$.

Из этих рассуждений, естественно, следует, что управляющие функции $\varkappa$, Δ и β — функции одной независимой переменной x_1. Из соотношения (3.4) для $\langle h^M\rangle$ видно, что величина $\langle h_-{}^M\rangle$ определяется условием $h_{\min}=1$ согласно (1.4) и всюду в Ω $\langle h_-{}^M\rangle=1$. Функция $\langle h_+{}^M\rangle$ характеризуется поточечной глубиной микроканавок $\Delta(x_1)$, причем

$$\langle h_+^{\text{M}}(x_1)\rangle = \lim_{|S_+|\to 0} \frac{1}{|S_+|}\int_{S_+} h_+^{\text{M}}\, ds = (1+\Delta(x_1))^{\text{M}}$$

Таким образом

$$\langle h^{\text{M}}(x_1)\rangle = (1+\Delta(x_1))^{\text{M}}\varkappa(x_1)+1-\varkappa(x_1) \tag{3.6}$$

Перейдем от локальных координат $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$, в которых записана система уравнений (3.1), к исходным (x_1, x_2), связанным с поверхностью газового слоя, с помощью преобразования координат

$$\mathbf{a}=\mathbf{i}_1\cos\beta-\mathbf{i}_2\sin\beta,\quad \mathbf{b}=\mathbf{i}_1\sin\beta+\mathbf{i}_2\cos\beta$$

При этом сглаженный характер решения в направлении скольжения в соответствии со сказанным выше приводит к независимости всех соотношений от x_2, т. е. система уравнений (3.1) приобретает вид

$$\operatorname{div}\langle\mathbf{Q}\rangle=0,\qquad \langle\mathbf{Q}\rangle=-A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1\cdot\mathbf{i}_1\frac{dp}{dx_1}+B\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{i}_2 \tag{3.7}$$

$$A=\lambda_1\cos^2\beta+\lambda_2\sin^2\beta,\qquad B=(\mu_2-\mu_1)\frac{\sin 2\beta}{2}$$

Краевыми условиями к уравнениям (3.6) служат условия (1.2), которые запишем в форме

$$p(x_s)=p(x_f)=0 \tag{3.8}$$

где $x_s=-0{,}5$ и $x_f=0{,}5$ – границы Ω по x_1, отвечающие $\partial\Omega_0'$ и $\partial\Omega_0''$. В рамках приведенных соображений относительно предельного оптимального решения функционал расширенной вариационной задачи, согласно (1.5), принимает вид

$$J=-\Lambda\int_{x_s}^{x_f} p\, dx_1 \tag{3.9}$$

На функции Δ, $\varkappa$ и β наложены следующие естественные ограничения

$$0\leqslant\Delta\leqslant\Delta_{\max},\qquad 0\leqslant\varkappa\leqslant 1,\qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2} \tag{3.10}$$

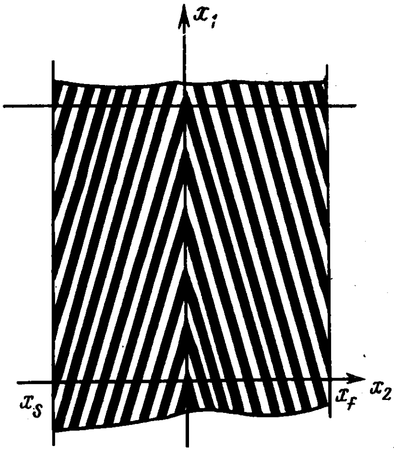
Итак, расширенная вариационная задача представляет собой следующую вариационную задачу для нескольких функций одного независимого переменного [7]. Среди существенно ограниченных на $[x_s, x_f]$ функций Δ, $\varkappa$ и β, удовлетворяющих неравенствам (3.10), и среди обобщенных решений краевой задачи (3.7)–(3.8) с коэффициентами, определяемыми соотношениями (3.5), (3.6), найти те, которые дают экстремум функционалу (3.9).

Анализ системы необходимых условий вариационной задачи (3.7)–(3.10) показывает, что оптимальный профиль может быть реализован двумя видами решений. Причем оба они связаны с естественной симметрией задачи по отношению к направлению скольжения вдоль оси x_2.

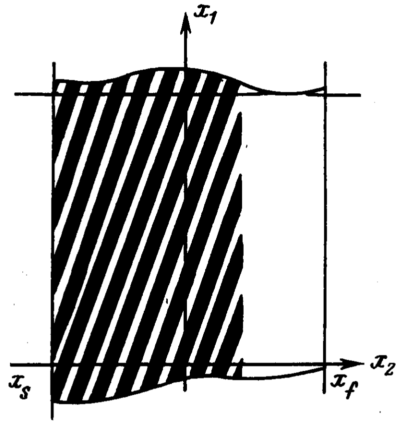
Первое решение – симметричное, ему отвечает нулевой расход газа: $Q=0$ и «шевронный» профиль (фиг. 2) с параметрами $\Delta(x_1)=2{,}653$, $\varkappa(x_1)=0{,}500$, $\beta(x_1)=\pm 0{,}2736$ ($\pm 15{,}7°$). При этом величина подъемной силы $J=-0{,}02279\Lambda$, а поле давления описывается формулой

$$p(x_1)=\begin{cases} 0{,}04559(2x_1+1), & x_1\in[-0{,}5;0] \\ -0{,}04559(2x_1-1), & x_1\in(0;0{,}5] \end{cases}$$

с максимумом в точке $x_1=0$, равным 0,04559.



Фиг. 2



Фиг. 3

Второе решение реализуется одним из двух способов: в первом (фиг. 3) микроканавки расположены в области $[-0{,}5;\ 0{,}2292]$; во втором, наоборот,— в области $[-0{,}2292;\ 0{,}5]$. Естественно, что параметры микроканавок в обоих случаях одинаковы: $\Delta(x_1)=3{,}189$; $\varkappa(x_1)=0{,}6537$; $\beta(x_1)=\pm0{,}3773$ $(\pm18{,}2°)$. Подъемная сила $J=-0{,}02179\Lambda$. В случае расположения микроканавок, отвечающем фиг. 3, поле давления описывается формулами

$$p(x_1)=\begin{cases} 0{,}02988(2x_1+1), & x_1\in[-0{,}5;0{,}2292] \\ -0{,}08045(2x_1-1), & x_1\in(0{,}2292;0{,}5] \end{cases}$$

с максимумом в точке $x_1=0{,}2292$, равным 0,04357.

Таким образом, большую подъемную силу в рамках расширенной задачи имеет шевронный профиль.

В заключение отметим, что подъемная сила оптимального периодического профиля выше, чем подъемная сила оптимального профиля открытого типа, сообщающегося со средой на всей своей границе [1]. Действительно, приведенная в [1] величина $I=-0{,}02\,\Lambda$ (для аналогичной изучаемой здесь квадратной области Ω) меньше, чем любое из приведенных выше значений подъемной силы в периодической задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болдырев Ю. Я., Троицкий В. А.* Одна пространственная вариационная задача газодинамической теории смазки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 34–39.
2. *Болдырев Ю. Я., Борисов Ю. В.* Упорный секторный подшипник с газовой смазкой, имеющий максимальную несущую способность // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 35–42.
3. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 478 с.
4. *Райтум У. Е.* Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 276 с.
5. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Твен Нгоан.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34. № 5. С. 65–133.
6. *Болдырев Ю. Я.* К проблеме построения асимптотического аналога уравнения Рейнольдса газовой смазки. Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 6. С. 8–14.
7. Теория оптимальных аэродинамических форм/Под ред. Миеле. М.: Мир, 1969. 507 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
26.II.1991