МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1992

УДК 532.516.013.4

© 1992 г. М. А. ГОЛЬДШТИК, Н. М. ЕРШ

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОРИСТОЙ ТРУБЕ

В работе [1] исследовалась устойчивость стационарного автомодельного течения в пористой трубе при равномерном вдуве. В данной статье изучается влияние вращения трубы вокруг своей оси на устойчивость комбинированного стационарного движения с вращением и вдувом. В этом случае также, как и для течения Пуазейля во вращающейся трубе, решение представляется простой суперпозицией составляющих движений, когда вращение не оказывает влияние на меридиональное течение [2, 3]. Но уже в задаче об устойчивости вращения оказывает сильное воздействие. Так, пуазейлев поток во вращающейся трубе обнаруживает конвективную неустойчивость уже при небольших числах Рейнольдса, тогда как обе исходные компоненты движения абсолютно устойчивы в малом [4–7].

С практической точки зрения, рассматриваемая постановка представляет интерес в связи с проблемой генерации мощных акустических колебаний в закрученных потоках, в частности в вихревой камере, течение в приосевой области которой может быть промоделировано движением во вращающейся пористой трубе [2].

Рассматривается движение в пористой вращающейся трубе радиуса a с пространственным ускорением вдоль оси симметрии z. Уравнения Навье – Стокса допускают автомодельные решения [2, 3] в цилиндрической системе координат

$$v_r=v_r(r), \quad v_\varphi=v_\varphi(r), \quad v_z=zw(r) \tag{1}$$

В данной работе изучается устойчивость течения (1) к возмущениям скорости и давления вида

$$v_r=V_r+\frac{u}{r}\theta, \quad v_\varphi=V_\varphi+\frac{v}{r}\theta, \quad v_z=V_z+w\theta \tag{2}$$

$$p=P+q\theta, \quad \theta=\exp i(\alpha z+m\varphi-\omega t)$$

где α, m – осевое и азимутальное волновые числа, $\omega=\omega_r+i\omega_i$, ω_r – частота, ω_i – инкремент возмущений, которые нарастают при $\omega_i>0$, u, v, w, q – малые комплекснозначные амплитуды возмущений, зависящие только от r.

Такие возмущения в [1] условно названы классическими и показано, что исследование на устойчивость достаточно проводить относительно таких возмущений, установлено, что самая опасная мода – неосесимметричная с $m=-1$. Для каждой из компонент скорости основного течения введены свои характерные масштабы $V_r(a)$, $V_\varphi(a)$ и $V_z(0)=zW(0)$, которым соответствуют три числа Рейнольдса: R, R_φ и R_z. Линеаризуя уравнения Навье – Стокса, для малых комплекснозначных амплитуд возмущения получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'=-i\left(\frac{m}{r}v+\alpha rw\right), \quad v'=v_1, \quad w'=w_1$$

$$q' = -\frac{1}{r}\left\{\left[\Omega+R\left(W+\frac{2V_r}{r}\right)\right]u-(imRV_r+2R_\varphi V_\varphi)\frac{v}{r}-\right. \qquad (3)$$

$$\left.-i\alpha RrV_r w+\frac{im}{r}v_1+i\alpha r w_1\right\}$$

$$v_1'=\left[R_\varphi\left(V_\varphi'+\frac{V_\varphi}{r}\right)-\frac{2im}{r^2}\right]u+\Omega v+imq+\left(RV_r+\frac{1}{r}\right)v_1$$

$$w_1'=R_zV_z'\frac{u}{r}+(\Omega+RW)w+i\alpha q+\left(RV_r-\frac{1}{r}\right)w_1$$

$$\Omega=\frac{m^2}{r^2}+\alpha^2+i\left(\frac{m}{r}R_\varphi V_\varphi+\alpha R_zV_z-\omega\right)$$

$$R=\frac{aV_r(a)}{\nu},\qquad R_\varphi=\frac{aV_\varphi(a)}{\nu},\qquad R_z=\frac{aV_z(0)}{\nu}$$

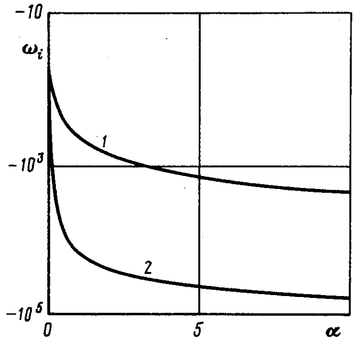
Система (3) получена в результате «замораживания» переменной z, которую можно выразить через введенные параметры $z=R_z/RW(0)$. Для возмущений u, v, w ставятся условия аналитичности на оси трубы и прилипания на стенке [1]. Ранее в работе [8] рассмотрена система, эквивалентная (3), при $R=0$. Метод решения задачи, использующий несимметричную прогонку, изложен в [1].

В полной постановке линейная задача гидродинамической устойчивости имеет шесть параметров: R, R_φ, R_z, α, m, n, где n — спектральный номер собственного значения ω_n.

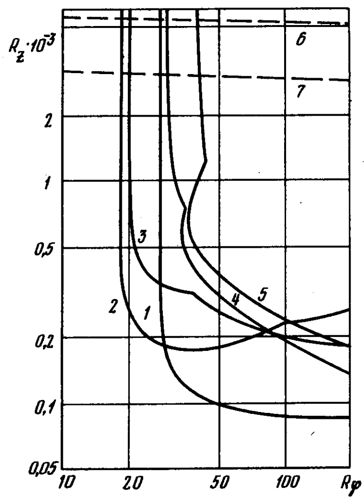
Система (3) охватывает широкий круг осесимметричных задач, в число которых входят и поставленные точно, без «замораживания». Сюда относится одномерное течение Пуазейля в круглой трубе, которая может и вращаться. Это классическое течение устойчиво в малом [9], однако принято считать, что с ростом рейнольдсова числа R_z запас устойчивости уменьшается и при $R_z\to\infty$ течение становится нейтрально устойчивым. На фиг. 1 представлены результаты расчетов зависимости $\omega_i(\alpha)$ для моды $m=0$ при $R_z=5000$ (кривая *1*) и $R_z=10^6$ (кривая *2*), причем $\omega_i(0)$ является конечной величиной. Эти «разрезы» для осесимметричного случая радикально отличаются от плоского случая, когда зависимость $\omega_i(\alpha)$ имеет локальный максимум, который и приводит к неустойчивости при $R_z=5770$. Из фиг. 1 видно, что с ростом R_z тенденции к нейтральности не наблюдается, так что и при $R_z\to\infty$ течение в круглой трубе обладает конечным запасом устойчивости, хотя, возможно, и малым.

В дальнейшем рассматриваются задачи о течении во вращающейся пористой трубе с глухим торцом $z=0$. В этом случае основными параметрами являются числа R и R_φ, характеризующие интенсивность вдува и скорость вращения трубы. При переборе всех приведенных выше параметров задача становится необозримой, поэтому изучаются только нейтральные возмущения с $\omega_i=0$ и $m=-1$, кроме того, определяются лишь критические параметры $\alpha=\alpha^*$ и $R_z=R_z^*$, которые соответствуют «носикам» нейтральных кривых. Заметим, что в рассматриваемой постановке числа R_z и R связаны между собой соотношением $R_z=RW(0)z$, где $W(0)$ определено выше.

Можно поставить вопрос: при каких параметрах задачи в пористой вращающейся трубе впервые наступает неустойчивость? В [7] рассчитана зависимость R_z^* от R_φ при $R=0$, установлено существование такого минимального R_φ, что при $R_\varphi<R_{\varphi\,\min}=26{,}96$ все возмущения затухают, при этом впервые неустойчивость проявляется при $R_z^*\to\infty$. В [1] аналогичное утверждение установлено для случая невращающейся трубы при



Фиг. 1



Фиг. 2

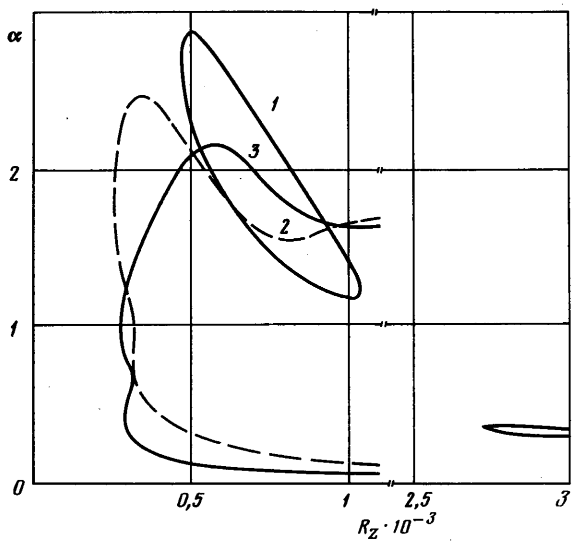
$R_\varphi=0$ и найдено наименьшее значение параметра вдува $R=R_{\min}=-23{,}94$, при котором впервые возникает неустойчивость.

Исследуя влияние вращения на устойчивость течения в трубе при вдуве, можно по непрерывности идти двумя путями: либо от вращающейся трубы без вдува, либо от трубы со вдувом, но без вращения. Между этими двумя случаями существует принципиальная разница. Если в первом из них числа Рейнольдса R_z составляют величины порядка сотен, то во втором — порядка тысяч, что характерно для сдвиговой неустойчивости.

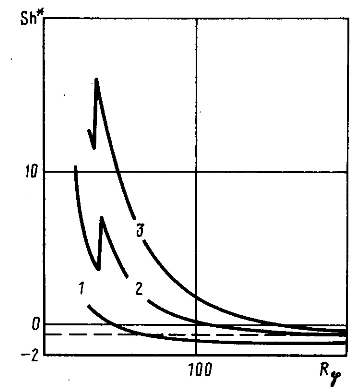
Как показывают расчеты, во втором случае влияние вращения невелико. С увеличением R_φ от нуля значение критического параметра R_z^* мало отличается от случая невращающейся трубы. При этом минимальное значение R по модулю несколько уменьшается. Если же, как и в первом случае, увеличивать параметр вдува $|R|$ от нуля, то обнаруживается, что вдув во вращающуюся трубу оказывает сильное воздействие на устойчивость. Это демонстрирует фигура 2, где представлены зависимости R_z^* от R_φ для $R=0, -5, -10, -20, -30$ (кривые *1*–*5*).

По мере усилия вдува предельное значение $R_{\varphi\,\min}$ сначала снижается от 26,96 до 17,8 при $R=-5{,}5$, а затем возрастает. Таким образом, существует нижняя граница $R_{\varphi\,\min}=17{,}8$, при которой еще возможна конвективная неустойчивость. При $R_\varphi<R_{\varphi\,\min}$ критическое значение R_z^* скачком возрастает до значений, приведенных штриховыми линиями на фиг. 2, соответствующих сдвиговой неустойчивости. Кривая *6* представляет результат для $R=-30$, а кривая *7* — $R=-60$.

Обращает на себя внимание неоднозначность зависимостей $R_z^*(R_\varphi)$ при некоторых R. Одному и тому же значению R_φ при данном R могут соответствовать два или даже три критических числа Рейнольдса R_z^*. Это отчетливо видно для значений $R=-20$ и $R=-30$. Кроме того, некоторые кривые имеют точки излома. Столь сложная картина — следствие необычного характера нейтральных кривых. Если для предельных случаев $R=0$ и $R_\varphi=0$ все нейтральные кривые представляют собой простые разомкнутые линии с одним носиком [7, 10], то в случае вдува в пористую вращающуюся трубу нейтральных кривых может быть две, они могут иметь два носика, отвечающие различным значениям α, и даже быть замкнутыми. Примеры, показанные на фиг. 3, соответствуют сле-



Фиг. 3



Фиг. 4

дующим значениям R и R_φ (−30, 41) – кривые *1* и *4*; (−10, 50) – кривая *2*; (−3,792, 200) – кривая *3*. Для каждого значения R существует такое R_φ, что на носике соответствующей нейтральной кривой равно нулю не только ω_i, но и ω_r. Это означает бифуркацию нового стационарного режима от исходного. Этот новый режим не является осесимметричным, так что здесь имеет место спонтанная потеря осевой симметрии течения. При данном R значение $\omega=0$ может быть достигнуто на кривой $R=\text{const}$ фиг. 2 либо в одной точке, либо в двух, в зависимости от местоположения точки разветвления. В этих двух точках различны R_φ, R_z и α. Вследствие этого бифуркационная зависимость $R_\varphi(R)$, отвечающая наименьшему значению R_z, имеет скачок при $R=-4{,}5$.

На фиг. 4 представлены зависимости критической частоты, выраженной числом Струхаля $Sr^*=\omega^*/\sqrt{R^2+R_\varphi^2}$, от безразмерной тангенциальной скорости R_φ для $R=0$, −10, −20 (кривые *1–3*). При $R_\varphi>150$ величины Sr^* принимают практически постоянное значение $Sr^*\simeq 0{,}6$, которое хорошо согласуется с данными эксперимента [11], что показано штриховой линией на фиг. 4. Видно, что при любом параметре вдува R существует точка бифуркации стационарного решения, когда $\omega=0$. Далее с уменьшением R_φ происходит бурный рост частот, а затем, возможно, срыв генерации колебаний, но подтвердить это может только нелинейный анализ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольдштик М. А., Ерш Н. М.* Устойчивость течения в трубе со вдувом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 63–71.
2. *Гольдштик М. А.* Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
3. *Гольдштик М. А.* Один класс точных решений уравнений Навье – Стокса // ПМТФ. 1966. № 2. С. 106–109.
4. *Pedley T. J.* On the instability of rapidly rotating shear flows to non-axisymmetric disturbances // J. Fluid Mech. 1968. V. 31. № 3. P. 604–607.
5. *Pedley T. J.* On the instability of viscous flow in a rapidly rotating pipe // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. № 1. P. 97–115.
6. *Maslowe S. A.* Instability of rigidly rotating flows to non axisymmetric disturbances // J. Fluid Mech. 1974. V. 64. № 2. P. 307–317.
7. *Mackrodt P.-A.* Stability of Hagen – Poiseuille flow with superimposed rigid rotating // J. Fluid Mech. 1976. V. 73. № 1. P. 153–164.

8. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
9. *Ахметов В. К., Шкадов В. Я.* Развитие и устойчивость закрученных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 3–11.
10. *Ерошенко В. М., Зайчик Л. И.* Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. М.: Наука, 1984. 274 с.
11. *Белоусов А. Н.* Исследование турбулентных и акустических характеристик закрученного воздушного потока в коротких вихревых камерах // Вихревой эффект и его промышленное применение: Матер. Всесоюз. науч.-техн. конф. Куйбышев, 1981. С. 303–307.

Новосибирск

Поступила в редакцию
4.V.1990