

УДК 532.516.5.011 : 517.54

© 1992 г. В. М. ЕНТОВ, П. И. ЭТИНГОФ

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ПРЕССОВАНИЯ

Прессование, сводящееся к расплющиванию заготовки вязкого материала между двумя жесткими поверхностями, является одним из основных способов получения тонкостенных изделий из металлов, и особенно полимерных материалов. В ряде случаев при прессовании материал имеет возможность свободно растекаться в зазоре между матрицей и штампом («прессование со свободным краем»), и в процессе прессования происходит значительное изменение формы заготовки. В данной работе рассматривается задача об эволюции формы заготовки и показано, что при естественных упрощающих предположениях эта задача допускает полный набор интегралов движения, позволяющих получить ряд нетривиальных точных решений. Близкий к исполняемому подход к задаче о прессовании предложен в [1].

1. Постановка задачи. Плоский зазор. Рассмотрим тонкий зазор между параллельными жесткими плоскостями $z=0$ и $z=b(t)$. Предположим, что в начальный момент $t=0$ часть зазора, расположенная над областью D_0 плоскости $z=0$, заполнена жидкостью. Зазор $b(t)$ изменяется во времени по заданному закону; при этом область D , занятая жидкостью, эволюционирует, $D_0 \rightarrow D(t)$.

Тонкость зазора означает, что в течение всего времени движения зазор b весьма мал сравнительно с характерными размерами области $D(t)$. При этом естественно пренебречь краевыми эффектами и рассматривать движение жидкости в приближении смазочного слоя, характеризуя его давлением $p(x, y, t)$ и средней скоростью $w(x, y, t)$, где w — плоский вектор.

С учетом подвижности стенки зазора, считая жидкость несжимаемой, имеем очевидное уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} w = -b^{-1} db/dt \quad (1.1)$$

Уравнение, связывающее скорость w с распределением давления, запишем в безынерционном приближении («очень вязкая» жидкость); при этом конкретное выражение будет определяться реологией жидкости. Для ньютоновского реологического поведения, естественного для описания изотермической штамповки полимерных материалов, имеем

$$w = -(b^2/12\mu) \nabla p \quad (1.2)$$

На границе области $D(t)$ давление жидкости равно атмосферному, принимаемому в дальнейшем за нуль $p(x, y, t) = 0$, $(x, y) \in \partial D(t)$. Наконец, кинематическое условие дает

$$V(x, y, t) = w_n(x, y, t), \text{ или } \frac{\partial F}{\partial t} + (w, \nabla F) = 0, \quad (x, y) \in \partial D(t) \quad (1.3)$$

Здесь V — скорость перемещения границы в некоторой ее точке, w_n — нормальная к границе составляющая скорости жидкости в этой же точке. $F(x, y, t) = 0$ — уравнение границы.

Подставляя (1.2) в (1.1) и вводя потенциал скорости Φ , имеем задачу

$$\Delta \Phi = -b^{-1} \dot{b}, \quad (x, y) \in D(t) \quad (1.4)$$

$$\Phi(x, y) = 0, \quad V = \partial \Phi / \partial n, \quad (x, y) \in \partial D(t)$$

Соотношения (1.4) при заданной начальной форме области, занятой материалом $D_0 = D(0)$, определяют задачу со свободной границей для описания эволюции формы заготовки при прессовании. Интеграл

$$P = \int_{D(t)} p \, dx \, dy = -\frac{12\mu}{b^2} \int_{D(t)} \Phi \, dx \, dy$$

выражает силу штамповки в любой момент времени.

2. Система интегралов задачи. Если не считать одномерных задач, когда область D_0 является бесконечной полосой или кругом, по-видимому, неизвестны нетривиальные точные решения сформулированной в п. 1, задачи (кроме указанного в [1]), и она обычно решается численно. Это и неудивительно, так как речь идет о существенно нелинейной нетрадиционной задаче. Однако очевидная близость рассматриваемого класса течений к течениям в лотке Хеле — Шоу (например, [2, 3]) и новые подходы, развитые в последнее время в теории таких течений [4–6], позволяют достичь определенного продвижения и в задаче о штамповке. Указанная аналогия и возможный подход к ее решению отмечены в [1]; ниже развивается родственный подход, обладающий, как представляется, несколько большими возможностями.

Центральным моментом является установление того обстоятельства, что динамическая система в пространстве областей, определяемая задачей (1.4), является полностью интегрируемой. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $u(x, y)$ — произвольная гармоническая функция на плоскости. Тогда величина

$$M(u) = b(t) \int_{D(t)} u \, dx \, dy \quad (2.1)$$

сохраняется в процессе движения.

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= b(t) \oint_{\partial D(t)} u w_n \, dt + \dot{b}(t) \int_{D(t)} u \, dx \, dy = b \oint_{\partial D} \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial u}{\partial n} \right) dt + \\ &+ \dot{b} \int_D u \, dx \, dy = b \int_D (u \Delta \Phi - \Phi \Delta u) \, dx \, dy + \dot{b} \int_D u \, dx \, dy = \\ &= b \int_D -\frac{\dot{b}}{b} u \, dx \, dy + \dot{b} \int_D u \, dx \, dy = 0 \end{aligned}$$

Здесь вначале использован тот факт, что $\Phi = 0$ на ∂D , а затем формула Грина.

Этот результат является прямым обобщением теоремы Ричардсона в теории течений Хеле — Шоу [4, 5]. Из него следует, что, не решая явным образом задачу об эволюции области, можно вычислить все моменты области $D(t)$, т. е. интегралы по $D(t)$ от всевозможных гармонических функ-

ций для произвольного момента времени

$$\int_{D(t)} u \, dx \, dy = \frac{b(0)}{b(t)} \int_{D(0)} u \, dx \, dy \quad (2.2)$$

Это позволяет очевидным образом предложить простые приближенные интегральные методы отыскания области $D(t)$; с другой стороны, в ряде случаев теорема 1 дает возможность построить единообразным методом ряд нетривиальных точных решений рассматриваемой задачи.

3. Построение точных двумерных решений задачи штамповки. Метод восстановления области D по известным значениям интегралов по ней от всех гармонических функций был предложен в [4, 5] и обсуждался затем применительно к течениям Хеле – Шоу в ряде работ. Дальнейшее изложение следует работе [5], хотя и в несколько более общей форме [6].

Пусть D – произвольная конечная односвязная область. Рассмотрим функцию

$$h_D(w) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{dx \, dy}{w-z} \quad (3.1)$$

где $z=x+iy$; $w=\xi+i\eta$ – комплексные переменные. Функция $h_D(w)$ аналитична во внешности D^+ области D , причем для любого w вне D функция $(w-z)^{-1}$ аналитична как функция z в D , и в силу теоремы 1 для задачи штамповки имеем

$$h_{D(t)}(w) = (b(0)/b(t)) h_{D(0)}(w) \quad (3.2)$$

Пусть $f:K \rightarrow D$ – аналитическая функция, реализующая конформное отображение единичного круга в D , причем $f(0)=0$, $f'(0)>0$. Тогда функция

$$\varphi(\zeta) = f^*(1/\zeta) - h_D(f(\zeta)) \quad (f^*(z) \equiv \overline{f(\bar{z})}) \quad (3.3)$$

определенная в некоторой окрестности единичной окружности, допускает аналитическое продолжение без особенностей внутрь единичного круга [5]. При этом предполагается, что граница ∂D аналитична, и функция $f(\zeta)$ аналитична в некоторой области K' , содержащей внутри себя единичный круг. Будем считать $f(\zeta)$ аналитически продолженной вне K (возможно, с особенностями). Из аналитичности $\varphi(\zeta)$ внутри единичного круга и выражения (3.3) ясно, что особенности $f(\zeta)$ вне единичного круга определяются особенностями $h_D(w)$ внутри области D . Пусть, в частности, $dh_D(w)/dw$ – дробно-рациональная функция. Тогда $df/d\zeta$ также оказывается дробно-рациональной функцией, причем главные части разложения f вблизи особенностей определяются через главные части разложения h_D из условия взаимного уничтожения сингулярных членов в выражении (3.3) для $\varphi(\zeta)$. Если $h'_{D(0)}(w)$ – дробно-рациональная функция, то в силу (3.2) $h'_{D(t)}(w)$ – также дробно-рациональная функция с теми же особенностями; из (3.1) очевидно, что $h_D(\infty)=0$. Это позволяет построить семейство точных решений, для которых $h_D'(w)$ является дробно-рациональной функцией, отвечающих всюду плотному в подходящей метрике в пространстве областей семейству начальных областей $D(0)$.

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть область $D(0)$ получается из единичного круга отображением

$$f_0(\zeta) = A_0 \ln(1 + \alpha_0 \zeta), \quad A_0, \alpha_0 > 0, \alpha_0 < 1 \quad (3.4)$$

$$f_0^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \overline{f_0 \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right)} = A_0 \ln \left(1 + \frac{\alpha_0}{\bar{\zeta}} \right) = A_0 \ln \left(1 + \frac{\alpha_0}{\zeta} \right)$$

Тогда особые точки $(d/d\xi)f_0^*(1/\xi)$ суть простые полюса в точках $\xi=0$ и $\xi=-\alpha_0$, так что в силу (3.3) $h_{D'}(w)$ имеет простые полюсы в точках $w=f_0(0)=0$ и $w=f_0(-\alpha_0)=A_0 \ln \times (1-\alpha_0^2) = -\beta_0$. При этом в силу (3.3) коэффициенты при особенностях $h_{D'}(w)$ в этих точках должны, очевидно, быть равны и противоположны по знаку, так что из разложения $f_0^*(1/\xi)$ вблизи $\xi=0$ следует, что

$$h_{D(0)}(w) = A_0 \ln(1 + \beta_0/w) \quad (3.5)$$

В силу (3.2) имеем

$$h_{D(t)}(w) = [b(0)/b(t)] \times A_0 \ln(1 + \beta_0/w) \quad (3.6)$$

Используя вновь (3.3) с учетом этого выражения, найдем воспроизводящие проделанные выше рассуждения в обратном порядке, $f_i(\xi) = A_i \ln(1 + \alpha_i \xi)$, где, согласно сказанному ранее, имеют место соотношения

$$A_i \ln(1 - \alpha_i^2) = -\beta_0; \quad A_i = A_0 [b(0)/b(t)] \\ \alpha_i = [1 - (1 - \alpha_0^2)^{b(0)/b(t)}]^{-1/2}; \quad A_i = A_0 b(0)/b(t)$$

На фиг. 1 показана эволюция контура, первоначальное положение которого 1 отвечает $\alpha_0 = 0,985$, последовательные положения контура отвечают приращению площади заготовки, равному ее начальному значению.

Пусть отображение начального контура заготовки задается полиномом

$$f_0(\xi) = a_1^{(0)}\xi + a_2^{(0)}\xi^2 + \dots + a_n^{(0)}\xi^n \quad (3.7)$$

Это равносильно тому, что $h_{D(0)}(z)$ является многочленом от $1/z$ степени n [4]. В силу (3.2) это свойство сохраняется при движении, и из (3.3) следует, что $f_i(\xi)$ также многочлен степени n

$$f_i(\xi) = a_1(t)\xi + a_2(t)\xi^2 + \dots + a_n(t)\xi^n \quad (3.8)$$

Из определения (3.1) и (3.8) следует [4], что

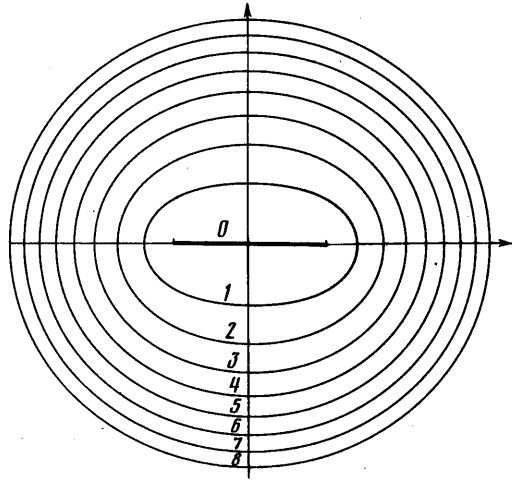
$$h_D(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n M_{j-1} z^{-j}; \quad M_k = \int_D z^k dx dy \quad (3.9)$$

$$M_k = \pi \sum_{m_1, m_2, \dots, m_{k+1}=1}^{\infty} m_1 a_{m_1} a_{m_2} \dots a_{m_{k+1}} \bar{a}_{m_1 + \dots + m_{k+1}} \quad (3.10)$$

Сумма в (3.10) конечна, так как $a_j = 0, j > n$. Соотношения (3.10), справедливые для произвольного момента времени, с учетом следующего из (3.2) и (3.9) соотношения

$$M_k(t) = [b(0)/b(t)] M_k(0) \quad (3.11)$$

дают систему нелинейных уравнений для определения коэффициентов $a_j(t)$ для произвольного момента времени; фактически ее, по-видимому, удоб-



Фиг. 1

нее решать по шагам, последовательно наращивая время, что гарантирует быструю сходимость итерационного процесса на каждом шаге.

Наличие класса полиномиальных точных решений указывалось в [1]. Полиномиальные точные решения вида (3.8) могут быть очевидным образом использованы для аппроксимации решений, отвечающих более сложным начальным контурам. Для оценки совершаемой при этом ошибки полезно следующее утверждение (Теорема 2 или «теорема ограничения»):

Пусть $\Gamma = \partial D_0$ и $\Gamma' = \partial D_0'$ — два различных начальных контура, причем $D_0' \subset D_0$. Тогда при последующей эволюции решения область $D'(t)$ остается внутри области $D(t)$.

Доказательство проводится так же, как и в аналогичных задачах теории фильтрации [7], с помощью теорем сравнения. Допустим, что сформулированное выше утверждение неверно и t^* — последний момент, для которого $D'(t^*) \subset D(t^*)$. Это означает, что контуры $\partial D'(t^*)$ и $\partial D(t^*)$ имеют общие точки, и пусть P — одна из таких точек. Из теорем сравнения следует, что скорость перемещения границы $\partial D'(t^*)$ в точке P меньше, чем скорость перемещения границы $\partial D(t^*)$ в той же точке, $v'(P, t^*) < v(P, t^*)$.

Действительно,

$$v(P, t^*) = C \int_n \frac{\partial}{\partial n} \Big|_{\xi=P} G(\xi, \eta) d\sigma(\eta)$$

где $G(\xi, \eta)$ — функция Грина области $D(t^*)$ с полюсом в η ; аналогичное соотношение имеет место для $D'(t^*)$. Однако в силу принципа максимума и того, что $D'(t^*) \subset D(t^*)$

$$G'(\xi, \eta) \leq G(\xi, \eta); \quad 0 < \frac{\partial G'(\xi, \eta)}{\partial n} \Big|_{\xi=P} \leq \frac{\partial G(\xi, \eta)}{\partial n} \Big|_{\xi=P}$$

так что $v'(P, t^*) < v(P, t^*)$. Это означает, что граница области D' не может «обогнать» границу D в момент $t=t^*$, т. е. имеем противоречие. В частности, если граница начальной области $D(0)$ заключена между двумя окружностями, $K_1 \subset D(0) \subset K_2$, то при последующей эволюции граница $\partial D(t)$ будет заключена между двумя окружностями, развивающимися из окружностей ∂K_1 и ∂K_2 . Поскольку при $b(t) \rightarrow 0$ радиусы окружностей R_i растут как $R_i^0 [b(0)/b(t)]^{1/2}$, это означает определенную устойчивость эволюции формы — относительные отклонения от круга не нарастают.

Установленная выше теорема об ограничении может оказаться особенно полезной при решении следующей обратной задачи. Пусть заданы начальная b_0 и конечная b_T толщины заготовки и конечная форма «детали» в плане D_T . Требуется указать форму начальной заготовки D_0 , которая при штамповке от толщины b_0 до толщины b_T примет форму D_T . Так сформулированная задача может быть точно решена в случае, если область D_T попадает в класс «полиномиальных», «рациональных» или вообще «логарифмически-рациональных» областей. Для этого достаточно обратиться во времени проведенные выше рассуждения.

Обратная задача может не иметь решения (так будет, например, если за D_T взять область, получающуюся слиянием в процессе штамповки двух круговых в момент $t=0$ заготовок), иными словами, существуют недостижимые области. С другой стороны, обратная задача, являющаяся аналогом стягивания контура в лотке Хеле — Шоу или контура нефтеносности [3—5, 8], заведомо некорректна, и ее решение может оказаться непродолжимым за определенный момент времени.

Однако если область D_T близка к достижимой, то обратную задачу можно решить приближенно следующим образом. Пусть $f_T(\xi)$ — ряд Тейлора для функции, реализующей конформное отображение единичного круга в D_T . Оборвем этот ряд на n -м члене и обозначим через f_{Tn} полученный полином. При достаточно больших n и достаточно малом $\varepsilon > 0$ отображения $(1+\varepsilon)f_{Tn}$ и $(1-\varepsilon)f_{Tn}$ порождают полиномиальные области D_T^+ и D_T^- , для которых $D_T^- \subset D_T \subset D_T^+$. Решая обратную задачу, найдем прообразы обла-

стей D_T^\pm . Тогда по доказанному ранее для любой области D_0^* , для которой $D_0^- \subset D_0^* \subset D_0^+$, будем иметь $D_T^- \subset D_T^* \subset D_T^+$.

Область D_T^* будет ε -близка к D_T . Таким образом, в известном смысле рассматриваемый класс решений образует всюду плотное множество в пространстве начальных областей.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий упомянутую выше возможность существования недостижимых областей. Пусть область $D(0)$ состоит из двух кругов радиуса R с центрами в точках $z = \pm l$, $l > R$. Тогда, как нетрудно проверить,

$$h_{D(0)}(z) = R^2 \left(\frac{1}{z-l} + \frac{1}{z+l} \right) = \frac{2R^2 z}{z^2 - l^2}$$

$$h_{D(t)}(z) = 2R^2 \frac{b(0)}{b(t)} \frac{z}{z^2 - l^2}$$

Вплоть до момента t^* , $b(t^*) = b(0)R^2/l^2$ начальные круги деформируются независимо, оставаясь кругами; при $t > t^*$ они сливаются в единую область. Соответствующее конформное отображение, переводящее в эту область единичный круг, имеет вид [5]

$$f_t(\zeta) = \frac{\alpha \zeta}{1 - \zeta^2 \bar{\zeta}^2}, \quad \zeta_t = (\rho^2 - \sqrt{\rho^4 - 1})^{1/2}$$

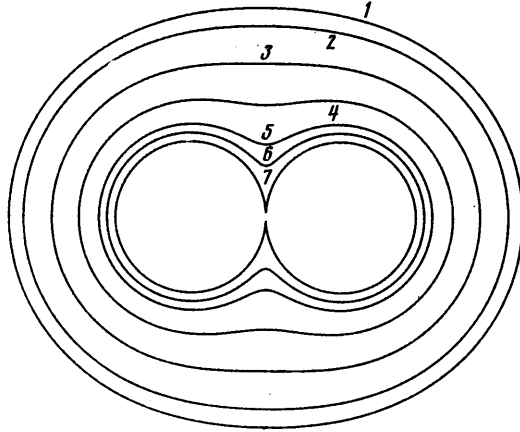
$$\alpha = \frac{1 - \zeta_t^4}{\zeta_t}, \quad \rho = \left(\frac{b(0)R^2}{b(t)l^2} \right)^{1/2} \quad (3.12)$$

а последовательные контуры области — лемнискаты, получающиеся из эллипсов отображением обратными радиусами. Замечательно, что решение Ричардсона (3.12) получено для течения в щелевом лотке Хеле — Шоу, когда увеличение площади области происходит вследствие закачки жидкости через точечные источники в точках $z = \pm l$, а рассмотренное выше движение отвечает сдвиганию фиксированного объема жидкости между двумя плоскостями; тем не менее форма областей $D(t)$ при данной площади области оказывается в этих двух движениях одной и той же. Вплоть до смыкания первоначально круговых областей этот факт тривиален, однако для последующего движения такое совпадение совершенно неожиданно.

Математически этот факт связан с тем, что при данной начальной конфигурации в задаче Ричардсона все моменты области относительно начала координат и функции h_D изменяются пропорционально ее площади, точно так же, как это имеет место, согласно (3.2), в общем случае в задаче о штамповке.

Предположим теперь, что требуемая форма детали описывается лемнискатой площади $S = 10\pi l^2$ (кривая 1, фиг. 2). Тогда она может быть получена из начальной заготовки площади $S_0 \geq 2\pi l^2$ при осадке в $S/S_0 \leq 5$ раз. Формы заготовок, отвечающих осадке в $1,30768^{n-1}$, $n = 2-7$ раз, описываемые лемнискатами того же семейства, показаны на фиг. 2 кривыми 2-7 соответственно. Требуемая окончательная форма не может быть получена из одной начальной заготовки, если уменьшение толщины при штамповке должно быть больше пяти.

4. Один предельный случай. Полезно, выходя за рамки исходной асимптотической постановки задачи, рассмотреть класс «заготовок», сосредоточенных в начальный момент на одномерных объектах (линиях) и формально имеющих бесконечную толщину, так что линейная плотность начального распределения объема (массы) заготовки конечна. Чтобы получить необходимое обобщение, заметим, что теорему 1 можно интерпретировать следующим образом: среднее значение $\langle u \rangle$ гармонической функции u по области D не изменяется во времени. Пусть теперь «гармониче-



Фиг. 2

ская функция» — константа, а «область» стянута в линию (или граф) γ , линейная плотность распределения вдоль которой постоянна. Тогда «осреднение» по линии γ дает

$$h_{\gamma}^0(w) = \frac{1}{\pi l(\gamma)} \int \frac{dl}{w-z} \quad (4.1)$$

где $l(\gamma)$ — длина кривой γ . В частности, если γ представляет собой объединение прямолинейных отрезков $[a_k, b_k]$, образующих связное дерево, то

$$h_{\gamma}^0(w) = \sum_k \frac{|b_k - a_k|}{b_k - a_k} \ln \frac{a_k - w}{b_k - w} \left(\pi \sum_k |b_k - a_k| \right)^{-1} \quad (4.2)$$

Так как $dh_{\gamma}^0(w)/dw$ — рациональная функция, то эта задача, как показано выше, имеет точное решение. Рассмотрим три примера. Заготовка в виде прямолинейного отрезка. Если γ — отрезок $[-a, a]$, то по формуле (4.2)

$$h_{\gamma}^0(w) = \frac{1}{2\pi a} \ln \frac{w+a}{w-a} \quad (4.3)$$

Обозначим через $D(S)$ область, занятую заготовкой при ее расплющивании до площади S . По теореме 1

$$h_{D(S)}(w) = S h_{\gamma}^0(w) = \frac{S}{2\pi a} \ln \frac{w+a}{w-a} \quad (4.4)$$

Отсюда следует, что функция $f_S(\xi)$ имеет две логарифмические точки ветвления

$$f_S(\xi) = \frac{S}{2\pi a} \ln \frac{1+\alpha\xi}{1-\alpha\xi} \quad (4.5)$$

причем из условия $f_S(\alpha) = a$ следует $\alpha = (\text{th}(\pi a^2/S))^{1/2}$.

Соответствующее решение также показано на фиг. 1; индекс 0 отвечает начальному отрезку.

Крестообразная заготовка с вершинами в точках $ae^{i\pi/2}$, $k=0 \div 3$. Повторяя аналогичные рассуждения, находим

$$h_{\gamma}^0(w) = \frac{1}{4\pi a} \left(\ln \frac{w+a}{w-a} - i \ln \frac{w+ai}{w-ia} \right)$$

$$f_s(\zeta) = \frac{S}{4\pi\alpha} \left(\ln \frac{1+\alpha\zeta}{1-\alpha\zeta} + i \ln \frac{1+i\alpha\zeta}{1-i\alpha\zeta} \right) \quad (4.6)$$

$$\frac{\pi\alpha^2}{S} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \alpha^2$$

Заготовка в виде дуги γ окружности радиуса R с углом 2α . Имеем

$$h_{\gamma^0}(w) = \frac{1}{2\pi\alpha R} \int_{\gamma} \frac{ds}{w-z} = \frac{1}{\pi w} + \frac{i}{2\pi\alpha w} \ln \frac{w - \operatorname{Re}^{i\alpha}}{w - \operatorname{Re}^{-i\alpha}} \quad (4.7)$$

$$h_{D(S)}(w) = \frac{S}{\pi w} + \frac{iS}{2\pi\alpha w} \ln \frac{w - \operatorname{Re}^{i\alpha}}{w - \operatorname{Re}^{-i\alpha}} \quad (4.8)$$

Поскольку производная функции (4.8) не является рациональной, для построения решения приходится использовать искусственный прием. Пусть $f_s(\zeta)$ реализует конформное отображение $K \rightarrow D(\zeta)$, причем $f_s(0) = -R$, $f_s'(0) > 0$. Функция

$$f_s(\zeta) f_s^*(1/\zeta) - f(\zeta) h_{D(S)}(f(\zeta)) \quad (4.9)$$

голоморфна в K , так что особенности произведения $f_s(\zeta) f_s^*(1/\zeta)$ внутри K определяются особенностями $z h_{D(S)}(z)$ в $D(S)$. В данном случае, как легко видеть, $f_s^*(\zeta) = f_s(\zeta)$ и функция

$$\theta(\zeta) = f_s(\zeta) f_s^*\left(\frac{1}{\zeta}\right) = f_s(\zeta) f_s\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \theta\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

Но функция

$$z h_{D(S)}(z) = \frac{S}{\pi} + \frac{iS}{\pi\alpha} \ln \frac{z - \operatorname{Re}^{i\alpha}}{z - \operatorname{Re}^{-i\alpha}}$$

имеет логарифмические точки ветвления в точках $z = \operatorname{Re}^{\pm i\alpha}$. Функция $\theta(\zeta)$ должна иметь соответствующие точки ветвления внутри K и по доказанному свойству $\theta(\zeta) = \theta(1/\zeta)$ снаружи, т. е.

$$f_s(\zeta) f_s\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \theta(\zeta) = \frac{iS}{2\pi\alpha} \ln \left(\frac{\zeta - \beta}{\zeta - \bar{\beta}} \frac{1 - \beta\zeta}{1 - \bar{\beta}\zeta} \right) + C \quad (4.10)$$

Логарифмируя (4.10) и используя интегральную формулу Коши, находим при $|\zeta| < 1$

$$f_s(\zeta) = \frac{1}{R} \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=1} \frac{\ln \theta(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi \right)$$

При этом входящие в (4.10) вещественная постоянная C и комплексная постоянная β подлежат отысканию из уравнения

$$f_s(0) = R, \quad f_s(\beta) = \operatorname{Re}^{i\alpha} \quad (4.11)$$

5. О штамповке неплоских деталей. Для приложений существенный интерес может представлять обобщение изложений постановки и результатов на случай, когда штамповка происходит в зазоре между неплоскими поверхностями. Это обобщение достигается ценой достаточно искусственных ограничивающих предположений. Именно допустим, что матрица и пуансон ограничены одинаковыми поверхностями S , сдвинутыми друг относительно друга вдоль оси движения пуансона («по вертикали») на расстояние $b(t)$. Очевидно, это допущение, необходимое для последующих построений, не вполне естественно, так как приводит к непостоянству толщины штампуемой детали.

В этом случае уравнения движения жидкости в зазоре имеют вид

$$w = -\frac{b^2 \lambda^2}{12 \mu g} \nabla p, \quad \operatorname{div}(\lambda g w) = -\frac{1}{6} \frac{db}{dt} \quad (5.1)$$

Здесь (x, y) — изотермические координаты на поверхности S , через которые квадрат длины линейного элемента выражается в виде

$$dl^2 = g(x, y) (dx^2 + dy^2), \quad \lambda = \cos \alpha \quad (5.2)$$

где α — угол между нормалью к поверхности S в точке (x, y) и вертикалью.

Из (5.1) имеем уравнение для давления

$$\nabla(\lambda^3 \nabla p) = \frac{12 \mu}{b^3} \frac{db}{dt} \quad (5.3)$$

причем на свободной границе $\Gamma = \partial D$ заготовки имеем

$$p = 0, \quad V = [-b^2 \lambda^2 / (12 \mu g)] \partial p / \partial n|_{\Gamma} \quad (5.4)$$

где V — скорость движения границы.

Повторяя с небольшими изменениями рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 1, легко получить следующее ее обобщение.

Теорема 3. Пусть $u(x, y)$ — произвольное решение уравнения

$$\nabla(\lambda^3 \nabla u) = 0 \quad (5.5)$$

тогда функционал

$$M(u) = b(t) \int_{D(t)} g \lambda u \, dx \, dy \quad (5.6)$$

является интегралом движения. В случае $\lambda = H^k$, где $H(x, y)$ — гармоническая функция, это утверждение позволяет свести задачу к изученной выше; возможность использования теоремы 3 для эффективного построения решений не изучена.

6. Об одном аналоге из области теории фильтрации. В теории фильтрации иногда рассматривается следующая упрощенная модель разработки крупного нефтяного месторождения при активном водонапорном режиме. Предполагается, что задана область, первоначально занятая нефтью $D(0)$; отбор нефти моделируется распределенными по области D стоками; на границе области D за счет подпора окружающей нефтяную залежь воды давление постоянно. По мере отбора происходит продвижение краевых вод, и область, занятая нефтью, сокращается. В предположении, что пласт однороден, движение нефти следует закону Дарси и интенсивность отбора с единицы площади одинакова по всей залежи, задача о стягивании контура нефтеносности оказывается прямым аналогом рассмотренной выше обратной задачи о штамповке плоских деталей, лишь вместо обратной величины зазора $b(t)$ роль параметра будет играть оставшаяся площадь занятой нефтью области. В частности, например, последовательность контуров 2–7 на фиг. 2 описывает эволюцию контура залежи при отборе соответственно 23,5; 41,5; 55,3; 65,8; 74,8 и 80% от извлекаемых запасов нефти при условии, что первоначальный контур залежи — лемниската (кривая 1); при отборе 80% извлекаемых запасов залежь распадается на два несвязных куска.

В силу очевидной неустойчивости вытеснения такая «история разработки» отвечает идеальному процессу и является заведомо чересчур оптимистической; однако она может оказаться полезной для первоначальных оценок в тестировании численных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Howison S. D., Ockendon J. R., Lacey A. A. Singularity development in moving-boundary problems // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1985. V. 38. № 3. P. 343–360.
2. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
3. Bensimon D., Kadanoff L. P., Liang Shoudan, Shraiman B. I., Tang Chao. Viscous flows in two dimensions // Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. № 4. P. 977–999.

4. *Richardson S.* Hele Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 56. № 4. P. 609–618.
5. *Richardson S.* Some Hele Shaw flows with time-dependent free boundaries // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 102. P. 263–278.
6. *Этингоф П. И.* Об интегрируемости задач фильтрации с подвижной границей // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 1. С. 42–47.
7. *Гольдштейн Р. В., Енгов В. М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
8. *Полубаринова-Кочина П. Я.* К вопросу о перемещении контура нефтеносности // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. № 4. С. 254–257.

Москва

Поступила в редакцию
27.XII.90