МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1992

УДК 517.958+533.601

© 1992 г. А. В. ЛАТЫШЕВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНО-СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Построено точное решение эллипсоидально-статистического модельного уравнения Больцмана. Для иллюстрации рассматривается задача о температурном скачке в разреженном газе. Путем разложения функции распределения по двум ортогональным направлениям задача сводится к решению векторного кинетического уравнения переноса с полиномиальными граничными условиями. Анзац Кейза сводит уравнение к характеристическому, для которого найдены обобщенные собственные векторы и собственные значения. Доказана теорема о существовании и единственности решения, представимого в виде разложения по собственным векторам. Доказательство сводится к решению векторной краевой задачи Римана – Гильберта с матричным коэффициентом, диагонализирующая матрица которого имеет точки ветвления в комплексной плоскости. Величина температурного скачка находится из условий разрешимости краевой задачи.

Наиболее значительные результаты в теории точных решений нелинейного уравнения Больцмана для пространственно однородного газа получены А. В. Бобылевым (см., например, [1], где приведена необходимая библиография и история вопроса). При решении граничных задач кинетической теории для пространственно неоднородного газа, как правило, используются модельные уравнения Больцмана. Наиболее широкое распространение получили такие модельные уравнения Больцмана, как уравнение с оператором столкновений в форме БГК (Бхатнагара, Гросса и Крука, БГК-уравнение), эллипсоидально-статистическая модель (ЭС-уравнение Больцмана) и уравнение с оператором столкновений в форме Шахова (S-модель уравнения Больцмана).

В тех задачах, где используется скалярное БГК-уравнение, точные решения были получены сначала Черчиньяни, а затем Лойалкой и Чипполой (см. обзор [2], где приведены ссылки на работы этих авторов). В задачах с использованием векторного БГК-уравнения точные решения получены лишь недавно в [3], где разработан общий метод построения точных решений БГК-уравнения.

Развитый в [3] метод использован в [4] при решении БГК-уравнения в задаче о слабом испарении с плоской поверхности в атмосферу собственного пара. В [5] этим же методом получены точные решения задачи о скачках температуры и плотности разреженного газа над испаряемой поверхностью с использованием также БГК-уравнения. Этот метод оказался эффективен при построении точных решений модельного уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме Шахова (см. [5]). В этой же работе [5] впервые для S-уравнения Больцмана построено точное решение классической задачи Крамерса – задачи о нахождении скорости изотермического скольжения газа.

Трудности в решении векторного БГК-уравнения объясняются отсутствием в литературе методов решения векторных краевых задач Римана – Гильберта с матричным коэффициентом, диагонализирующая матрица которого имеет точки ветвления в комплексной плоскости. Именно к таким краевым задачам сводится доказательство теоремы о разложении решения задачи по собственным векторам.

Целью настоящей работы является построение точного решения для ЭС-уравнения Больцмана и его приложение к задаче о температурном скачке в разреженном газе над плоской поверхностью.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим разреженный одноатомный газ, занимающий полупространство $x>0$. Вдали от стенки, лежащей в плоскости $x=0$, в газе поддерживается стационарное температурное поле

$$T(x)=T_w(1+\varepsilon_T+kx) \quad (x\to\infty)$$

$$k=\frac{1}{T_w}\frac{d}{dx}T(x)_{x=\infty}, \qquad \varepsilon_T=\frac{T_0}{T_w}-1$$

где T_w — температура стенки, k — значение градиента температуры, заданное вдали от стенки и отнесенное к температуре стенки, ε_T — неизвестная величина температурного скачка, подлежащая отысканию из уравнения Больцмана.

Поведение газа описывается функцией распределения $f(x, \mathbf{v})$, которая является решением модельного уравнения Больцмана

$$v_x\frac{\partial}{\partial x}f=Lf \tag{1.1}$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$f=f_0\left[1+(\varepsilon_T+kx-k\theta C_x)\left(\mathrm{C}^2-\frac{5}{2}\right)\right] \quad (x\to\infty) \tag{1.2}$$

$$f(0,\mathrm{C})=f_0(1+\varepsilon_n), \quad C_x>0$$

$$f_0=n_0\left(\frac{\beta_w}{\pi}\right)^{3/2}\exp(-\mathrm{C}^2)$$

$$\mathrm{C}=\beta_w^{1/2}\mathbf{v}, \quad \beta_w=\frac{m}{2\varkappa T_w}, \quad \varepsilon_n=1-\frac{n_0}{n_w}$$

Здесь L — линеаризованный оператор столкновений Больцмана, f_0 — абсолютный максвеллиан, n_w — величина плотности газа, определяемая из условия непротекания

$$\Pi(0)=\int v_x f(0,\mathbf{v})\,d^3\mathbf{v}=0$$

Из уравнения Больцмана следует, что $d/dx\,\Pi(x)=0$, т. е. $\Pi(x)=\mathrm{const}$. Поскольку в задаче $\Pi(\infty)=0$, то $\Pi(x)=0$ во всем объеме газа, в том числе и при $x=0$. Поэтому решение, удовлетворяя граничным условиям при некотором значении ε_n, автоматически удовлетворяет условию непротекания. Для рассматриваемой модели $\theta=3l/\sqrt{\pi}$.

Решение уравнения (1.1) с граничными условиями (1.2) будем искать в виде

$$f=f_0\left[1+k(x-\theta C_x)\left(\mathrm{C}^2-\frac{5}{2}\right)+Y(x,\mathrm{C})\right] \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в уравнение (1.1) и граничные условия (1.2), для определения функции Y получим уравнение

$$C_x\frac{\partial}{\partial x}Y=\beta_w^{1/2}LY \tag{1.4}$$

с граничными условиями

$$Y(\infty,\mathrm{C})=\varepsilon_T\left(\mathrm{C}^2-\frac{5}{2}\right)$$

$$Y(0,\mathrm{C})=k\theta C_x\left(\mathrm{C}^2-\frac{5}{2}\right)+\varepsilon_n, \quad C_x>0 \tag{1.5}$$

Заменим оператор столкновений в (1.4) модельным оператором в форме эллипсоидально-статистической модели

$$LY=\nu\left[N(x)+\left(\mathrm{C}^2-\frac{3}{2}\right)T(x)+2\mathrm{C}\mathbf{G}(x)+\omega\sum_{i,j}C_iC_jP_{ij}(x)-Y\right]$$

$$N(x)=\pi^{-3/2}\int\exp(-\mathrm{C}^2)Y(x,\mathrm{C})d^3\mathrm{C}$$

$$T(x)=\frac{2}{3}\pi^{-3/2}\int\exp(-\mathrm{C}^2)\left(\mathrm{C}^2-\frac{3}{2}\right)Y(x,\mathrm{C})d^3\mathrm{C}$$

$$P_{ij}(x)=\pi^{-3/2}\int\exp(-C^2)\left(C_iC_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}C^2\right)Y(x,\mathrm{C})d^3\mathrm{C}$$

$$\mathbf{G}(x)=\pi^{-3/2}\int\exp(-\mathrm{C}^2)\mathrm{C}Y(x,\mathrm{C})d^3\mathrm{C}$$

Здесь ν — частота столкновений, причем $\omega=-1$ при выборе числа Прандтля, равного $^2/_3$. Обозначим новую длину $\beta_w^{1/2}\nu x$ снова через x.

В данной задаче отличны от нуля лишь $P_{ii}(x)$, $i=1, 2, 3$. Поэтому уравнение (1.4) с помощью введенных обозначений запишется в виде

$$C_x\frac{\partial}{\partial x}Y(x,\mathrm{C})+Y(x,\mathrm{C})=\pi^{-3/2}\int\exp(-\mathrm{C}^2)K(\mathrm{C},\mathrm{C}')Y(x,\mathrm{C})d^3\mathrm{C} \qquad (1.6)$$

$$K(\mathrm{C},\mathrm{C}')=1+2\mathrm{C}\mathrm{C}'+\frac{2}{3}\left(\mathrm{C}^2-\frac{3}{2}\right)\left(\mathrm{C}'^2-\frac{3}{2}\right)+\omega\sum_{i=1}^{3}C_i^2\left(C_i'^2-\frac{1}{3}\mathrm{C}'^2\right)$$

Разложим функцию распределения Y по двум ортогональным направлениям $e_1=1$ и $e_2=c_y^2+c_z^2-1$

$$Y=Y_1(x,C_x)+(C_y^2+C_z^2-1)Y_2(x,C_x) \qquad (1.7)$$

Ортогональность здесь понимается в смысле скалярного произведения

$$(f,g)=\int\exp(-\mathrm{C}^2)f(x,\mathrm{C})g(x,\mathrm{C})d^3\mathrm{C}$$

Тогда сразу находим

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)Y_1(x,\mu)d\mu$$

$$T(x)=\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)\left[\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)Y_1(x,\mu)+Y_2(x,\mu)\right]d\mu$$

$$\mathrm{C}\cdot\mathbf{G}(x)=\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu'^2)\mu'Y_1(x,\mu')d\mu'$$

Вычислим теперь

$$P(x)=C_x^2P_{11}(x)+C_y^2P_{22}(x)+C_z^2P_{33}(x)$$

$$P_{ii}(x)=\pi^{-3/2}\int\exp(-C'^2)\left(C_i'^2-\frac{1}{3}C'^2\right)Y(x,C)d^3C$$

Имеем

$$P_{11}(x)=\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)\left[\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)Y_1(x,\mu)-\frac{1}{2}Y_2(x,\mu)\right]d\mu$$

$$P_{22}(x)=P_{33}(x)=-\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)\left[\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)Y_1(x,\mu)-\frac{1}{2}Y_2(x,\mu)\right]d\mu$$

Из последних равенств имеем

$$P_{11}(x)+P_{22}(x)+P_{33}(x)=0$$

$$P_{22}(x)=P_{33}(x)=-\frac{1}{2}P_{11}(x)$$

Следовательно

$$P(x)=\left[\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(C_y^2+C_z^2-1)\right]P_{11}(x)\qquad(\mu\equiv C_x)$$

Подставим разложение (1.7) в уравнение (1.6), которое эквивалентно системе двух зацепленных уравнений

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}Y_1(x,\mu)+Y_1(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu'^2)\Big[(1+2\mu\mu')Y_1(x,\mu)+$$

$$+\frac{2}{3}\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)\left[(1+\omega)\left(\mu'^2-\frac{1}{2}\right)Y_1(x,\mu)+\left(1-\frac{\omega}{2}\right)Y_2(x,\mu')\right]\Big]d\mu' \tag{1.8}$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}Y_2(x,\mu)+Y_2(x,\mu)=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu'^2)\left[\left(1-\frac{\omega}{2}\right)\left(\mu'^2-\frac{1}{2}\right)Y_1(x,\mu')+\left(1+\frac{\omega}{4}\right)Y_2(x,\mu')\right]d\mu'$$

Запишем эту систему в векторном виде относительно столбца Y

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}Y(x,\mu)+Y(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu'^2)\,K(\mu,\mu')\,Y(x,\mu')\,d\mu'$$

$$Y=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Здесь ядром уравнения является матрица-функция

$$K(\mu,\mu')=$$

$$=\begin{Bmatrix}1+2\mu\mu'+\frac{2}{3}(1+\omega)\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)\left(\mu'^2-\frac{1}{2}\right), & \frac{2}{3}\left(1-\frac{\omega}{2}\right)\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)\\ \frac{2}{3}\left(1-\frac{\omega}{2}\right)\left(\mu'^2-\frac{1}{3}\right), & \frac{2}{3}\left(1+\frac{\omega}{4}\right)\end{Bmatrix} \tag{1.10}$$

Граничные условия (1.5) с помощью подстановки (1.7) перейдут в сле дующие:

$$Y(\infty, \mu) = \varepsilon_T \begin{bmatrix} \mu^2 - {}^3/_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$Y(0, \mu) = k\theta\mu \begin{bmatrix} \mu^2 - {}^3/_2 \\ 1 \end{bmatrix} + \varepsilon_n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\mu > 0) \tag{1.11}$$

Далее будем решать уравнение (1.9) с числом Прандтля, равным $^2/_3$, т. е. положим в (1.10) $\omega = -1$.

2. Собственные векторы и собственные значения. Анзац Кейза

$$Y_\eta(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) \tag{2.1}$$

переводит систему (1.8) в характеристическую систему

$$(\eta - \mu) F_1(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta \left[n_1^{(0)}(\eta) + 2\mu n_1^{(1)}(\eta) + \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) n_2^{(0)}(\eta) \right] \tag{2.2}$$

$$(\eta - \mu) F_2(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta \left[n_1^{(2)}(\eta) - \frac{1}{2} n_1^{(0)}(\eta) + \frac{1}{2} n_2^{(0)}(\eta) \right] \tag{2.3}$$

$$n_i^{(\alpha)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2) F_i(\eta, \mu) \mu^\alpha \, d\mu \quad (i = 1, 2; \ \alpha = 0, 1, 2)$$

Умножим оба уравнения (2.2) на $\exp(-\mu^2)$ и проинтегрируем по μ на $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Получим уравнения, из которых находим

$$n_1^{(1)}(\eta) = 0, \quad n_2^{(1)}(\eta) = \eta \left[n_1^{(2)}(\eta) - \frac{1}{2} n_1^{(0)}(\eta) + \frac{1}{2} n_2^{(0)}(\eta) \right] \tag{2.4}$$

Умножая уравнения (2.2) на $\mu \exp(-\mu^2)$ и интегрируя по μ на $\mathbb{R}$, получим уравнения, из которых с учетом (2.4) находим

$$n_1^{(2)}(\eta) = 0, \quad n_2^{(2)}(\eta) = \eta n_2^{(1)}(\eta) \tag{2.5}$$

Запишем характеристическую систему (2.2) с учетом (2.4) и (2.5) в векторном виде

$$(\eta - \mu) F(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta \Delta(\mu) n(\eta) \tag{2.6}$$

$$n(\eta) \equiv \begin{bmatrix} n_1^{(0)}(\eta) \\ n_2^{(0)}(\eta) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2) F(\eta, \mu) \, d\mu \tag{2.7}$$

$$\Delta(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & \mu^2 - {}^1/_2 \\ -{}^1/_2 & {}^1/_2 \end{bmatrix}$$

Из уравнений (2.6) и (2.7) найдем собственные векторы характеристической системы, отвечающие непрерывному спектру $\mathbb{R}$

$$F(\eta, \mu) = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} \Delta(\mu) + \exp(\eta^2) \Lambda(\eta) \delta(\eta - \mu) \right] n(\eta) \tag{2.8}$$

$$\Lambda(z)=I+z\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)\frac{\Delta(\mu)}{\mu-z}d\mu$$

где $\Lambda(z)$ — дисперсионная матрица-функция.

Вычислим эту матрицу в явном виде. Имеем

$$\Lambda(z)=\lambda_c(z)\Delta(z)+M$$

$$\lambda_c(z)=1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}z\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)\frac{d\mu}{\mu-z},\qquad M=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$$

В выражении (2.8) символ $P1/x$ означает распределение — главное значение интеграла по Коши, $\delta(x)$ — дельта-функция.

Вычислим в явном виде дисперсионную функцию $\lambda(z)\equiv\det\Lambda(z)$. Получим

$$\lambda(z)=\frac{1}{2}\left[\left(z^2+\frac{1}{2}\right)\lambda_c^2(z)-(z^2-2)\lambda_c(z)-\frac{1}{2}\right]$$

или

$$\lambda(z)=\frac{1}{8(z^2+{}^1/_2)}\left[\left(z^2+\frac{1}{2}\right)\lambda_c(z)-\frac{1}{2}(z^2-2+r(z))\right]\times$$
$$\times\left[\left(z^2+\frac{1}{2}\right)\lambda_c(z)-\frac{1}{2}(z^2-2+r(z))\right]\qquad(2.9)$$

$$r(z)=\sqrt{q(z)},\qquad q(z)=z^4-2z^2+5$$

Дисперсионная функция $\lambda(z)$, представленная в виде (2.9), кусочно аналитична в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом $\mathbb{R}$, за исключением полюсов $\pm i/\sqrt{2}$ и точек ветвления $\pm a$ и $\pm\bar{a}$, являющихся нулями полинома $q(z)$, причем

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{5}+1}+i\sqrt{\sqrt{5}-1}\right)$$

Соединим точки ветвления отрезками $\Gamma_1=[-\bar{a},a]$ и $\Gamma_2=[-a,\bar{a}]$. Теперь $\lambda(z)$ кусочно аналитична в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезами $\mathbb{R}\cup\Gamma$ $(\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2)$ и с выколотыми полюсами $\pm i/\sqrt{2}$.

Разложим $\lambda(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ в ряд Лорана

$$\lambda(z)=-\frac{3}{2z^4}+o(z^{-4}),\qquad z\to\infty$$

Это разложение показывает, что бесконечная точка является 4-кратной точкой дискретного спектра, состоящего из нулей дисперсионного уравнения $\lambda(z)=0$ в комплексной плоскости. С помощью принципа аргумента, используя (2.9), можно показать, что комплексных нулей дисперсионное уравнение не имеет. Бесконечной точке отвечают четыре решения уравнения (1.8)

$$Y_1(x,\mu)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\qquad Y_2(x,\mu)=\begin{bmatrix}\mu^2-{}^3/_2\\1\end{bmatrix}$$

$$Y_3(x,\mu)=\mu\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\qquad Y_4(x,\mu)=(\mu-x)\begin{bmatrix}\mu^2-{}^3/_2\\1\end{bmatrix}$$

3. Разложение решения по собственным векторам.

Теорема 3.1. Уравнение (1.9) с граничными условиями (1.11) имеет единственное решение, представимое в виде разложения по собственным векторам

$$Y(x,\mu)=\varepsilon_T\begin{bmatrix}\mu^2-{}^3/_2\\ 1\end{bmatrix}+\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)F(\eta,\mu)\,d\eta \tag{3.1}$$

Доказательство. А. Сведение к краевой задаче. Подставляя в разложение (3.1) при $x=0$ собственные векторы (2.8), придем к характеристическому сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши

$$f(\mu)=\Delta(\mu)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\eta n(\eta)}{\eta-\mu}d\eta+\exp(\mu^2)\Lambda(\mu)n(\mu),\ \ \mu>0$$

$$f(\mu)=(k\theta\mu-\varepsilon_T)\begin{bmatrix}\mu^2-{}^3/_2\\ 1\end{bmatrix}+\varepsilon_n\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Введем вектор

$$N(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\frac{\eta n(\eta)}{\eta-z}d\eta \tag{3.3}$$

аналитический в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Обозначим через $N^\pm(\mu)$ граничные значения этого вектора на полуоси $\mathbb{R}_+$ сверху и снизу

$$N^\pm(\mu)=\lim_{\varepsilon\to0,\varepsilon>0}N(\mu\pm i\varepsilon)$$

Эти значения связаны формулами Сохоцкого

$$N^+(\mu)-N^-(\mu)=\mu n(\mu)$$

$$N^+(\mu)+N^-(\mu)=\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty\frac{\eta n(\eta)}{\eta-\mu}d\eta \tag{3.4}$$

Далее понадобятся формулы Сохоцкого для дисперсионной матрицы

$$\Lambda^+(\mu)-\Lambda^-(\mu)=2\sqrt{\pi}i\mu\exp(-\mu^2)\Delta(\mu)$$

$$\Lambda^\pm(\mu)=I+\mu\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\tau^2)\frac{\Delta(\tau)}{\tau-\mu}d\tau+\sqrt{\pi}i\mu\exp(-\mu^2)\Delta(\mu) \tag{3.5}$$

где интеграл определен как особый в смысле главного значения.

Учитывая равенства (3.3)—(3.5), сведем уравнение (3.2) к векторной краевой задаче Римана — Гильберта

$$\Lambda^+(\mu)N^+(\mu)-\Lambda^-(\mu)N^-(\mu)=\mu\exp(-\mu^2)f(\mu),\ \ \mu>0 \tag{3.6}$$

с матричным коэффициентом

$$G(\mu)=[\Lambda^+(\mu)]^{-1}\Lambda^-(\mu) \tag{3.7}$$

представляющим кусочно-аналитическую матрицу-функцию в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом $\mathbb{R}$.

Б. Построение фундаментальной матрицы. Для коэффициента $G(\mu)$ решим задачу факторизации — построим фундаментальную матрицу-функцию $X(z)$, т. е. построим невырожденную в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом $\mathbb{R}_+$ такую матрицу $X(z)$, чтобы на берегах разреза выполнялось условие

$$G(\mu)=X^+(\mu)[X^-(\mu)]^{-1}, \quad \mu>0 \tag{3.8}$$

или

$$X^+(\mu)=G(\mu)X^-(\mu), \quad \mu>0 \tag{3.9}$$

или, учитывая (3.7), будем рассматривать задачу факторизации в следующем виде:

$$\Lambda^+(\mu)X^+(\mu)=\Lambda^-(\mu)X^-(\mu), \quad \mu>0 \tag{3.10}$$

Возьмем матрицу $X(z)$ в виде произведения трех матриц

$$X(z)=S(z)U(z)S^{-1}(z) \tag{3.11}$$

где $U(z)$ – новая неизвестная матрица, а матрица $S(z)$ приводит к диагональному виду дисперсионную матрицу.

Введем матрицу

$$P(z)=R(z)\Lambda(z)=\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{2}\right)\lambda_c(z)I+Q(z)$$

$$R(z)=\det\Delta(z)\Delta^{-1}(z)=\begin{bmatrix} {}^1/_2 & {}^1/_2-z^2 \\ {}^1/_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q(z)={}^1/_2\begin{bmatrix} {}^1/_2-z^2 & 1-z^2 \\ 1 & {}^3/_2 \end{bmatrix}$$

Тогда задача (3.10) эквивалентна задаче

$$P^+(\mu)X^+(\mu)=P^-(\mu)X^-(\mu), \quad \mu>0 \tag{3.12}$$

и теперь достаточно диагонализировать матрицу $Q(z)$.

Приведем без вывода диагонализирующую матрицу $S(z)$

$$S(z)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}[r(z)-(z^2+1)] & -\frac{1}{2}[r(z)+z^2+1] \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

обладающую свойством

$$S^{-1}(z)P(z)S^{-1}(z)=\Omega(z)=\operatorname{diag}\{\Omega_1(z),\ \Omega_2(z)\}$$

$$\Omega_\alpha(z)=\frac{1}{4}\left[2\left(z^2+\frac{1}{2}\right)\lambda_c(z)+2-z^2+(-1)^{\alpha-1}r(z)\right], \quad \alpha=1,2$$

Ясно, что матрицу $U(z)$ нужно взять также диагональной: $U(z)=\operatorname{diag}\{U_1(z),\ U_2(z)\}$. Тогда задача (3.12) эквивалентна двум задачам

$$\Omega^+(\mu)U^+(\mu)=\Omega^-(\mu)U^-(\mu), \ \mu>0 \tag{3.13}$$

$$X^+(\tau)=X^-(\tau), \ \tau\in\Gamma \tag{3.14}$$

Задача (3.13) эквивалентна двум скалярным краевым задачам

$$\Omega_\alpha^+(\mu)U_\alpha^+(\mu)=\Omega_\alpha^-(\mu)U_\alpha^-(\mu), \ \mu>0, \ \alpha=1,\ 2 \tag{3.15}$$

Подставляя (3.11) в (3.14), имеем

$$U^+(\tau)T=TU^-(\tau), \ \tau\in\Gamma \tag{3.16}$$

$$T=[S^+(\tau)]^{-1}S^-(\tau)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau\in\Gamma$$

Следовательно, задача (3.16) эквивалентна двум векторным краевым задачам

$$U_1^+(\tau)=U_2^-(\tau),\ U_1^-(\tau)=U_2^+(\tau),\ \tau\in\Gamma \tag{3.17}$$

Замечая, что $|\Omega_\alpha^+(\mu)|=|\Omega_\alpha^+(\mu)|$, и обозначив через $\theta_\alpha(\mu)$ главное значение аргумента функции $\Omega_\alpha^+(\mu)$, перепишем задачи (3.15) в следующей форме:

$$U_\alpha^+(\mu)=\exp(-2i\theta_\alpha(\mu))U_\alpha^-(\mu),\ \mu>0,\ \alpha=1,\ 2 \tag{3.18}$$

Основная трудность состоит в получении решения, которое одновременно удовлетворяет двум скалярным задачам (3.18), заданным на основном разрезе $\mathbb{R}_+$, и двум векторным задачам (3.17), заданным на дополнительном разрезе Г.

Перемножим и поделим почленно краевые условия (3.18). Затем, логарифмируя, получим

$$\ln(U_1U_2)^+-\ln(U_1U_2)^-=-2i(\theta_1(\mu)+\theta_2(\mu)-2\pi)$$

$$\frac{1}{r(\mu)}\ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^+-\frac{1}{r(\mu)}\ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^-=\frac{2i}{r(\mu)}(\theta_2(\mu)-\theta_1(\mu)) \tag{3.19}$$

Здесь под логарифмом понимается такая его ветвь, что $\ln\exp(2i\theta_\alpha(0))=0$. Второе из краевых условий (3.19) поделено на радикал $r(\mu)$, ответственный за точки ветвления матрицы $X(z)$. Именно этот шаг дает возможность получить решение, удовлетворяющее одновременно всем краевым условиям (3.17) и (3.18). Обозначим далее

$$A(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{a(\tau)d\tau}{\tau-z},\qquad B(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{b(\tau)d\tau}{r(\tau)(\tau-z)}$$

$$a(\tau)=\theta_1(\tau)+\theta_2(\tau)-2\pi,\ b(\tau)=\theta_2(\tau)-\theta_1(\tau).$$

Отметим, что выбор ветви логарифма в (3.19) однозначен и обусловлен требованием существования интегралов $A(z)$ и $B(z)$. Для указанного выбора необходимо найти приращения главных значений аргументов $\Omega_\alpha^+(\mu)$. Приведем кратко необходимый анализ. Имеем очевидные свойства

$$\Omega_\alpha(0)=\frac{1}{4}(3\pm\sqrt{5})$$

$$\Omega_\alpha^+(\mu)-\Omega_\alpha^-(\mu)=\left(\mu^2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,i\mu\exp(-\mu^2)$$

$$\Omega_\alpha^\pm(\mu)=\Omega_\alpha(\mu)\pm\frac{1}{2}\left(\mu^2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,i\mu\exp(-\mu^2)$$

Асимптотика этих функций на бесконечности такова

$$\Omega_1(z)=-\frac{5}{8}z^{-4}+o(z^{-4}),\qquad z\to\infty$$

$$\Omega_2(z)=-z^2+\frac{1}{4}+o(1),\qquad z\to\infty$$

Из этих свойств вытекает, что $[\theta_\alpha(\mu)]_{\mathbb{R}_+}=\pi,\ \alpha=1,\ 2.$

Вернемся к решению краевых задач (3.19). Это решение стандартно и имеет вид

$$U_1^{(0)}(z)U_2^{(0)}(z)=\exp(-2A(z)),\ U_1^{(0)}(z)=\exp(2r(z)B(z))U_2^{(0)}(z)$$

Отсюда получим

$$U_\alpha^{(0)}(z)=\exp[-A(z)+(-1)^{\alpha-1}r(z)B(z)],\ \alpha=1,\ 2$$

Полученное решение удовлетворяет одновременно краевым условиям (3.13) и (3.14), но имеет единственный недостаток – существенную особенность в бесконечности. Будем искать новое решение, лишенное этого недостатка, в виде

$$U_1(z)=U_1^{(0)}(z)\varphi(z),\ U_2(z)=U_2^{(0)}(z)\varphi^{-1}(z)$$

где $\varphi(z)$ – некоторая функция (с существенной особенностью в бесконечности), аналитическая в плоскости $\mathbb{C}$ вне разреза Γ. При этом краевые условия (3.15) выполняются автоматически, а краевые условия (3.17) – тогда и только тогда, когда на дополнительном разрезе выполняется условие

$$\varphi^+(\tau)\varphi^-(\tau)=1,\quad \tau\in\Gamma \tag{3.20}$$

Возьмем функцию $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z)=\exp[-r(z)R(z)],\qquad R(z)=\int_0^{\mu_0}\frac{d\tau}{r(\tau)(\tau-z)}$$

При любом выборе $\mu_0\in\mathbb{R}_+$ функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию (3.20), так что пара $\{U_1(z),\ U_2(z)\}$ является решением сразу четырех краевых задач (3.15) и (3.17). Выпишем полученное решение в явном виде

$$U_\alpha(z)=\exp[-A(z)+(-1)^{\alpha-1}r(z)(B(z)-R(z))],\ \alpha=1,\ 2 \tag{3.21}$$

Разложим функции $A(z)$, $B(z)$ и $R(z)$ в ряды Лорана в окрестности бесконечной точки

$$A(z)=A_{-1}z^{-1}+A_{-2}z^{-2}+\dots,\ z\to\infty$$
$$B(z)=B_{-1}z^{-1}+B_{-2}z^{-2}+\dots,\ z\to\infty$$
$$R(z)=R_{-1}z^{-1}+R_{-2}z^{-2}+\dots,\ z\to\infty$$

$$A_{-n}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\mu^{n-1}a(\mu)d\mu,\qquad B_{-n}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\mu^{n-1}\frac{b(\mu)}{r(\mu)}d\mu$$

$$R_{-n}=-\int_0^\infty\mu^{n-1}\frac{d\mu}{r(\mu)},\qquad n=1,2,\dots$$

Чтобы функции (3.20) не имели существенной особенности в бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство двух лорановских коэффициентов: $B_{-1}=R_{-1}$, или в явном виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{b(\mu)}{r(\mu)}d\mu=\int_0^{\mu_0}\frac{d\mu}{r(\mu)} \tag{3.22}$$

Задача (3.22) является частным случаем задачи обращения Якоби для эллиптических интегралов. Ясно, что точка μ_0 определяется единственным образом.

Выясним особенности функций $U_\alpha(z)$, $\alpha=1,\ 2$. Заметим, что

$$A(z)=\ln z+O(1),\ z\to0$$

$$r(z)R(z)=-\ln z+O(1),\ z\to0$$

$$r(z)B(z)=O(1),\ z\to 0$$

$$r(z)R(z)=\ln(z-\mu_0)+O(1),\ z\to\mu_0$$

Следовательно, функция $U_1(z)$ ограничена в начале координат, а в точке μ_0 имеет полюс 1-го порядка, функция $U_2(z)$ имеет в начале координат полюс 2-го порядка, а в точке μ_0 – нуль 1-го порядка.

Найдем в явном виде элементы матрицы $X(z)$

$$X_{11}(z)=\frac{1}{2}\left[U_1+U_2-\frac{z^2+1}{r(z)}(U_1-U_2)\right]$$

$$X_{12}(z)=-\frac{z^2-1}{r(z)}(U_1-U_2)$$

$$X_{21}(z)=\frac{1}{r(z)}(U_1-U_2)$$

$$X_{22}(z)=\frac{1}{2}\left[U_1+U_2+\frac{z^2+1}{r(z)}(U_1-U_2)\right]$$

Итак, фундаментальная матрица-функция $X(z)$ построена. Для такой матрицы выполнено условие (3.8) (или (3.9), или, что все равно, условие (3.10)), которое означает, что матрица $X(z)$ решает задачу факторизации матричного коэффициента $G(\mu)$, определенного равенством (3.7). По построению матрица-функция $X(z)$ аналитична в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом $\mathbb{R}_+$ и возможными особыми точками в нулях полинома $q(z)$. Однако из формул для ее элементов видно, что благодаря совпадению функций $U_1(z)$ и $U_2(z)$ в нулях полинома $q(z)$ матрица $X(z)$ в них тоже аналитична.

Заметим далее, что

$$\det X(z)=U_1(z)U_2(z)=\exp[-2A(z)]$$

откуда видно, что определитель матрицы $X(z)$ не вырождается всюду в $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$, ограничен и не исчезает на бесконечности, а в нуле имеет полюс 2-го порядка.

В. Решение краевой задачи. Вернемся к решению краевой задачи (3.6). Умножим обе части краевого условия (3.6) на матрицу $R(z)$ слева

$$P^+(\mu)N^+(\mu)-P^-(\mu)N^-(\mu)=$$
$$=\frac{1}{2}\mu\exp(-\mu^2)\left[(k\theta\mu-\varepsilon_T)\left(\mu^2+\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+\varepsilon_n\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right],\quad \mu>0 \tag{3.23}$$

С помощью задачи факторизации (3.10), заметив, что

$$P^+(\mu)-P^-(\mu)=\left(\mu^2+\frac{1}{2}\right)\mu\exp(-\mu^2)\sqrt{\pi}\,i\cdot I$$

перейдем от задачи (3.23) к векторной задаче по скачку

$$[X^+(\mu)]^{-1}\left\{\left(\mu^2+\frac{1}{2}\right)\left[2\sqrt{\pi}\,iN^+(\mu)-(k\theta\mu-\varepsilon_T)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right]-\varepsilon_n\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}=$$
$$=[X^-(\mu)]^{-1}\left\{\left(\mu^2+\frac{1}{2}\right)\left[2\sqrt{\pi}\,iN^-(\mu)-(k\theta\mu-\varepsilon_T)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right]-\varepsilon_n\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\},\quad \mu>0 \tag{3.24}$$

Учитывая поведение в конечных особых точках и на бесконечности входящих в краевое условие (3.24) матриц и векторов, напишем его общее решение

$$2\sqrt{\pi}\, iN(z) = (k\theta z - \varepsilon_T)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \varepsilon_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{z^2+{}^1/_2} + X(z)\Phi(z) \qquad (3.25)$$

$$\Phi(z) = \begin{bmatrix} \Phi_1(z) \\ \Phi_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 z+\alpha_0 + \dfrac{\alpha_{-1}}{z-\mu_0} + \dfrac{\alpha' z+\alpha''}{z^2+{}^1/_2} \\ \beta_1 z+\beta_0 + \dfrac{\beta_{-1}}{z-\mu_0} + \dfrac{\beta' z+\beta''}{z^2+{}^1/_2} \end{bmatrix}$$

где $\Phi(z)$ – вектор-столбец с произвольными коэффициентами.

Полученное решение (3.25) имеет следующие особенности: полюс 1-го порядка в бесконечности, полюса 1-го порядка в точках $\pm i/\sqrt{2}$ и полюса 2-го порядка в точках $z=0$ и $z=\mu_0$. Теперь необходимо устранить указанные особенности решения за счет выбора свободных параметров решения, какими являются коэффициенты векторов $\Phi(z)$ и $f(z)$. Тогда решение (3.25) можно принять в качестве вектора $N(z)$, введенного равенством (3.3).

Из условия $N(z)=o(1)$ $(z\to\infty)$ вытекают четыре уравнения, из которых находим

$$\beta_1 = -k\theta p_0^{-1}, \qquad \alpha_1 = -\beta_1, \qquad \alpha_0 = -\beta_0$$
$$\varepsilon_T = -k\theta p_{-1} p_0^{-1} + p_0\beta_0 \qquad (3.26)$$

где p_0 и p_{-1} – коэффициенты разложения

$$U_1(z) = p_0 + p_{-1}z^{-1} + \ldots, \qquad z\to\infty$$

Чтобы устранить у решения полюса в точках $\pm i/\sqrt{2}$, потребуем выполнения в этих точках следующих уравнений:

$$\varepsilon_n + X_{11}(z)(\alpha' z+\alpha'') + X_{12}(z)(\beta' z+\beta'') = 0$$
$$\varepsilon_n + X_{21}(z)(\alpha' z+\alpha'') + X_{22}(z)(\beta' z+\beta'') = 0$$

Из этих уравнений находим

$$\begin{aligned} \alpha' z+\alpha'' &= \varepsilon_n (X_{12}(z) - X_{22}(z))\det{}^{-1} X(z) \\ \beta' z+\beta'' &= \varepsilon_n (X_{21}(z) - X_{11}(z))\det{}^{-1} X(z) \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Заметим, что правые части уравнений (3.27) в точках $\pm i/\sqrt{2}$ совпадают. Поэтому обозначим

$$\gamma^{\pm} = \left(X_{jl}\left(\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\right) - X_{ll}\left(\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\det{}^{-1} X\left(\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

Здесь либо $j=1$, $l=2$, либо $j=2$, $l=1$. Заметим также, что $\gamma^+ = \overline{\gamma^-}$ (черта означает комплексное сопряжение). Теперь из уравнений (3.27) имеем

$$\beta'' = \alpha'' = \varepsilon_n\gamma_1, \qquad \beta' = \alpha' = \sqrt{2}\varepsilon_n\gamma_2 \qquad (\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2) \qquad (3.28)$$

Чтобы устранить у решения $N(z)$ полюс 2-го порядка в нуле, потребуем, чтобы

$$S_{21}^{-1}(z)\Phi_1(z) + S_{22}^{-1}(z)\Phi_2(z) = O(z^2), \quad z\to 0 \qquad (3.29)$$

где $S_{ij}^{-1}(z)$ – элементы матрицы $S^{-1}(z)$.

Из условия (3.29) вытекают два уравнения

$$-\left(\alpha_0-\frac{\alpha_{-1}}{\mu_0}+2\alpha''\right)+\delta\left(\beta_0-\frac{\beta_{-1}}{\mu_0}+2\beta''\right)=0 \tag{3.30}$$

$$-\left(\alpha_1-\frac{\alpha_{-1}}{\mu_0^2}+2\alpha'\right)+\delta\left(\beta_1-\frac{\beta_{-1}}{\mu_0^2}+2\beta'\right)=0, \quad \delta=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \tag{3.31}$$

Теперь устраним полюс 2-го порядка в точке μ_0. Для этого потребуем, чтобы

$$S_{11}^{-1}(z)\Phi_1(z)+S_{12}^{-1}(z)\Phi_2(z)=O(z-\mu_0), \quad z\to\mu_0 \tag{3.32}$$

Обозначим

$$\psi_1(z)=\alpha_{-1}+{}^1/_2[r(z)+z^2+1]\beta_{-1}$$

$$\psi_2(z)=\alpha_1 z+\alpha_0+\frac{\alpha' z+\alpha''}{z^2+{}^1/_2}+{}^1/_2[r(z)+z^2+1]\left(\beta_1 z+\beta_0+\frac{\beta' z+\beta''}{z^2+{}^1/_2}\right)$$

Тогда условие (3.32) эквивалентно следующим двум условиям

$$\psi_1(\mu_0)=0, \quad \psi_1'(\mu_0)+\psi_2(\mu_0)=0$$

Из этих уравнений получим

$$\alpha_{-1}=-\alpha\beta_{-1} \tag{3.33}$$

$$\alpha_1\mu_0+\alpha_0+\frac{\alpha'\mu_0+\alpha''}{\mu_0^2+{}^1/_2}+\alpha\left(\beta_1\mu_0+\beta_0+\frac{\beta'\mu_0+\beta''}{\mu_0^2+{}^1/_2}\right)+\beta\beta_{-1}=0 \tag{3.34}$$

$$\alpha={}^1/_2[r(\mu_0)+\mu_0^2+1], \qquad \beta=\mu_0\left[\frac{\mu_0^2-1}{r(\mu_0)}-1\right]$$

Из уравнений (3.30) и (3.31) с учетом (3.33) и (3.34) находим

$$\beta_{-1}=\frac{\mu_0^2}{\alpha+\delta}[(\delta+1)\beta_1+2\alpha'(\delta-1)]$$

$$\beta_0=\mu_0\beta_{-1}+2\frac{\delta-1}{\delta+1}(\alpha'\mu_0-\alpha'')$$

Для нахождения ε_n нужно подставить найденные коэффициенты в уравнение (3.34). Тогда получим

$$\varepsilon_n=-\beta_1\mu_0\left[2(\alpha-1)+\beta\mu_0\frac{\delta+1}{\delta+\alpha}\right](\delta_1\gamma_1+\sqrt{2}\,\delta_2\mu_0\gamma_2)^{-1}$$

$$\delta_1=-\delta_3+\delta_4, \quad \delta_2=\delta_3+\delta_4+2\beta\mu_0\frac{\delta-1}{\delta+\alpha}$$

$$\delta_3=2(\alpha-1)\frac{\delta-1}{\delta+1}, \qquad \delta_4=\frac{1+\alpha}{\mu_0^2+{}^1/_2}$$

Итак, все свободные параметры решения (3.25) определены однозначно, в том числе однозначно определен коэффициент ε_T в разложении (3.1), который отвечает дискретному спектру. Коэффициенты непрерывного спектра $n(\mu)$ из разложения (3.1) находятся однозначно из формулы Сохоцкого

$$N^+(\mu)-N^-(\mu)=\mu n(\mu)$$

Теорема доказана.

Вернемся к задаче о температурном скачке. Формулу (3.26), которая решает поставленную задачу, запишем более подробно

$$
\varepsilon_T = k0 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{x^2 b(x)}{r(x)} - a(x) \right] dx - \int_0^{\mu_0} \frac{x^2\,dx}{r(x)} - \mu_0 + \right.
$$

$$
\left. + 2\mu_0 \frac{\sqrt{2}\,\mu_0\gamma_2 - \gamma_1}{\sqrt{2}\,\mu_0\delta_2\gamma_2 + \delta_1\gamma_1} \left[2(\alpha-1)\frac{\delta-1}{\delta+1} + \beta\mu_0 \frac{\delta-1}{\delta+\alpha} \right] \right\} \tag{3.35}
$$

Формула (3.35) выражает в квадратурах величину температурного скачка в разреженном газе над плоской поверхностью при использовании модельного эллипсоидально-статистического уравнения Больцмана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобылев А. В.* Точные и приближенные методы в теории нелинейных кинетических уравнений Больцмана и Ландау. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1987. 251 с.
2. *Черчиньяни К.* О методах решения уравнения Больцмана // Неравновесные явления: уравнение Больцмана. М.: Мир, 1986. С. 132–203.
3. *Латышев А. В.* Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического БГК уравнения в задаче о температурном скачке // ПММ. 1990. Т. 54 № 4. С. 581–586.
4. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Точное решение уравнения Больцмана с оператором столкновений БГК в задаче о слабом испарении // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 6. С. 55–63.
5. *Латышев А. В.* Аналитические аспекты решения модельных кинетических уравнений // Теорет. и мат. физика. 1990. Т. 85. № 3. С. 428–442.

Москва

Поступила в редакцию 1.II.1991