

УДК 533.6.011.5 : 517.97

© 1992 г. А. Н. КРАЙКО, А. Р. ПОЛЯНСКИЙ, Н. И. ТИЛЛЯЕВА

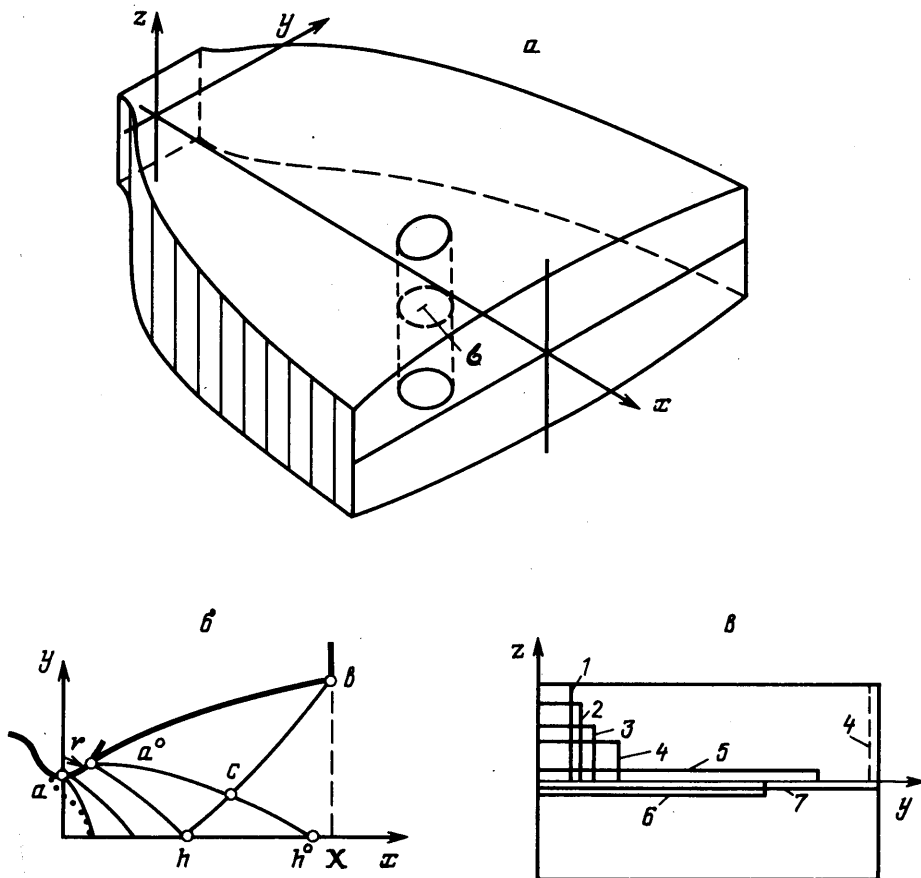
ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ПРОФИЛИРОВАНИЯ «БОКОВЫХ» СТЕНОК СВЕРХЗВУКОВОЙ ЧАСТИ «УЗКОГО» ПРОСТРАНСТВЕННОГО СОПЛА

В приближении модели узкого канала, сводящей трехмерное течение к двумерному, выполнено оптимальное профилирование боковых стенок сверхзвуковой части пространственного сопла с двумя плоскостями симметрии. Такое сопло реализует максимум тяги при заданных звуковом или сверхзвуковом потоке на входе, верхней и нижней стенках, максимально допустимой длине и давлении вне сопла. В общем случае приближенное решение вариационной задачи получается методом неопределенного контрольного контура [1]. Для сопел с нерасширяющимися «концевыми» участками верхней и нижней стенок это решение является строгим. В принятой постановке с применением найденных условий оптимальности, обобщающих известные условия для плоских и осесимметричных конфигураций [1], развиты основанные на методе характеристик численные алгоритмы построения оптимальных боковых стенок и расчета течения в узких каналах. В дополнение к этому пространственное сверхзвуковое течение в спрофилированных таким способом соплах рассчитывалось по маршевой схеме «сквозного» счета [2], которая на использовавшихся в расчетах равномерных сетках реализует второй порядок аппроксимации. Выявлена непрямая зависимость тяги построенных оптимальных конфигураций от формы их входных сечений.

Особенности постановки вариационных задач профилирования сверхзвуковых частей пространственных сопел с учетом габаритных ограничений, являющихся одной из причин их пространственности, и результаты работ, выполненных в этом направлении до 1978 г., обсуждаются в [1]. Публикации [3–12] излагают результаты исследований, выполненных по пространственным оптимальным соплам в последующие годы. В этих работах рассматривались пространственные конфигурации только одного типа. Течения в них топологически подобны течению в оптимальном осесимметричном сопле с заменой осесимметричных замыкающей характеристической поверхности начального пучка волн разрежения и характеристической поверхности, приходящей на выходную кромку сопла, пространственными. Наряду с этим из-за существенно разных габаритных ограничений по двум взаимноперпендикулярным поперечным направлениям (по «высоте» и по «ширине») возможны ситуации, когда замыкающая характеристическая поверхность начального пучка волн разрежения, возникающего в подобном сопле, состоит, как в плоском случае, из двух несвязанных частей. Ниже развит приближенный способ оптимального профилирования цилиндрических боковых стенок таких сопел при, как уже отмечалось, заданных верхней и нижней стенках.

1. Пусть x, y, z — декартовы координаты, плоскости $y=0$ и $z=0$ которых совпадают с плоскостями симметрии сверхзвуковой части сопла (фиг. 1, а), а плоскость $x=0$ — с ее начальным сечением. Сверхзвуковой поток в этом сечении (далее для краткости — «на входе в сопло») симметричен относительно плоскостей $y=z=0$. Верхняя и нижняя стенки, симметричные относительно плоскости xy , задаются уравнениями $z = \pm Z(x, y)$. Боковые стенки предполагаются цилиндрическими. Их форма определяется уравнением $y = \pm Y(x)$, где функция $Y(x)$ определяется решением вариационной задачи. Далее в силу симметрии слова «верхняя» и «нижняя» и «боковые», как правило, заменяются словами «верхняя» и «боковая». Их уравнения $z = Z(x, y)$ и $y = Y(x)$.

Будем рассматривать сопла, высота которых изменяется по x медлен-



Фиг. 1

нее, чем ширина, т. е.

$$|Z_x/Z| \ll |Y_x/Y|$$

(1.1)

$$Z_x = \partial Z / \partial x, \quad Y_x = dY / dx$$

Условие (1.1) необязательно предполагает «узость» канала, т. е. выполнение неравенства $Z \ll Y$. Тем не менее сопла, удовлетворяющие ему, будем называть узкими, а используемую далее модель — «моделью узкого канала» (МУК). Уравнения этой модели получаются из интегральных законов сохранения, которые для стационарного течения невязкого и нетеплопроводного газа имеют вид

$$\iint_{\partial\Omega} \rho U_n d\Omega = 0, \quad \iint_{\partial\Omega} (\rho U_n U + p n) d\omega = 0 \quad (1.2)$$

$$\iint_{\partial\Omega} \rho U_n (2h + U^2) d\omega = 0$$

Здесь $\partial\Omega$ — замкнутая поверхность, ограничивающая произвольный целиком занятый газом объем Ω ; $d\omega$ — элемент $\partial\Omega$ с внешней нормалью n ; p , ρ и $h = h(p, \rho)$ с известной функцией в правой части — давление, плотность и удельная энтальпия; U — вектор скорости; $U = |U|$ и $U_n = U n$. Первое

уравнение (1.2) — закон сохранения массы, второе (векторное) — количества движения и третье — энергии.

Для вывода уравнений модели узкого канала применим (1.2) к цилиндрическому объему, который, имея образующие, параллельные оси z , соединяет верхнюю и нижнюю стенки. На частях $\partial\Omega$, совпадающих с этими стенками, $U_n=0$. На цилиндрических поверхностях вектор \mathbf{n} не зависит от z , а $d\omega=d\gamma dz$, где γ — замкнутый контур — сечение $\partial\Omega$ плоскостью $z=0$. Если смотреть на γ сверху, то дуга γ обходится против часовой стрелки. Для выбранного объема проекция на ось z второго уравнения из (1.2) в силу симметрии относительно плоскости xy удовлетворяется тождественно, а прочие принимают вид

$$\oint_{\gamma} \left(\int_0^z \rho u dz \right) dy - \left(\int_0^z \rho v dz \right) dx = 0 \quad (1.3)$$

$$\oint_{\gamma} \left[\int_0^z (\rho u^2 + p) dz \right] dy - \left(\int_0^z \rho uv dz \right) dx = \iint_{\sigma_x} p_+ dy dz$$

$$\oint_{\gamma} \left(\int_0^z \rho uv dz \right) dy - \left[\int_0^z (\rho v^2 + p) dz \right] dx = \iint_{\sigma_y} p_+ dx dz$$

$$\oint_{\gamma} \left[\int_0^z \rho u (2h + U^2) dz \right] dy - \left[\int_0^z \rho v (2h + U^2) dz \right] dx = 0$$

Здесь u и v — x - и y -компоненты \mathbf{U} , p_+ — давление на верхней стенке, σ_x и σ_y — проекции части $\partial\Omega$, совпадающей с верхней стенкой, на плоскости yz и xz . Если σ — площадка плоскости $z=0$, ограниченная контуром γ , то

$$\iint_{\sigma_x} p_+ dy dz = \iint_{\sigma} p_x Z_+ dx dy, \quad \iint_{\sigma_y} p_+ dx dz = \iint_{\sigma} p_y Z_y dx dy \quad (1.4)$$

На плоскости $z=0$ — одной из плоскостей симметрии сопла — z -компонента скорости $w=0$. На верхней стенке в силу условия непротекания $w=uZ_x+vZ_y$.

Ограничимся далее каналами, с медленно расширяющейся верхней стенкой, для которых в дополнение к (1.1) $|Z_x| \ll 1$ и $|Z_y| \ll 1$, и течениями на входе в сопло с $w^2 \ll V^2 = u^2 + v^2$. Тогда выписанные выше условия непротекания и симметрии обеспечат выполнение последнего неравенства во всем потоке, что позволяет заменить в (1.3) U^2 на V^2 .

Записав, наконец, проекцию второго уравнения из (1.2) на ось z для отвечающей $z>0$ половинки рассматриваемого объема, придем к равенству

$$\oint_{\gamma} \left(\int_0^z \rho u w dz \right) dy - \left(\int_0^z \rho v w dz \right) dx = \iint_{\sigma} (p_0 - p_+) dx dy \quad (1.5)$$

в котором p_0 — давление при $z=0$. В силу (1.5) для изучаемых течений неравномерность давления по z , характеризуемая разностью $p_0 - p_+$, мала.

Если в дополнение к сказанному поток на входе в сопло не является «слоистым» по z (под неоднородностью и слоистостью потока подразумеваются произвольные неоднородности полной энтальпии $H=h+U^2/2$ и удельной энтропии s по y), то при $x>0$ изменение параметров по z будет малым. Поэтому при осреднении по полувысоте канала согласно формуле

$$\langle \alpha \rangle = \frac{1}{Z} \int_0^z \alpha dz \quad (1.6)$$

для любых функций α, \dots и $\chi = \chi(\alpha, \dots)$ с точностью до $(\langle \alpha \rangle - \alpha)$ включительно справедливы равенства $\langle \chi \rangle = \chi(\langle \alpha \rangle, \dots)$.

Применив осреднение (1.6) к (1.3), учтя (1.4) и высказанные выше соображения, заменив p_+ на p и опустив знак осреднения, придем к системе двумерных (не зависящих от z) уравнений сохранения

$$\oint \rho Z (u dy - v dx) = 0$$

$$\oint Z (\rho u^2 + p) dy - Z \rho uv dx = \iint_{\sigma} p Z_x dx dy$$

$$\oint Z \rho uv dy - Z (\rho v^2 + p) dx = \iint_{\sigma} p Z_y dx dy$$

$$\oint Z \rho (2h + V^2) (u dy - v dx) = 0$$
(1.7)

Система (1.7), и последующие уравнения при $Z = \text{const}$ становятся уравнениями плоскопараллельного потока.

Полученные выше законы сохранения эквивалентны известным соотношениям на сильных разрывах и дифференциальным уравнениям, которые после несложных преобразований сводятся к

$$[(\rho u Z)_x + (\rho v Z)_y] Z^{-1} = (\rho u)_x + (\rho v)_y + \rho V F = 0$$

$$\rho (\nabla \nabla) V = -\nabla p, \quad \nabla \nabla (2h + V^2) = 0$$

$$F = (Z_x \cos \theta + Z_y \sin \theta) Z^{-1}$$
(1.8)

где ∇ - двумерный оператор, действующий в декартовых координатах xy , а θ - угол наклона вектора скорости V с компонентами u, v и $w=0$ к оси x . Любое из трех последних (скалярных) уравнений (1.8) можно, как и в плоском случае, заменить условием сохранения энтропии s вдоль линии тока: $\nabla \nabla s = 0$.

Аналогично двумерным (плоскому и осесимметричному) течениям первое уравнение (1.8) позволяет ввести функцию тока ψ , такую, что

$$d\psi = kZ\rho(udy - vdx) \tag{1.9}$$

с произвольным нормирующим множителем $k \neq 0$. Последний удобно выбрать так, что при $\psi=0$ на оси x на стенке $\psi=1$. Согласно (1.9), $\nabla \nabla \psi = 0$. Условия сохранения полной энтальпии и энтропии вдоль линии тока $dy/dx = \text{tg } \theta$ с использованием ψ записываются в форме «интегралов полной энтальпии и энтропии»

$$2h + V^2 = 2H(\psi), \quad s = S(\psi) \tag{1.10}$$

Здесь $H(\psi)$, а при отсутствии скачков и $S(\psi)$ определяются условия при $x=0$, $s=s(p, \rho)$ - известная функция p и ρ . Помимо линий тока (c^2 -характеристик) при $V \gg a$ через каждую точку плоскости xy проходят две характеристики (c^+ - и c^- -характеристики), образующие с линией тока углы $\pm \alpha = \arcsin(1/M)$, где $M = V/a$ - число Маха и a - скорость звука. На них

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}(\theta \pm \alpha), \quad \frac{d\theta}{dx} \pm \frac{\text{ctg } \alpha}{\rho V^2} \frac{dp}{dx} \pm \frac{F \sin \alpha}{\cos(\theta \pm \alpha)} = 0$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \pm \frac{k\rho V Z \sin \alpha}{\cos(\theta \pm \alpha)}$$
(1.11)

где верхние (нижние) знаки отвечают c^+ (c^-)-характеристике.

2. Пусть заданы максимально допустимые габариты: длина X и полуширина Y_s сверхзвуковой части сопла (далее - сопла), форма его верхней стенки, т. е. функция $Z(x, y)$, сверхзвуковой поток при $x=0$ и противодавление p^+ среды, в которую происходит истечение. Требуется так спроектировать боковую стенку $y=Y(x)$, чтобы тяга сопла χ была максимальна.

Искомая стенка примыкает (фиг. 1, б, изображает сечение половинки сопла плоскостью xy) к заданной боковой стенке дозвуковой части в начальном сечении $x=0$, т. е. в переменных xy — в точке a с координатами $x_a=0$, $y_a=1$. Последнее равенство определяет выбор масштаба длины L° , а индексы a, \dots приписываются параметрам в соответствующих точках.

Как и в двумерных задачах [1], оптимальная стенка в общем случае может состоять из участка двустороннего экстремума ab , обтекаемого сверхзвуковым потоком, и торца bg , который газом не обтекается ($x_b=x_g=X$, $y_b \leq Y_g$, $y_g=Y_g$) и на который действует давление p^+ . В соответствии с этим с точностью до несущественных при решении вариационной задачи слагаемого и множителя

$$\chi = \int_0^{y_b} Z(\rho u^2 + p) dy + p^+ \int_{y_b}^{Y_g} Z(X, y) dy \quad (2.1)$$

Здесь $y_b=Y(X)$, а первый интеграл берется по сечению выхода $X=r$.

В дополнение к сказанному может накладываться ограничение на радиус кривизны образующей ab при $x < X$. Если он не может быть меньше заданного минимально допустимого значения r , то, как показано на фиг. 1, б, начальный участок aa° искомого контура образуется дугой радиуса r , плавно примыкающей к заданной при $x < 0$ части стенки. На фиг. 1, б помимо прочего нарисованы звуковая линия $V=a$ (пунктир), c^+ - и c^- -характеристики. При $r=0$ окружность aa° вырождается в излом, из которого выходит пучок c^- -характеристик.

Распределения p , ρ и u в сечении $x=X$ зависят от формы стеньки ab в силу условия непротекания на ней, условия симметрии $v=0$ на оси x и уравнений (1.8). Строгий учет этой зависимости при выводе необходимых условий оптимальности возможен в рамках «общего метода множителей Лагранжа» [1]. Получающиеся при этом условия, однако, слишком сложны для разработки на их основе алгоритма построения искомых образующих. С другой стороны, расширение верхней стенки в рассматриваемой постановке ограничено достаточно жестким условием на высоту сопла. Поэтому при приближении к выходу производная Z_x становится либо еще меньше, чем на его начальном участке, либо обращается в нуль.

На конечном участке малое давление, действующее на верхнюю стенку. В такой ситуации, воспользовавшись вторым уравнением из (1.7), справедливым для любого замкнутого контура γ , можно в (2.1) с малой погрешностью заменить первый интеграл интегралом вдоль некоторой другой кривой fb с точкой f оси x , лежащей левее сечения выхода. Тогда (2.1) заменится на

$$\chi = \int_f^b Z[(\rho u^2 + p) dy - \rho uv dx] + p^+ \int_{y_b}^{Y_g} Z(X, y) dy \quad (2.2)$$

Используя полученные далее результаты, можно показать, что переход из (2.1) к (2.2) и сами эти результаты являются строгими, если производная $Z_x=0$ справа от ломаной $h^\circ cb$ и непрерывна на ней.

3. Применяя далее метод неопределенного контрольного контура [1], рассмотрим три его версии, связанные с фиксацией (при варьировании) контрольного контура соответственно в переменных xy , ϕx и ψy . Применение каждой перечисленной пары переменных имеет свои плюсы и минусы. Обозначив штрихом полную производную по соответствующей переменной вдоль кривой, задающей контрольный контур, вместо (2.2) получим для χ

три эквивалентных представления

$$\begin{aligned} \chi &= \int_{y_f=0}^{y_b} Z(\rho u^2 + p - \rho u v x') dy + p^+ \int_{y_b}^{x_g} Z(X, y) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{p}{k \rho u} + \frac{u}{k} + \frac{Z p v}{u} x' \right) d\psi + p^+ \int_{y_b}^{x_g} Z(X, y) dy = \\ &= \int_0^1 \left(Z p y' + \frac{u}{k} \right) d\psi + p^+ \int_{y_b}^{x_g} Z(X, y) dy \end{aligned} \quad (3.1)$$

В первом представлении для χ контрольный контур задается кривой $x=x(y)$ и $x'=dx/dy$, во втором — кривой $x=x(\psi)$ и $x'=dx/d\psi$ и, наконец, в третьем — кривой $y=y(\psi)$ и $y'=dy/d\psi$. Второе и третье представления из (3.1) есть следствия первого, преобразованного с помощью дифференциального равенства (1.9) для ψ или его следствий

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv (kZ\rho u)^{-1} + \frac{v}{u} x' - y' = 0 \\ L_2 &\equiv (kZ\rho v)^{-1} - \frac{u}{v} y' + x' = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Первое выражение для χ из (3.1) применим в случае однородного по H и S потока. Здесь при решении требуется учесть изопериметрическое условие заданного расхода, которое имеет вид

$$G = \int_{y_f=0}^{y_b} Z\rho(u - vx') dy$$

с константой G — расходом газа, известным по потоку в сечении $x=0$. В соответствии с этим условия оптимальности получаются из анализа вариации вспомогательного функционала (λ — постоянный множитель Лагранжа)

$$I = \chi + \lambda G = \int_{y_f=0}^{y_b} Z[p + \rho u^2 + \lambda \rho u - \rho v(u + \lambda)x'] dy + p^+ \int_{y_b}^{x_g} Z(X, y) dy$$

Так как расход G задан, то вариации I и χ совпадают. Поэтому, варьируя I при фиксированных, но пока еще неизвестных кривой $x=x(y)$, производной $x'=x'(y)$ и функции $Z(x, y)$, найдем, что

$$\begin{aligned} \delta\chi = \delta I &= \int_{y_c}^{y_b} Z(A^u \delta u + A^v \delta v) dy - (Z\rho v)_b (u_b + \lambda) \Delta x_b + Z_b [p - p^+ + \rho u(u + \lambda)]_b \Delta y_b \\ \frac{A^u}{\rho} &= \left(1 - \frac{u^2}{a^2} \right) (u + \lambda) + v \left(\frac{u + \lambda}{a^2} u - 1 \right) x' \\ \frac{A^v}{\rho} &= -v \left(1 + \frac{u + \lambda}{a^2} u \right) + \left(\frac{v^2}{a^2} - 1 \right) (u + \lambda) x' \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь s — точка пересечения контрольного контура fb с замыкающей характеристикой $a^0 h^0$ — начального пучка волн разрежения. Слева от нее

$\delta u = \delta v = 0$, так как варьирование контура $a^{\circ}b$ не влияет на течение в пучке

Не вникая в детали, выпишем условия, вытекающие из анализа выражения (3.3) для $\delta\chi$ с учетом произвола в выборе кривой cb , т. е. $x'(y)$. Именно оказывается, что на cb : $x' = \text{ctg}(\vartheta + \alpha)$ и, следовательно, cb — отрезок c^+ -характеристики, на котором, естественно, выполняется соответствующее условие совместности из (1.11). Кроме того, если контур $a^{\circ}b$ оптимален, то на cb должно выполняться условие

$$V \cos(\vartheta - \alpha) \cos^{-1} \alpha = \text{const} = -\lambda \quad (3.4)$$

а оптимальные координаты точки b определяются так, чтобы

$$(p^+ - p + \rho V^2 \text{tg} \alpha \sin \vartheta \cos \vartheta)_b \geq 0, \quad \sin^2 \vartheta_b \geq 0 \quad (3.5)$$

Знак равенства в первом из этих условий определяет $y_b < V_g$. Неравенство имеет место при $y_b = V_g$. Равенство во втором условии, возможное лишь при $\vartheta_b = 0$, определяет $x_b < X$. В отличие от случая $y_b < V_g$ такие ситуации из-за достаточно жестких ограничений на длину редки. Если же $\vartheta_b > 0$, то $x_b = X$, т. е. длина сопла равна своей максимально допустимой величине. Условия (3.4) и (3.5) тождественны известным условиям оптимальности [1] для двумерных оптимальных сопел (первое — для однородных по H и S течений, а (3.5) — в общем случае). Вместе с соответствующими уравнениями для c^+ -характеристики из (1.11) они позволяют построить отрезок cb оптимальной замыкающей c^+ -характеристики, а затем, решив задачу Гурса с данными на $a^{\circ}c$ и cb , — найти линию тока $a^{\circ}b$, т. е. оптимальный контур боковой стенки.

Для неоднородных по H и S течений условие (3.4) несправедливо и для вывода его аналога нужно обратиться ко второму или третьему выражению для χ из (3.1). При использовании первой возможности сначала конструируется вспомогательный функционал

$$I_1 = \chi + \int_0^1 \mu_1(\psi) L_1 d\psi$$

в котором χ дается вторым выражением из (3.1), L_1 определено в (3.2), $\mu_1(\psi)$ — подлежащий определению неопределенный множитель Лагранжа, а интегрирование ведется вдоль также еще неизвестной, но не варьируемой в плоскости ψx кривой fb . При допустимом варьировании контура $a^{\circ}b$ в силу (3.2) $\delta L_1 = 0$ и, следовательно, $\delta\chi = \delta I_1$. Поэтому аналогично (3.3) получим

$$\begin{aligned} \delta\chi = \delta I_1 = \int_{\psi_c}^1 (A^v \delta y + A^u \delta u + A^v \delta v) d\psi + \left(Z \frac{v}{u} \right)_b \left(p + \frac{\mu_1}{Z} \right)_b \Delta x_b - \\ - Z_b \left(p^+ + \frac{\mu_1}{Z} \right)_b \Delta y_b \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$A^v = \mu_1' + Z_v \left(p v x' - \frac{\mu_1}{k \rho Z^2} \right) \frac{1}{u}$$

$$k A^u = \frac{1}{\rho u^2} \left[\left(\frac{u^2}{a^2} - 1 \right) - \beta \right] \mu - \beta, \quad k A^v \frac{u}{v} = \frac{1}{\rho v^2} \left(\beta + \frac{v^2}{a^2} \right) \mu - 1$$

$$\beta = k Z \rho v x', \quad \mu = p + \frac{\mu_1}{Z}$$

Здесь штрих означает производную по ψ вдоль cb .

Коэффициенты A^u и A^v в (3.6) можно обратить в нули, воспользовавшись произволами в выборе функций $x'(\psi)$ и $\mu_1(\psi)$, что, кстати, возможно для любого, необязательно оптимального, контура $a^{\circ}b$. Это дает, что,

во-первых, на cb

$$x' = \frac{\cos(\theta + \alpha)}{k\rho VZ \sin \alpha}$$

т. е., согласно (1.11), cb — отрезок c^+ -характеристики, и что, во-вторых, на cb

$$\mu_1 = Z(\rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \theta \cos \theta - p) \quad (3.7)$$

Если же контур $a^{\circ}b$ оптимален, то из (3.6) в дополнение к этому получаются условия (3.5) и уравнение

$$\mu_1' = KZ_{\nu}, \quad K = \frac{V}{kZ} \left[\operatorname{tg} \alpha \sin \theta - \frac{\rho}{\rho V^2} \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin \alpha} \right] \quad (3.8)$$

для определения μ_1 . Вместе с (3.7) и с соответствующими уравнениями из (1.11) оно определяет «экстремальную» c^+ -характеристику cb .

Использование условий оптимальности в форме (3.7) и (3.8) особенно удобно, если верхняя стенка, как и боковая, цилиндрическая, т. е. $Z = Z(x)$, $Z_{\nu} = 0$ и, согласно (3.8), $\mu_1 = \text{const}$. В этом случае на экстремальной характеристике в силу (3.7)

$$Z(\rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \theta \cos \theta - p) = \text{const} \quad (3.9)$$

Случай цилиндрической верхней стенки $Z = Z(x)$, не единственный, когда на cb справедлив интеграл (3.9). Можно показать, что (3.6), (3.7) не изменятся, если Z зависит от y не только непосредственно, но и через ψ , т. е. если $Z = Z^{\circ}(x, y, \psi)$. При этом в (3.6) и (3.8) Z_{ν} нужно заменить на $Z_{\nu}^{\circ} = (\partial Z^{\circ} / \partial y)_{x, \psi}$. Поэтому (3.9) сохраняется и для $Z = Z^{\circ}(x, \psi)$. Конечная связь (3.9) на экстремальной характеристике cb сохраняется и для верхней стенки, заданной в форме $Z = Z^{\circ}(x, \psi)$. В плоском случае, когда $Z = \text{const}$, (3.9) сводится к известному интегралу [1].

Возможны случаи, когда удобнее применять контрольный контур, определенный уравнением $y = y(\psi)$. При этом для χ берется последнее выражение из (3.1), а вспомогательный функционал

$$I_2 = \chi + \int \mu_2(\psi) L_2 d\psi$$

с L_2 из (3.2) и неопределенным множителем Лагранжа $\mu_2(\psi)$.

Поступая с I_2 практически так же, как с I_1 , с той разницей, что теперь $\delta y = 0$, а $\delta x \neq 0$ на cb , вновь найдем, что cb — отрезок c^+ -характеристики, координаты конечной точки оптимального контура $a^{\circ}b$ определяются условиями (3.5), а (3.7) и (3.8) заменяются на

$$\mu_2 = Z\rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \theta, \quad \mu_2' = -KZ_x \quad (3.10)$$

с K из (3.8). Если $Z = Z(y)$ или $Z = Z^{\circ}(y, \psi)$, то отсюда следует, что на экстремальной характеристике cb

$$Z\rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \theta = \text{const} \quad (3.11)$$

Согласно (3.11), θ на cb в этом случае знакпостоянно.

Для каналов с $Z = Z(y)$, образующие верхней стенки которых параллельны оси x и потому справедлив переход к контрольному контуру, все полученные выше результаты в рамках МУК являются строгими. Если канал плоский или осесимметричный, то $Z(y) = Cy^{\nu}$, где C — константа, а $\nu = 0$ в плоском и 1 в осесимметричном случаях. При $\nu = 0$ МУК становится точной. При $\nu = 1$ она точна для бесконечно узкого сегмента, а значит, и для всего канала. В этих случаях (3.11) сводится к известным формулам.

Если на ломаной $h^{\circ}cb$ и справа от нее $Z_x \neq 0$, то, строго говоря, переход к контрольному контуру не учитывает вклад в χ силы, действующей на верхнюю стенку справа от $h^{\circ}cb$. Несмотря на малость этого, добавка и как следствие — появляющихся из-за него дополнительных вкладов в A^* , A^{ν} , A^u и A^v , полученные выше условия оптимальности из-за этого оказываются приближенными (исключение — условия (3.5)). В этом же причина неэквивалентности условий, найденных в разных переменных. Покажем, например, неэквивалентность при $Z_x \neq 0$ на cb условий (3.7) и (3.8) условиям (3.10). Для этого, исключив из них μ_1' и μ_2' , придем к дифференциальной связи θ' и p' . Покажем, что она противоречит условию совместности из (1.11).

Согласно (3.8) и (3.10), $\mu_1' Z_x + \mu_2' Z_y = 0$. Подставив сюда конечные выражения для μ_1 и μ_2 из (3.7) и (3.10), после некоторых преобразований придем к уравнению

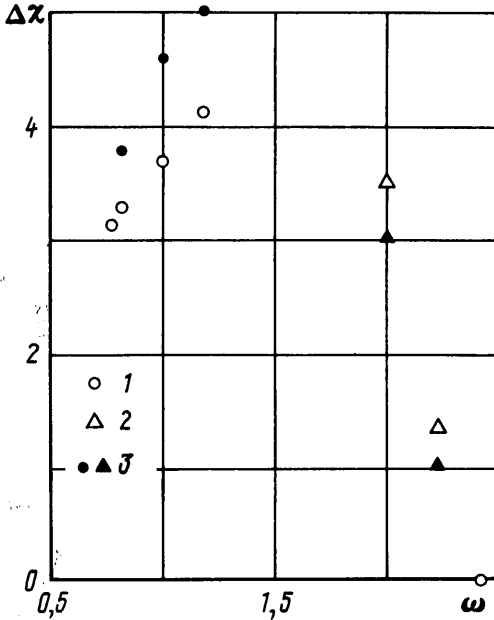
$$\theta' + \frac{\text{ctg } \alpha}{\rho V^2} p' + \frac{F}{k \rho V Z} - \frac{p Z_x \text{ctg } \alpha}{k \rho^2 V^2 Z^2 \sin \theta} = 0 \quad (3.12)$$

Если $Z = Z^\circ(x, y, \psi)$, то под Z_x здесь понимается $Z_x^\circ + \psi_x Z_\psi^\circ = Z_x^\circ - k \rho v Z Z^\circ_\psi$. От условия совместности для c^+ -характеристик, которое получается из (1.11) после перехода к полным производным по ψ , уравнение (3.12) отличается последним членом. Указывая на неэквивалентность при $Z_x \neq 0$ на cb полученных условий оптимальности, это одновременно демонстрирует малость найденной погрешности при $p Z_x / (\rho V^2) = Z_x / (\chi M^2) \ll 1$. Переход к числу Маха здесь сделан для совершенного газа с показателем адиабаты χ .

Все полученные выше условия (за исключением (3.5) со знаками неравенств) являются необходимыми условиями экстремума, а не максимума χ . Одно из необходимых условий максимума χ , которое должно выполняться на экстремальной характеристике cb , получается так же, как в плоском и осесимметричном случаях [1], и имеет вид

$$W \equiv 4(v+u)\sqrt{M^2-1} - \frac{2M^4}{M^2-1} \left(1 + \frac{a^2 a_p + a_\rho}{a} \rho\right) v = 4(v+u)\sqrt{M^2-1} - \frac{\chi+1}{M^2-1} M^4 v \geq 0$$

$$\left(a_p = \left(\frac{\partial a}{\partial p}\right)_p, \quad a_\rho = \left(\frac{\partial a}{\partial \rho}\right)_p\right)$$



Фиг. 2

где второе выражение для W верно для совершенного газа. Если где-либо на cb нарушается данное условие, то схему Фиг. 1, б следует заменить схемой с фокусировкой c^+ -характеристик в точке с.

4. Расчеты, результаты которых приводятся ниже, выполнены для $\chi=1,4$, $p^+=0$, $r=0,5$, разных X в равномерного сверхзвукового потока в начальном сечении с $M_0=1,01$, где индекс «ноль» приписывается параметрам при $x=0$. Припишем индексы «звездочка» и «градус» критическим размерным величинам, а в качестве масштабов скорости, плотности, давления, площади σ , длины и тяги (а также импульса J) возьмем a_*° , ρ_*° , $\rho_*^\circ (a_*^\circ)^2$, σ_0° , $\gamma \sigma_0^\circ$ и $\rho_*^\circ (a_*^\circ)^2 \sigma_0^\circ$. В согласии с этим $\sigma_0=1$. Все интегральные характеристики сопла, в частности σ и χ , будем давать для его «четвертушки». В приводимых далее примерах верхняя стенка сопла цилиндрическая $z=Z(x)$, а начальные сечения — прямоугольники ($Y_0 Z_0 = \sigma_0 = 1$).

Результаты, собранные в таблице, относятся к соплам с квадратным входом ($Y_0=Z_0=1$) и с верхней стенкой, идентичной стенке плоского сопла, которое при $r=0,5$ реализует на минимальной длине $X_c=4,97$ равномерный поток с $M_c=2$. При $x \geq X_c$ его высота $Z_c=1,69$. В таблице приведены номера сопел N , их длины X , ординаты y_b концевых точек цилиндрических боковых стенок, части тяги, реализуемые на верхней (χ_u) и на боковой (χ_b) стенках и их суммы — «интегралы сил давления» χ . Для каждой длины номер без индекса относится к оптимальному соплу с боковой стенкой, построенной по условиям оптимальности (3.5) и (3.9). Их тяга максимальна. Для сопел с $X=3$ и 5, для которых $Z_x \neq 0$ на экстремальной характеристике cb , условия ее экстремальности, полученные в разных переменных, не эквивалентны. Однако на величине χ , а тем более импульса $J=J_0+\chi$, где $J_0 \equiv \rho_0^+ \rho_0^+ a_0^+ = 1,7142$ — начальный импульс, эта неэквивалентность сказывается слабо, как видно из сравнения сопел с $N=2$ и 2₁. Последнее построено с заменой (3.9) на (3.10). Получившиеся из-за этого проигрыши по χ и J — $\Delta\chi$ и ΔJ равны 0,14 и 0,02%.

N	X	y_b	χ_u	χ_s	χ	$\Delta\chi$	ΔJ	χ_t	$\Delta\chi_t$
1	3	1,93	0,156	0,154	0,3099	0	0	0,2996	0
1'	3	2,17	0,155	0,152	0,3070	0,95	0,15	0,2962	1,17
1 $_{c'}$	3	1,37	0,166	0,107	0,2737	11,7	1,79	0,2640	11,9
2	5	2,61	0,165	0,215	0,3794	0	0	0,3758	0
2 $_{c'}$	5	2,53	0,166	0,213	0,3789	0,14	0,02	0,3756	0,05
2 o	5	3,03	0,162	0,211	0,3733	1,62	0,29	0,3709	1,30
3	10	4,36	0,162	0,294	0,4566	0	0	0,4520	0
3'	10	5,06	0,161	0,291	0,4516	1,08	0,23	0,4470	1,11
3 o	10	5,06	0	0,403	0,4030	11,7	2,47	0,4027	10,9
4	15	6,03	0,161	0,334	0,4951	0	0	0,4904	0
4'	15	6,96	0,160	0,331	0,4911	0,80	0,18	0,4869	0,72
4 o	15	6,96	0	0,449	0,4491	10,8	2,08	0,4489	8,46
5	20	7,63	0,160	0,358	0,5190	0	0	0,5145	0
5'	20	8,76	0,160	0,356	0,5158	0,61	0,14	0,5114	0,59
5 o	20	8,76	0	0,478	0,4779	7,92	1,84	0,4776	7,16
6	25	9,17	0,160	0,376	0,5360	0	0	0,5315	0
6'	25	10,5	0,160	0,374	0,5328	0,60	0,14	0,5289	0,49
6 o	25	10,5	0	0,498	0,4980	7,09	1,67	0,4978	6,35

Номера со штрихом отвечают соплам, значения y_b которых взяты такими же, как у оптимального плоского ($Z=1$) сопла, а экстремальная характеристика строилась по (3.9). Их характеристики χ и J заведомо превышают χ и J пространственных сопел с $Z \neq Z_0=1$, но с боковыми стенками, тождественными боковым стенкам оптимальных плоских сопел. Тем не менее, сопла с $N=1', \dots$ и по χ , и по J заметно хуже оптимальных. Естественно, еще больше (до 11,7% по χ и до 2,47% по J) проигрывают плоские сопла ($Z=1$), имеющие номера с верхним индексом «ноль». Плоские сопла из-за отсутствия расширения по Z перерасширены по y . По этой причине пространственные сопла с $N=1', \dots$ перерасширены, что и ведет к потерям. Учет расширения по z в рамках «правила эквивалентности» по площади еще более ухудшает положение. Последнее демонстрирует сопло с $N=1_{c'}$. Величина y_b этого сопла взята такой, что его выходная площадь равна площади выходного сечения оптимального плоского сопла (при $X=3$ в сечении выхода $Z \approx 1,47$). У такого сопла $\Delta\chi$ и ΔJ оказались на порядок больше, чем у сопла с $N=1'$. Интегралы сил давления χ_t и их относительные проигрыши в процентах $-\Delta\chi_t$ найдены для исследуемых сопел из пространственных расчетов по маршевой схеме второго порядка [2]. Сравнение χ_t и $\Delta\chi_t$ с результатами МУК подтверждают высокое качество приближенной модели.

Чтобы выяснить, как на оптимальную конфигурацию влияет форма начального сечения, для $X=15$, $r=0,5$, $p^+=0$, $\kappa=1,4$ и $M_0=1,01$ проводились расчеты сопел с прямоугольными начальными сечениями: $|y| \leq Y_0$, $|z| \leq Z_0$, $Y_0 Z_0=1$, отличными от квадратного. Согласно таблице, выходное сечение последнего (также входящего в число сравниваемых) — прямоугольник: $|y| \leq 6,03$, $|z| \leq 1,69$. Тем же ограничениям удовлетворяли все сравниваемые сопла. Благодаря этому их удобно характеризовать отношением $Y_0/Z_0=Y_0^2$ с Y_0 из интервала: $1/1,69 \approx 0,59 \leq Y_0 \leq 6,03$. Было построено 7 оптимальных сопел с $Y_0=0,59$ ($N=1$); $1/\sqrt{2} \approx 0,71$ (2); 1 (3); $\sqrt{2} \approx 1,41$ (4); 4 (5); 5 (6) и 6,03 (7). Четвертушки их пронумерованных начальных и конечных сечений изображены на фиг. 1, в. Штриховая вертикаль дает значение $y_b=5,83$, оптимальное по (3.5) для сопла с $Y_0=\sqrt{2}$ ($N=4$). Первое и последнее сопла — плоские с «плоскостями течения» соответственно xy и xz , причем последнее с самым вытянутым минимальным сечением ($N=7$, $Y_0=6,03$, $Z_0=1/6,03 \approx 0,166$), реализует равномерный поток уже при $x=8,86 < X=15$, а поэтому — и наибольшую тягу ($\chi=0,514$). Для плоского сопла с $N=1$ тяга заметно меньше ($\chi=0,498$). Оптимальные сопла, профилированные в рамках МУК ($N=2-6$), имеют $\chi=0,497, 0,495, 0,493, 0,496$ и 0,507.

Немонотонную зависимость χ от Y_0 демонстрирует фигура 2. На ней $\omega \equiv \sqrt{Y_0}$, точки 1 отвечают $N=1-4, 7$, точки 2 — $N=5$ и 6, а $\Delta\chi$ — относительный проигрыш χ (в процентах) по сравнению с χ наилучшего сопла ($N=7$). Боковые стенки сопел с $N=2$ и 4, как и сопла с $N=3$ (в таблице его номер $N=4$), профилировались с использованием (3.9). Сопла с $N=5$ и 6 слабо расширяются по y и сильно по z , что при их профилировании учитывалось переменной ролью верхней и боковой стенок. В соответствии со сказанным верхние (для $N=2-4$) и боковые (для $N=5$ и 6), стенки брались

такими, как у оптимальных плоских сопел, которые при $r=0,5$ либо приходят в точки $x=15$, $z=1,69$ или $x=15$, $y=6,03$, либо при тех же $z=1,69$ или $y=6,03$ реализуют равномерный поток при $x<15$. Найденную немонотонную зависимость $\Delta\chi$ от ω подтверждают и результаты пространственных расчетов по маршевой схеме, показанные на фиг. 2 ($N=2-6$) точками 3.

Авторы благодарят Л. Е. Стернина, привлечшего их внимание к рассмотренной задаче, и В. А. Вострецову — за помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
2. Крайко А. Н. Некоторые вопросы построения численных алгоритмов для расчета течений идеального газа // Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики. М., Ин-т прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР. 1987. С. 33–55.
3. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Профилирование двумерных и пространственных сопел и расчет течения в них // Газодинамические лазеры и лазерная фотохимия. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 52–62.
4. Борисов В. М., Михайлов И. Е. Об оптимизации сверхзвуковых частей пространственных сопел // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т. 21. № 2. С. 517–519.
5. Борисов В. М., Михайлов И. Е. Расчет экстремальной формы сверхзвуковой части пространственного сопла. М.: ВЦ АН СССР, 1982. 31 с.
6. Левин М. П. Об оптимальных поверхностях тока в сверхзвуковых пространственных течениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 22. № 4. С. 1003–1008.
7. Левин М. П. Метод контрольной поверхности в пространственных вариационных задачах газовой динамики. М.: ВЦ АН СССР, 1983. 30 с.
8. Борисов В. М. О структуре решений при оптимизации формы сверхзвуковых пространственных каналов. М.: ВЦ АН СССР, 1987. 19 с.
9. Борисов В. М., Левин М. П. Расчет и оптимизация сверхзвуковых частей пространственных сопел с косым срезом. М.: ВЦ АН СССР, 1987. 14 с.
10. Михайлов И. Е. Необходимые условия оптимальности пространственных тел в сверхзвуковом потоке газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 7. С. 1111–1114.
11. Борисов В. М., Михайлов И. Е., Сергиенко А. А., Собачкин А. А. Расчетные и экспериментальные исследования сверхзвуковой части экстремального пространственного сопла // Методы аэрофизических исследований. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1987. С. 120–129.
12. Борисов В. М., Левин М. П., Михайлов И. Е. Альбом пространственных сверхзвуковых сопел. М.: ВЦ АН СССР, 1989. 63 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.III.1991