

УДК 532.516.013.4

© 1992 г. Г. М. СИСОЕВ, В. Я. ШКАДОВ

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНОГО ПЛЕНОЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ПО НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для исследования устойчивости двухслойных течений в [1–3] используется метод разложения по малому волновому числу, результаты справедливы для нейтральных кривых и в их окрестности. В данной работе задача на собственные значения решается численно, волновые возмущения рассматриваются во всей области неустойчивости и устанавливается влияние определяющих параметров на характеристики наиболее неустойчивых возмущений.

1. Пусть стекающая по наклонной поверхности пленка состоит из двух слоев вязких несжимаемых жидкостей, причем первый слой граничит с твердой подложкой, второй обладает свободной поверхностью (в используемых ниже обозначениях верхний индекс определяет слой жидкости). Вводится декартова система координат X, Y , причем ось X совпадает с твердой поверхностью и направлена по течению пленки, ось Y ориентирована в сторону жидкости. Безразмерные переменные задачи определяются согласно

$$X = H_c x, \quad Y = H_c y, \quad T = \frac{H_c}{U_c} t$$

$$U = U_c u, \quad V = U_c v, \quad P = \rho^{(1)} U_c^2 p, \quad H_d = H_c h_d, \quad H_u = H_c h_u$$

где H_c, U_c — характерные длина и скорость, конкретизируемые ниже, T — время, U, V, P — компоненты скорости и давление, H_d, H_u — толщины первого слоя и пленки. Система уравнений и граничных условий, описывающая движение пленки, имеет вид [4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0^{(j)}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu_0^{(j)}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\sin \theta}{\text{Fr}} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0^{(j)}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu_j^{(j)}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\cos \theta}{\text{Fr}}, \quad j=1, 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$y=0: \quad u=0, \quad v=0$$

$$y=h_d: \quad \frac{\partial h_d}{\partial t} + u \frac{\partial h_d}{\partial x} = v, \quad [u]_i^2=0, \quad [v]_i^2=0, \quad [p_{n\tau}]_i^2=0,$$

$$[p_{nn}]_i^2 + \frac{\kappa}{\text{We}} = 0$$

$$y=h_u: \quad \frac{\partial h_u}{\partial t} + u \frac{\partial h_u}{\partial x} = v, \quad p_{n\tau}=0, \quad p_{nn} - \sigma_0 \frac{\kappa}{\text{We}} = 0$$

$$\rho_0^{(1)}=1, \quad \rho_0^{(2)}=\rho_0=\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}}, \quad \nu_0^{(1)}=1, \quad \nu_0^{(2)}=\nu_0=\frac{\nu^{(2)}}{\nu^{(1)}}, \quad \sigma_0=\frac{\sigma^{(2)}}{\sigma^{(1)}}$$

$$\text{Re}=\frac{1}{\nu^{(1)}}U_c H_c, \quad \text{We}=\frac{\rho^{(1)}}{\sigma^{(1)}}U_c^2 H_c, \quad \text{Fr}=\frac{1}{g H_c}U_c^2$$

где $\rho^{(j)}, \nu^{(j)}, j=1, 2$ — плотности и кинематические вязкости жидкостей; $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}$ — коэффициенты поверхностного натяжения на границе раздела и на свободной поверхности; g — ускорение силы тяжести; θ — угол наклона подложки. В (1.1) используется обозначение $[a]_i^2 = a^{(2)} - a^{(1)}$, где величины $a^{(1)}, a^{(2)}$ относятся к первому и второму слоям соответственно. Входящие в (1.1) выражения для напряжений и кривизны имеют вид

$$p_{nr} = \frac{\rho_0^{(j)}}{\text{Re}} \frac{\nu_0^{(j)}}{b^2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} \quad (1.2)$$

$$p_{nn} = -p + \frac{2\rho_0^{(j)}}{\text{Re}} \frac{\nu_0^{(j)}}{b^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$\kappa = \frac{1}{b^3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad b^2 = 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2$$

Пусть H_c, H_{dc} — толщины пленки и первого слоя при безволновом стационарном стекании. Выберем в качестве характерной скорости

$$U_c = \frac{1}{3\nu^{(1)}} g H_c^2 \gamma \sin \theta \quad (1.3)$$

$$\gamma = \frac{1}{\nu_0} [1 + 3(\rho_0 \nu_0 - 1)h_0 + (1,5\rho_0 \nu_0 - 1 - 0,5\nu_0)h_0^2 (h_0 - 3)]$$

$$\text{Fr} = \gamma \text{Re} \sin \theta / 3$$

где $h_0 = H_{dc}/H_c$. С учетом (1.3) стационарное решение дается соотношениями

$$0 < y < h_0: \quad (1.4)$$

$$u_0 = \frac{3}{\gamma} \left\{ [\rho_0 + (1 - \rho_0)h_0]y - \frac{y^2}{2} \right\}, \quad v_0 = 0, \quad p_0 = \frac{\cos \theta}{\text{Fr}} [(1 - h_0)\rho_0 + h_0 - y]$$

$$h_0 < y < 1:$$

$$u_0 = \frac{3}{\gamma \nu_0} \left[\left(\frac{1 + \nu_0}{2} - \rho_0 \nu_0 \right) h_0^2 + (\rho_0 \nu_0 - 1)h_0 + y - \frac{y^2}{2} \right], \quad v_0 = 0,$$

$$p_0 = \frac{\cos \theta}{\text{Fr}} \rho_0 (1 - y)$$

Можно отметить, что величины H_{dc}, H_c связаны с расходами слоев $Q^{(1)}, Q^{(2)}$ уравнениями

$$H_{dc}^2 \left[0,5\rho_0 H_c + \left(\frac{1}{3} - 0,5\rho_0 \right) H_{dc} \right] = \frac{Q^{(1)} \nu^{(1)}}{g \sin \theta}$$

$$(H_c - H_{dc}) \left[\frac{H_c^2}{3} + \left(\rho_0 \nu_0 - \frac{2}{3} \right) H_{dc} H_c + \left(\frac{1}{3} + \frac{\nu_0}{2} - \rho_0 \nu_0 \right) H_{dc}^2 \right] =$$

$$= \frac{Q^{(2)} \nu^{(2)}}{g \sin \theta}$$

2. Течение, определяемое соотношениями (1.4), плоскопараллельное, и это позволяет исследовать его устойчивость относительно волновых

возмущений. При этом нестационарное решение задачи (1.1), (1.2) представляется в виде

$$u(x, y, t) = u_0(y) + u_1(x, y, t), \quad v = v_1, \quad p = p_0 + p_1, \quad (2.1)$$

$$h_d = h_0 + h_1(x, t), \quad h_u = 1 + h_2$$

После подстановки (2.1) в (1.1), (1.2), линеаризации полученных уравнений и граничных условий относительно малых возмущений и подстановки решений вида $f(y) \exp(i\alpha(x-ct))$ получаем однородную краевую задачу

$$v^{(IV)} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v - \frac{i\alpha \operatorname{Re}}{v_0^{(j)}} [(u_0 - c)(v'' - \alpha^2 v) - u_0'' v] = 0, \quad j=1, 2 \quad (2.2)$$

$$y=0: \quad v=1, \quad v'=0 \quad (2.3)$$

$$y=h_0: [v]_1^2=0, \quad \left[v' - \frac{1}{u_0 - c} u_0' v \right]_1^2 = 0 \quad (2.4)$$

$$[\rho_0^{(j)} v_0^{(j)} \varphi_1^{(j)}]_1^2 = 0, \quad \left[\rho_0^{(j)} v_0^{(j)} \left\{ \varphi_2^{(j)} + \alpha u_0' \left(\frac{i \operatorname{Re}}{v_0^{(j)}} + \frac{2\alpha}{u_0 - c} \right) v \right\} \right]_1^2 -$$

$$- \frac{i\alpha^3 \operatorname{Re}}{\operatorname{We}(u_0 - c)} v = 0$$

$$y=1: \varphi_1^{(2)} = 0, \quad \varphi_2^{(2)} + \sigma_0 \frac{i\alpha^3 \operatorname{Re}}{\rho_0 v_0 \operatorname{We}(u_0 - c)} v = 0 \quad (2.5)$$

где v — амплитудная функция соответствующей компоненты скорости и

$$\varphi_1^{(j)} = v'' + \left(\alpha^2 - \frac{1}{u_0 - c} u_0'' \right) v$$

$$\varphi_2^{(j)} = v''' - \left[3\alpha^2 + \frac{i\alpha \operatorname{Re}}{v_0^{(j)}} (u_0 - c) \right] v' + \frac{3i\alpha \operatorname{ctg} \theta}{\gamma v_0^{(j)} (u_0 - c)} v$$

Задача (2.2)–(2.5) определяет зависимость собственных значений c от определяющих параметров α , Re , We , ρ_0 , v_0 , σ_0 , h_0 , θ . Нарастание возмущений связано с множителем $\exp(\alpha c t)$, их фазовая скорость равна c , (здесь и далее нижний индекс i обозначает мнимую часть соответствующей величины, индекс r — действительную).

Решение (2.2) в области каждого слоя представляется в виде суммы линейно независимых частных решений [5]

$$v^{(k)} = \sum_{j=1}^4 r_j^{(k)} v_j^{(k)}, \quad k=1, 2 \quad (2.6)$$

Учет граничных условий при $y=0$ для первого слоя и при $y=1$ для второго позволяет определить в (2.6) по две константы для каждого слоя. В качестве условий для определения частных решений выбираются

$$y=0: \quad v=0, \quad v'=0, \quad v''=1, \quad v'''=0 \quad (2.7)$$

$$v=0, \quad v'=0, \quad v''=0, \quad v'''=1$$

$$y=1: v=1, \quad v'=0, \quad v'' = \frac{1}{u_0 - c} u_0'' - \alpha^2,$$

$$v''' = - \frac{i\alpha}{v_0(u_0 - c)} \left(\frac{3 \operatorname{ctg} \theta}{\gamma} + \frac{\alpha^2 \operatorname{Re}}{\rho_0 \operatorname{We}} \sigma_0 \right)$$

$$v=0, \quad v'=1, \quad v''=0, \quad v'''=3\alpha^2+i\alpha \frac{\text{Re}}{v_0} (u_0-c)$$

Характеристическое уравнение для определения собственных значений следует из (2.4) и имеет вид

$$\det\|D_{mn}\|=0$$

где элементы матрицы определяются соотношениями

$$\begin{aligned} D_{1n} &= (-1)^j v, & D_{2n} &= (-1)^j \left(v' - \frac{1}{u_0-c} u_0' v \right) \\ D_{3n} &= (-1)^j \rho_0^{(j)} v_0^{(j)} \left[v'' + \left(\alpha^2 - \frac{1}{u_0-c} u_0'' \right) v \right] \\ D_{4n} &= (-1)^j \rho_0^{(j)} v_0^{(j)} \left\{ v''' - \left[3\alpha^2 + i\alpha \frac{\text{Re}}{v_0^{(j)}} (u_0-c) \right] v' + \left[i\alpha u_0' \frac{\text{Re}}{v_0^{(j)}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{u_0-c} \left(2\alpha^2 + \frac{3i\alpha \text{ctg } \theta}{\gamma v_0^{(j)}} \right) \right] v \right\} + (j-2) \frac{i\alpha^3 \text{Re}}{\text{We}} \frac{v}{u_0-c}, \quad n=1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Значения функций в (2.8) вычисляются при $y=h_0$; первые два столбца матрицы D соответствуют решениям в области первого слоя ($j=1$), следующие столбцы — решениям в области второго слоя ($j=2$). Корни характеристического уравнения определяются методом Ньютона.

Приведенный алгоритм требует задания начальных приближенных значений собственных чисел. Для их вычисления применим следующий метод. Пусть $v_0=1$, $\theta \ll 1$; рассмотрим случай длинных волн при $\text{Re} \ll 1$. Положим $\alpha=0$, $\text{Re}=0$ ($\text{Re}/\text{We} \neq 0$), тогда соответствующие решения уравнения (2.2), удовлетворяющие условиям (2.3) в первом слое и (2.5) во втором

$$\begin{aligned} v &= A_1 y^2 + A_2 y^3 \\ v &= -(1-y)A_3 + (a_1 + a_2 y^2 + y^3 - 2ac)A_4 \\ a &= \frac{3i}{\alpha} \left(\frac{3 \text{ctg } \theta}{\gamma v_0} + \frac{\text{Re } \alpha^2}{\text{We } \rho_0} \sigma_0 \right)^{-1}, \quad a_1 = a[2u_0(1) - u_0''(1)] + 2, \\ a_2 &= a u_0''(1) - 3 \end{aligned}$$

Из условий (2.4) следует характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \det\|B_{mn}\| &= 0 \quad (2.9) \\ B_{11} &= h_0^2, \quad B_{12} = h_0^3, \quad B_{13} = 1 - h_0, \quad B_{14} = -a_1 - a_2 h_0^2 - h_0^3 + 2ac \\ B_{21} &= (u_0'^{(1)} - u_0'^{(2)}) h_0^2 - 2h_0(u_0 - c) \\ B_{22} &= (u_0'^{(1)} - u_0'^{(2)}) h_0^3 - 3h_0^2(u_0 - c), \quad B_{23} = u_0 - c \\ B_{24} &= (2a_2 h_0 + 3h_0^2)(u_0 - c), \quad B_{31} = [u_0''^{(1)} - \rho_0 u_0''^{(2)}] h_0^2 - 2(u_0 - c) \\ B_{32} &= [u_0''^{(1)} - \rho_0 u_0''^{(2)}] h_0^3 - 6h_0(u_0 - c), \quad B_{33} = 0 \\ B_{34} &= \rho_0(2a_2 + 6h_0)(u_0 - c), \quad B_{41} = \left[\frac{3 \text{ctg } \theta}{\gamma v_0} (\rho_0 - 1) - \alpha^2 \frac{\text{Re}}{\text{We}} \right] i\alpha h_0^2 \\ B_{42} &= \left[\frac{3 \text{ctg } \theta}{\gamma v_0} (\rho_0 - 1) - \alpha^2 \frac{\text{Re}}{\text{We}} \right] i\alpha h_0^3 - 6(u_0 - c) \\ B_{43} &= 0, \quad B_{44} = 6\rho_0(u_0 - c) \end{aligned}$$

Величины в алгебраическом уравнении (2.9) вычисляются при $y=h_0$. Это уравнение определяет четыре значения неизвестной величины s , из них два — приближенные решения задачи (2.2)–(2.5). Два приближенных собственных значения при малых α могут быть вычислены по формулам [1–3] более громоздким способом. Для произвольных определяющих параметров задачи собственные значения вычисляются параметрическим продолжением от решений (2.9).

В качестве примера рассмотрим пленку, первая жидкость которой бензол, вторая — вода [6]

	$10^{-3} \rho$, кг/м ³	$10^6 \nu$, м ² /с	σ , н/м
1-й слой	0,879	0,766	0,029
2-й слой	0,998	1,05	0,0336

Пусть толщины $H_{dc}=10^{-4}$ м, $H_c=2 \cdot 10^{-4}$ м, угол наклона подложки $\theta=\pi/180$. Для применения приближенного метода положим $\nu^{(1)}=0,105 \cdot 10^{-5}$ м²/с; тогда $Re=0,444$, $We=0,331 \cdot 10^{-4}$, $\rho_0=1,14$, $\nu_0=1$, $\sigma_0=1,16$, $h_0=0,5$. При $\alpha=0,01$ получаем из (2.9) приближенные значения $c_1=3,01-0,595i$, $c_2=1,10+0,00242i$ и находим затем из (2.2)–(2.5) соответствующие точные решения задачи на собственные значения $c_1=3,02-0,589i$, $c_2=1,10+0,00241i$. Собственные значения при других параметрах вычисляются параметрическим продолжением указанных величин.

3. Возмущения первого вида (c_1) связаны со свободной поверхностью и параметрически продолжают к случаю однослойной пленки; их скорость близка к удвоенной скорости на поверхности пленки. Скорость возмущений второго вида (c_2) приблизительно равна скорости жидкости на поверхности раздела, что характерно для возмущений, связанных с изменением физических свойств жидкостей [7].

В пространстве восьми определяющих параметров, указанных выше, для каждого вида возмущений существует своя область неустойчивости. Полное исследование этих областей требует значительного объема вычислений. Ниже приводятся их сечения поверхностями двух типов. Первый тип представляет случай изменения одного из определяющих параметров при фиксированных остальных. Второй тип сечений связан с изменением некоторого физического параметра, например плотности первой жидкости; при этом часть определяющих параметров изменяется, часть — нет.

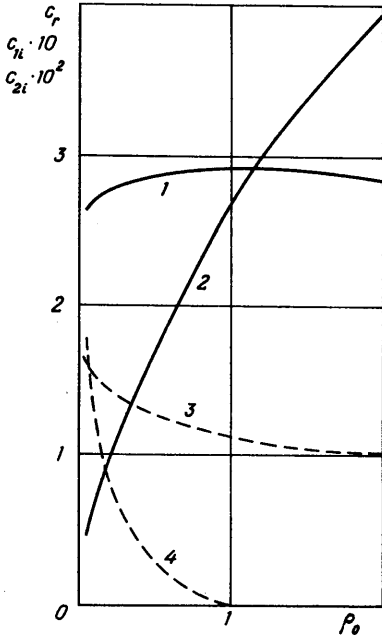
В качестве примера рассмотрим влияние отношения плотностей ρ_0 при указанных выше значениях α , Re , We , ν_0 , σ_0 , h_0 , θ (возмущения первого вида в этом случае устойчивы):

ρ_0	0,1	0,5	0,98	1,02	1,5	2,0
c_{2r}	1,55	1,26	1,13	1,12	1,06	1,01
c_{2i}	-0,0912	-0,0203	-0,000718	0,000170	0,00728	0,0111

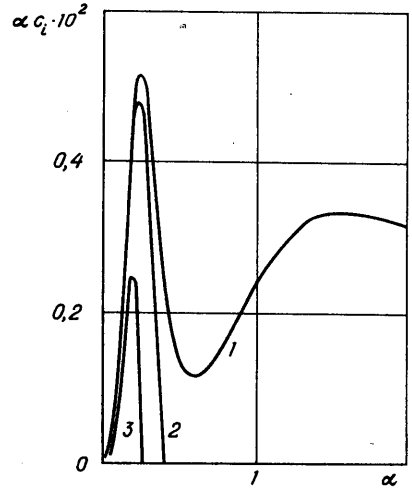
При $\rho_0=1$ собственного значения не существует. Приведенные выше числа и результаты вычислений при других α показывают, что возмущения второго вида неустойчивы, если $\rho_0 > 1$ (вторая жидкость тяжелее первой), и устойчивы при $\rho_0 < 1$. Следовательно, в данном случае возмущения второго вида определяют неустойчивость Тейлора [4].

Из расчетов для данных выше значений α , Re , We , σ_0 , h_0 , θ и $\rho_0=1$ следует, что при $\nu_0 > 1$ течение неустойчиво, при $\nu_0 < 1$ — устойчиво.

Рассмотрим влияние параметра ρ_0 на устойчивость течения пленки по вертикальной поверхности. В качестве примера определим характеристики устойчивости пленки, для которой значения $\rho^{(j)}$, $\sigma^{(j)}$, $j=1,2$, H_{dc} , H_c указаны выше и $\nu^{(j)}=0,105 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $j=1,2$; тогда $Re=25,4$, $We=0,109$, $\rho_0=1,14$, $\sigma_0=1,16$, $h_0=0,5$, $\nu_0=1$. На фиг. 1 показаны зависимости c_{1r} (кривая 1), c_{1i} (2), c_{2r} (3), c_{2i} (4) при $\alpha=0,01$; при $\rho_0=1$ собственного значения c_2 не существует. Из фиг. 1 следует, что при $\rho_0 < 1$ течение



Фиг. 1



Фиг. 2

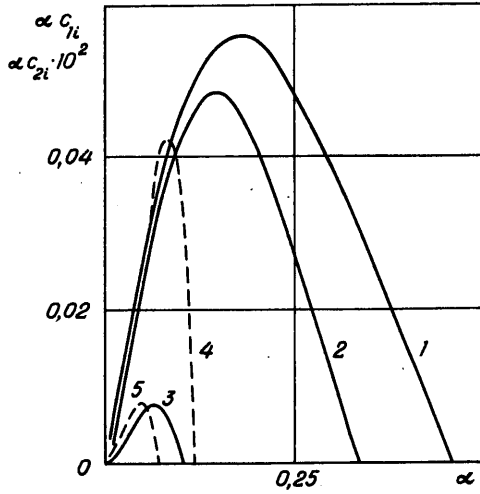
неустойчиво относительно возмущений обоих видов, при $\rho_0 > 1$ — относительно возмущений первого вида; этот вывод подтверждается расчетами при других значениях α .

Приведенные результаты показывают, что влияние ρ_0 на устойчивость течения зависит от угла наклона подложки θ .

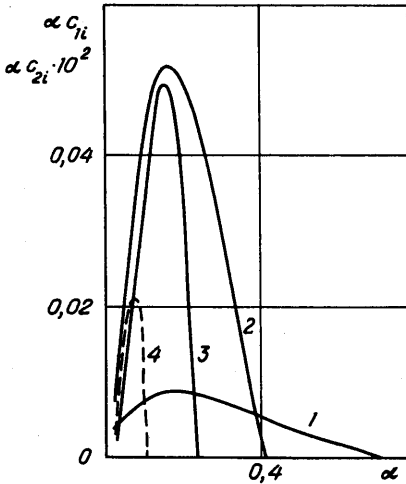
Влияние поверхностного натяжения на коэффициенты усиления возмущений иллюстрируется на фиг. 2. Здесь представлен случай пленки, первой и второй жидкостями которой являются растворы желатины разной концентрации. В качестве примера рассмотрен случай $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = 1,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\nu^{(1)} = 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu^{(2)} = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $\sigma^{(2)} = 0,03 \text{ Н/м}$, $H_c = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, $H_{dc} = 10^{-4} \text{ м}$, $\theta = \pi/6$. При этих условиях возмущения первого вида устойчивы. Кривые 1–3 соответствуют значениям $\sigma^{(1)} = 0$; 10^{-3} ; 10^{-2} Н/м . Аналогично [7] при $\sigma^{(1)} = 0$ течение неустойчиво относительно коротких волн.

Рассмотрим влияние угла наклона θ на коэффициенты усиления возмущений для пленки, первой жидкостью которой является вода, второй — бензол, в случае $H_{dc} = 10^{-4} \text{ м}$, $H_c = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}$. Примеры расчетов приводятся на фиг. 3, где кривые 1–3 соответствуют возмущениям первого вида, 4, 5 — второго и $\theta = \pi/2$ для кривых 1, 4, $\theta = \pi/4$ — для 2, 5, $\theta = \pi/12$ — для 3. Из фиг. 3 следует уменьшение наибольшего коэффициента усиления для малых значений θ .

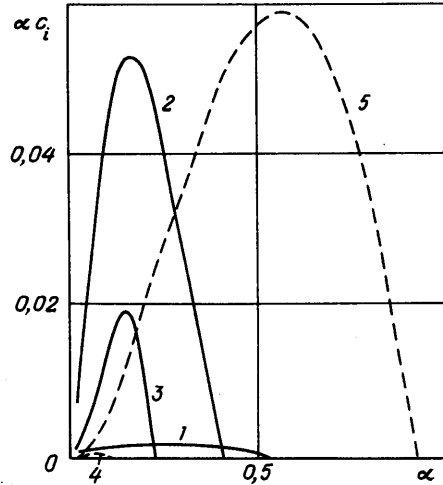
Для технологических приложений важно знать влияние физических характеристик жидкостей на наиболее неустойчивые возмущения. На фиг. 4 показаны течения, отличающиеся от условий фиг. 3 при $\theta = \pi/3$ изменением кинематической вязкости первой жидкости $\nu^{(1)}$. Здесь кривые 1–3 соответствуют αc_{1i} , 4 — αc_{2i} , причем для кривой 1 $\nu^{(1)} = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, для 2, 4 — $10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, для 3 — $10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$. При $\nu^{(1)} < 0,58 \cdot 10^{-6}$ и $> 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ возмущения второго вида устойчивы. Из фиг. 4 следует, что, понижая вязкость первой жидкости, можно существенно уменьшить коэффициент нарастания наиболее неустойчивых возмущений.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Фигура 5 иллюстрирует влияние изменения плотности первой жидкости, причем другие параметры соответствуют условиям фиг. 3 при $\theta = \pi/3$. Здесь кривые 1–3 показывают коэффициенты нарастания возмущений первого вида, 4, 5 – второго; $\rho^{(1)} = 10 \text{ кг/м}^3$ для кривой 1, 10^3 кг/м^3 – для 2, 4, 10^5 кг/м^3 – для 3, 5. При малых $\rho^{(1)}$ возмущения второго вида устойчивы; с увеличением $\rho^{(1)}$ они становятся неустойчивыми и более опасными, чем возмущения первого вида.

Для исследования полного спектра собственных чисел при фиксированных определяющих параметрах необходимо применить прямой метод. В [8] этим методом получены области неустойчивости однослойного течения относительно капиллярных волн и волн Толлмина – Шлихтинга, даны выборочные значения собственных чисел, позволяющие судить о коэффициентах усиления волновых возмущений. Волны Толлмина – Шлихтинга могут быть получены и для двухслойных течений; эти волны неустойчивы при больших числах Re ($Re > 3000$). В рассмотренном выше диапазоне определяющих параметров возмущения Толлмина – Шлихтинга устойчивы. Можно отметить совпадение численных результатов [8] и данной работы в случае однослойных пленок.

Приведенные выше результаты (фиг. 3–5) показывают, что длина возмущения с максимальным коэффициентом нарастания существенно зависит от значений определяющих параметров рассматриваемого течения. Распространение выводов [1–3] на малые, но конечные значения α может приводить к неверным результатам. Примером может служить случай $\rho^{(1)} = 10^3 \text{ кг/м}^3$ на фиг. 5: при малых α возмущения первого вида имеют больший коэффициент нарастания, чем возмущения второго вида, но максимальный коэффициент усиления у последних больше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kao T. W. Stability of two-layer viscous stratified flow down an inclined plane // Phys. Fluids. 1965. V. 8. № 5. P. 812–820.
2. Kao T. W. Role of the interface in the stability of stratified flow down an inclined plane // Phys. Fluids. 1965. V. 8. № 12. P. 2190–2194.
3. Kao T. W. Role of viscosity stratification in the stability of two-layer flow down an incline // J. Fluid Mech. 1968. V. 33. № 3. P. 561–572.
4. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во МГУ, 1973. 192 с.
5. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. № 3. С. 171–173.
6. Поверхностные явления и поверхностно-активные вещества. Л.: Химия, 1984. 392 с.
7. Hooper A. P., Boyd W. G. C. Shear-flow instability at the interface between two viscous fluids // J. Fluid Mech. 1983. V. 128. P. 507–528.
8. Беликов В. В., Шкадов В. Я. Исследование спектра собственных значений задачи об устойчивости слоя вязкой жидкости на наклонной плоскости прямым методом // Отчет Ин-та мех. МГУ. 1980. № 2450. С. 7–16.

Москва

Поступила в редакцию
19.IV.1991