

УДК 532.58 : 517.97

© 1992 г.

Н. А. ОСТАПЕНКО, Г. Е. ЯКУНИНА

## О ТЕЛАХ НАИМЕНЬШЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ, ДВИГАЮЩИХСЯ В СРЕДАХ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАКОНА ЛОКАЛЬНОСТИ

Построено решение вариационной задачи о теле минимального сопротивления, двигающемся с постоянной скоростью в средах, в которых при определенных допущениях сила воздействия среды на элементарную площадку поверхности тела зависит лишь от ее ориентации относительно направления движения (закон локальности). Представления нормальной (давление) и тангенциальной (трение) составляющих силы охватывают широкий круг условий, реализующихся при движении тела в газах и плотных средах.

1. Сопротивление тела. Рассмотрим движение тела, форма поверхности которого в цилиндрической системе координат  $(\rho, \theta, x)$  с началом в носике тела и осью  $x$ , направленной в сторону, противоположную движению, определяется уравнением  $f(\rho, \theta, x) = 0$ , имеющего заданные длину  $L$  и площадь миделевого сечения  $S_m$ . Сопротивление тела может быть записано в виде

$$D = q \left\{ \iint_S [-c_p(\mathbf{n}\mathbf{x}) + c_\tau(\boldsymbol{\tau}\mathbf{x})] dS + c_g S_m \right\} \quad (1.1)$$

$$c_p = A_1(\mathbf{n}\mathbf{x})^2 - B_1(\mathbf{n}\mathbf{x}) + C_1$$

$$c_\tau = A_2(\mathbf{n}\mathbf{x})^2 - B_2(\mathbf{n}\mathbf{x}) + C_2$$

Здесь  $q$  — скоростной напор,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  — соответственно единичные векторы оси  $x$ , а также внешней нормали к поверхности тела и касательной к ней, направленной вниз по потоку в рассматриваемой точке. Причем  $\boldsymbol{\tau}[\mathbf{n} \times \mathbf{x}] = 0$ , что является в большинстве случаев естественным допущением,  $S$  — поверхность тела, обращенная в сторону движения,  $c_p$ ,  $c_\tau$  и  $c_g$  — соответственно коэффициенты давления, трения и донного давления ( $c_g = \text{const}$ ),  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  ( $i=1, 2$ ) — константы, зависящие от характеристик среды и скорости движения.

Выписанные соотношения для  $c_p$  и  $c_\tau$  (1.1) не только содержат в себе модели силового воздействия среды на элемент поверхности тела, рассматривавшиеся ранее: например,  $A_1$  и  $C_2 \neq 0$ ,  $B_1 = C_1 = A_2 = B_2 = 0$  — плотный газ, модель Ньютона с постоянным коэффициентом трения [1];  $A_1$ ,  $B_1$  и  $B_2 \neq 0$ ,  $C_1 = A_2 = C_2 = 0$  — разреженный газ [1, 2];  $A_1$  и  $C_1 \neq 0$ ,  $B_1 = A_2 = B_2 = C_2 = 0$  — плотные среды (грунты, металлы) без трения [3]; но и существенно дополняют их. Так, в частности, в случае движения тела в плотных средах при  $A_2 = \mu A_1$ ,  $C_2 = \mu C_1$ ,  $B_1 = B_2 = 0$  имеет место модель с Кулоновым трением ( $\mu$  — коэффициент сухого трения), где  $A_1$  и  $C_1$  определяются согласно теориям [4, 5] либо эмпирическим данным [6], а при  $A_2 = B_2 = 0$ ,  $C_2 \neq 0$  — модель с постоянным коэффициентом трения, реализующаяся, когда касательные напряжения превосходят прочность материала среды на срез.

Будем отыскивать тела минимального сопротивления в классе поверхностей с подобными по оси  $x$  поперечными сечениями

$$f = \rho - \varphi(x)R(\theta) = 0.$$

Учитывая выражения для дифференциала площади поверхности тела  $dS$ ,  $(nx)$  и  $(\tau x)$  (см., например, [7])

$$dS = (\rho/f_0) \Phi d\theta dx, \quad \Phi = [f_0^2 + (f_0/\rho)^2 + f_x^2]^{1/2}$$

$$(nx) = f_x \Phi^{-1}, \quad (\tau x) = [f_0^2 + (f_0/\rho)^2]^{1/2} \Phi^{-1}$$

найдем следующее выражение для сопротивления тела в приближении тонкого тела ( $(f_x/f_0)^2 \ll 1$ ), когда оказывается возможным получить аналитическое решение вариационной задачи,

$$D = q \left\{ \int_0^L \int_0^{2\pi} (A\dot{\varphi}^3 R^4 \Phi_1^{-2} + B\dot{\varphi}^2 R^2 \Phi_1^{-1} + C\dot{\varphi} R^2 + ER\Phi_1) \varphi dx d\theta + c_g S_M \right\}, \quad (1.2)$$

$$\Phi_1 = [1 + (\dot{R}/R)^2]^{1/2}, \quad A = A_1, \quad B = A_2 + B_1, \quad C = C_1 + B_2, \quad E = C_2$$

$$S_M = \frac{1}{2} \varphi^2(L) \int_0^{2\pi} R^2 d\theta \quad (1.3)$$

Выражение (1.2), где точка обозначает дифференцирование по  $x$ , либо  $\theta$ , можно переписать в следующих двух формах:

$$c_D = \frac{D}{qS_M} = \frac{1}{S_{M0}} \int_0^L F_1(\dot{\varphi}, \varphi) dx + C + c_g = I_1 + C + c_g, \quad (1.4)$$

$$F_1(\dot{\varphi}, \varphi) = (\gamma_1 \dot{\varphi}^3 + \gamma_2 \dot{\varphi}^2 + \gamma_3) \varphi$$

$$\gamma_1 = A \int_0^{2\pi} R^4 \Phi_1^{-2} d\theta, \quad \gamma_2 = B \int_0^{2\pi} R^2 \Phi_1^{-1} d\theta, \quad \gamma_3 = E \int_0^{2\pi} R \Phi_1 d\theta$$

$$c_D = \frac{1}{S_{M0}} \int_0^L F_2(\dot{R}, R) d\theta + C + c_g = I_2 + C + c_g \quad (1.5)$$

$$F_2(\dot{R}, R) = k_1 \dot{R}^4 \Phi_1^{-2} + k_2 \dot{R}^2 \Phi_1^{-1} + k_3 R \Phi_1$$

$$k_1 = A \int_0^L \varphi \dot{\varphi}^3 dx, \quad k_2 = B \int_0^L \varphi \dot{\varphi}^2 dx, \quad k_3 = E \int_0^L \varphi dx$$

Запись сопротивления тела в виде (1.4) и (1.5) позволяет разделить задачу нахождения оптимальной формы тела на две. Поскольку вариации продольного  $\varphi(x)$  и поперечного  $R(\theta)$  контуров независимы, то продольный и поперечный контуры должны являться соответственно экстремальными функционалов  $I_1$  и  $I_2$  при заданных  $L$  и  $S_M$ .

**2. Оптимальный продольный контур.** Так как независимая переменная  $x$  в функционале  $I_1$  в явном виде отсутствует, то соответствующее

уравнение Эйлера допускает первый интеграл

$$\frac{1}{\gamma_1} \left( \varphi \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} - F_1 \right) = (2\varphi^3 + d\varphi^2 - d_1)\varphi = c_1 \quad (2.1)$$

$$d = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad d_1 = \frac{\gamma_3}{\gamma_1}$$

где  $c_1$  — постоянная.

Без ограничения общности исследования можно считать, что в конечных точках функция  $\varphi(x)$  должна удовлетворять условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(L) = (S_M/\pi)^{1/2} \quad (2.2)$$

Из второго условия (2.2) и (1.3) следует, что если поперечный контур является окружностью, то  $R(\theta) = 1$ .

Не останавливаясь на детальном обсуждении задачи об оптимальном продольном контуре, заметим, что в уравнении (2.1) при наложении естественного ограничения на форму продольного контура  $\varphi \geq 0$  и с учетом (2.2) константа  $c_1 \geq 0$ . Причем если  $c_1 > 0$ , то экстремаль описывается соотношением

$$x = \int_0^\varphi z^{1/2} \left\{ \left[ 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{d}{3}\right)^3 z} \right]^{1/2} + \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{3}\right)^3 z} \right]^{1/2} \right\} d\varphi \quad (2.3)$$

где  $z = \varphi / (c_1 + d_1\varphi)$ ,  $c_1$  определяется из второго условия (2.2). В этом случае продольный контур является выпуклым с асимптотикой в носике тела  $(32c_1/27)^{1/2} x^{3/4}$ .

При  $c_1 = 0$ , отвечающем также случаю, когда длина тела не задана, уравнение (2.1) допускает два типа дуг экстремали, удовлетворяющих условию Вейерштрасса — Эрдмана в угловой точке, — прямых  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \tau x/2$ , где  $\tau = 2\varphi(L)/L_1$  — относительная толщина «конуса» с длиной  $L_1$ , определяемая из соотношений

$$\tau = 2\varphi_1 d_1^{1/2}, \quad 2\varphi_1^3 + d_2 \varphi_1^2 - 1 = 0, \quad d_2 = \gamma_2 / (\gamma_1^2 \gamma_3)^{1/2} \quad (2.4)$$

Таким образом, при  $L \geq L_1$ , если нет дополнительных изопериметрических условий (например, задан объем тела), тело минимального сопротивления является коническим и имеет длину  $L_1$ , так как «игла»  $\varphi = 0$  не имеет физического смысла и лишь дополняет продольный контур для удовлетворения краевым условиям (2.2).

Продольный контур через параметры  $d$  и  $d_1$  (2.1), (2.3) либо  $d_1$  и  $d_2$  (2.4) зависит от формы поперечного контура, который в свою очередь будет зависеть от формы продольного контура через параметры  $k_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) (1.5). Для определения величин  $d$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  и  $k_i$  (или их комбинаций) необходимо решения соответствующих вариационных задач подставить в выражения для указанных параметров и решить получающуюся при этом систему уравнений.

Опуская выкладки, связанные с определением этих величин, заметим, что поиск формы тела минимального сопротивления удобно начинать, считая продольный контур коническим:  $\varphi = \tau x/2$ . Рассчитав  $k_i$  (1.5) и определив оптимальный поперечный контур  $R(\theta)$ , вычисляем по (1.4)  $\gamma_i$ , а затем  $\tau$  по (2.4). Если  $L_1 \leq L$ , то оптимальное тело найдено. Если  $L_1 > L$ , то используем для продольного контура выражение (2.3).

**3. Оптимальный поперечный контур.** Изопериметрическое условие (1.3) с учетом (2.2) и выражение для сопротивления (1.5) удобно переписать в виде

$$2\pi k_j^2 = \int_0^{2\pi} r^2 d\theta, \quad k_j = \left(\frac{k_1}{k_3}\right)^{1/3}, \quad r = k_j R \quad (3.1)$$

$$2\pi k_D = \int_0^{2\pi} \left[ \left(\frac{r}{\Phi_2}\right)^3 + a \left(\frac{r}{\Phi_2}\right)^2 + 1 \right] r \Phi_2 d\theta + (C + c_g) \left(\frac{k_1}{k_3^4}\right)^{1/3} S_M \quad (3.2)$$

$$k_D = \frac{c_D S_M}{2\pi} \left(\frac{k_1}{k_3^4}\right)^{1/3}, \quad a = \frac{k_2}{(k_1^2 k_3)^{1/3}} > 0, \quad \Phi_2 = \left[ 1 + \left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2 \right]^{1/2}$$

В случае конического продольного контура

$$k_j = \frac{\tau}{2} \left(\frac{A}{E}\right)^{1/3}, \quad k_D = c_D \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \left(\frac{A}{E^4}\right)^{1/3}, \quad a = \frac{B}{(A^2 E)^{1/3}} \quad (3.3)$$

Задача нахождения функции  $r(\theta)$ , доставляющей минимум сопротивлению тела (3.2) при выполнении изопериметрического условия (3.1) и условия замкнутости поперечного контура  $r(0) = r(2\pi)$  эквивалентна задаче нахождения функции  $r(\theta)$ , удовлетворяющей указанным условиям и минимизирующей функционал

$$I_0 = \int_0^{2\pi} F_0(r, \dot{r}, \lambda) d\theta$$

$$F_0 = \left[ \left(\frac{r}{\Phi_2}\right)^3 + a \left(\frac{r}{\Phi_2}\right)^2 + 1 \right] r \Phi_2 + \lambda r^2$$

Здесь  $\lambda$  — неопределенный постоянный множитель Лагранжа. Основная функция  $F_0$  явно не содержит переменную  $\theta$ , поэтому соответствующее уравнение Эйлера допускает первый интеграл

$$F_0 - \dot{r} \frac{\partial F_0}{\partial \dot{r}} = \left(\frac{r}{\Phi_2}\right)^4 \left[ 1 + 3 \left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2 \right] + a \left(\frac{r}{\Phi_2}\right)^3 \left[ 1 + 2 \left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2 \right] + \frac{r}{\Phi_2} + \lambda r^2 = c_2,$$

$$c_2 = \text{const} \quad (3.4)$$

Решение (3.4) удобно переписать в параметрическом виде

$$r^2 = \frac{c_2 + \alpha(2\alpha^3 + a\alpha^2 - 1)}{3\alpha^2 + 2a\alpha + \lambda} \quad (3.5)$$

$$\alpha = \frac{r}{\Phi_2}, \quad d\theta = \pm \frac{\alpha dr^2}{2r^2 \sqrt{r^2 - \alpha^2}}, \quad \alpha \leq r$$

Условие в угловых точках имеет вид

$$\Delta[c_2] \delta\theta + \Delta \left[ \frac{\partial F_0}{\partial \dot{r}} \right] \delta r = 0 \quad (3.6)$$

Так как положение угловых точек не задано, то из (3.6) следует, что  $\Delta[c_2] = 0$  и, значит, все дуги экстремали имеют одно и то же значение постоянной  $c_2$ . Тогда, если  $r(\theta)$  — решение уравнения (3.4), то и  $r(-\theta)$  и  $r(\theta + \text{const})$  также являются решениями, поскольку  $\dot{r}$  входит в (3.4) в четной степени, и, следовательно, поперечный контур оптимального тела может быть составлен из целого числа  $n$  симметричных циклов. При этом условие замкнутости поперечного контура будет выполнено.

Условие Лежандра запишется в виде

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial \dot{r}^2} \equiv \frac{\alpha^3}{r^4} [2r^2(3\alpha+a) - 8\alpha^3 - 3a\alpha^2 + 1] \geq 0 \quad (3.7)$$

Продифференцировав (3.5) по параметру  $\alpha$ , найдем согласно условию Лежандра (3.7)

$$\frac{dr^2}{d\alpha} = \frac{8\alpha^3 + 3a\alpha^2 - 1 - 2r^2(3\alpha+a)}{3\alpha^2 + 2a\alpha + \lambda} \quad (3.8)$$

$$\text{sign}\left(\frac{dr^2}{d\alpha}\right) = -\text{sign}(3\alpha^2 + 2a\alpha + \lambda)$$

Следовательно, непрерывная дуга экстремали (3.5), составляющая полуцикл поперечного контура, является согласно (3.8) кусочно-монотонной функцией в области допустимых значений  $\alpha$  и  $r^2$ .

Согласно (3.5) и (3.7), экстремаль может иметь нулевую производную лишь при выполнении неравенства

$$2r^3 + ar^2 - 1 \leq 0 \quad (3.9)$$

из которого следует, что  $r \leq \alpha_1 < 2^{-1/3}$ , где  $\alpha_1$  — единственный положительный корень уравнения

$$2\alpha^3 + a\alpha^2 - 1 = 0 \quad (3.10)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (2.4) для  $\varphi_1$ , определяющим относительную толщину оптимального конического продольного контура, если в коэффициент  $a$  (3.2) вместо  $k_i$  подставить  $\gamma_i$ .

Полученное ограничение на  $r$  (3.9) является весьма сильным. Действительно, пусть радиус кругового поперечного контура  $r_k$ , соответствующий заданному параметру  $k_f$  (3.1) ( $r_k = k_f$ ), больше  $\alpha_1$ , что отвечает в случае конического продольного контура согласно (3.3)  $\tau > 2\alpha_1(E/A)^{1/2}$ . При этом дуга экстремали (3.5) может иметь как свободные концы, так и расположенные на окружностях заданного радиуса. Во втором случае, если, например, задан минимальный радиус  $r_0$  оптимального поперечного контура  $r(\theta)$ , то при  $r_0 \rightarrow r_k$ , по меньшей мере, предельным решением должна являться дуга окружности  $r(\theta) = r_k$ , что не согласуется с неравенством (3.9).

Для устранения указанного противоречия переформулируем задачу с учетом сделанного выше вывода, что оптимальный поперечный контур состоит из  $n$  симметричных циклов.

Расширим класс допустимых дуг экстремали внутри полуцикла  $\theta \in [0, \pi/n]$ , введя дифференциальное неравенство  $\dot{r} \geq 0$ , равносильное уравнению

$$\dot{r} - \beta^2 = 0 \quad (3.11)$$

где  $\beta$  — функция переменной  $\theta$ . Тогда минимизируемый функционал примет вид

$$I = \int_0^{\pi/n} F(r, \dot{r}, \lambda, \beta, \lambda_1) d\theta \quad (3.12)$$

$$F = F_0 + \lambda_1(\dot{r} - \beta^2)$$

где  $\lambda_1$  — неопределенный переменный множитель Лагранжа.

В соответствии со структурой основной функции  $F$  (3.12) и (3.11) будет иметь место второе уравнение Эйлера  $\lambda_1 \beta = 0$ , имеющее два решения:  $\lambda_1 = 0$  и  $\beta = 0$ .

Первому из них будет отвечать интеграл первого уравнения Эйлера, совпадающий с (3.4), (3.5), который назовем регулярной дугой экстремали, второму — согласно (3.11)  $\dot{r}=0$  — дуга нулевого наклона. Вдоль дуги нулевого наклона, где  $r=r_c=\text{const}$ , первое уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d\lambda_1}{d\theta} = F_r = 4r_c^3 + 3ar_c^2 + 2\lambda r_c + 1 \quad (3.13)$$

Условие Лежандра вдоль регулярной дуги экстремали сохранит форму (3.7), а вдоль дуги нулевого наклона примет вид  $\lambda_1 \leq 0$ .

В точке сопряжения дуг экстремали должно выполняться условие Вейерштрасса — Эрдмана, а на концах отрезка  $[0, \pi/n]$  — условие трансверсальности

$$\Delta \left[ F - \dot{r} \frac{\partial F}{\partial \dot{r}} \right] \delta\theta + \Delta \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{r}} \right] \delta r = 0 \quad (3.14)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{r}} \delta r \right]_0^{\pi/n} = 0$$

Существование регулярной дуги и дуги нулевого наклона или их обеих в составе экстремали будет зависеть от характеристик среды, скорости движения тела, изопериметрического условия (3.1), которое можно переписать в форме

$$\frac{\pi}{n} k_f^2 = \int_0^{\pi/n} r^2 d\theta \quad (3.15)$$

а также от условий, накладываемых на концы экстремали и формы продольного контура.

Проанализируем свойства регулярных дуг экстремали. На фиг. 1–3 качественно изображены поля интегральных кривых  $r^2(\alpha)$  (3.5) для значений  $\lambda > 0$ ,  $\lambda_k < \lambda < 0$  и  $\lambda < \lambda_k$  соответственно, где  $\lambda_k = -(3\alpha_1^2 + 2a\alpha_1) < 0$ . Допустимые ветви интегральных кривых лежат над кривыми  $OA$  и  $AC$ , пересекающимися в точке  $A$  с координатами  $(\alpha_1, \alpha_1^2)$ . Кривая  $OAD$  — парабола отвечает равенству  $r = \alpha$  (3.5), кривая  $AC$  — равенству в условии Лежандра (3.7). Интегральные кривые (3.5) для различных значений  $c_2$  имеют согласно (3.8) нулевой наклон в точках пересечения с кривой  $AC$ . Вертикальная асимптота  $\alpha = \alpha_k$  на фиг. 2, 3 отвечает нулю знаменателя в выражении (3.5):  $3\alpha_k^2 + 2a\alpha_k + \lambda = 0$ .

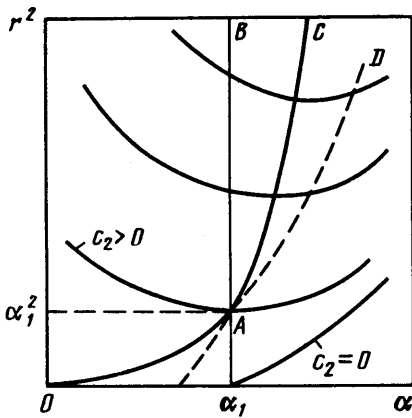
Отметим качественное свойство регулярных дуг экстремали. Продифференцировав выражение для  $\alpha$  (3.5), найдем

$$\frac{d\alpha}{dr} = k_p \quad (3.16)$$

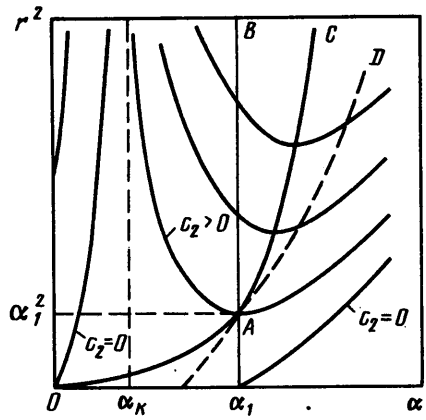
где  $k_p$  — кривизна регулярной дуги. Отсюда следует, что если вдоль интегральной кривой  $d\alpha/dr > 0$ , то регулярная дуга экстремали выпуклая, а в случае  $d\alpha/dr < 0$  — вогнутая. Если же  $d\alpha/dr = 0$ , что возможно лишь при  $\alpha = \alpha_k$  и  $c_2 = -\alpha_k(2\alpha_k^2 + a\alpha_k^2 - 1)$ , то регулярная дуга является отрезком прямой.

*Лемма 1.* Экстремаль полуцикла поперечного контура не может состоять из двух регулярных дуг и дуги нулевого наклона между ними, если максимальный радиус  $r_l$  поперечного контура не задан.

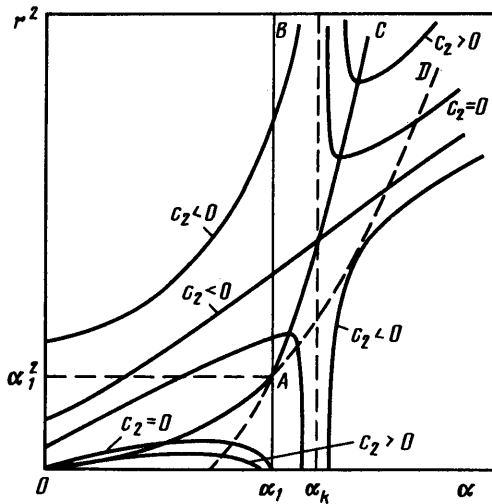
Предположим, что экстремаль указанного типа может существовать. Тогда в свободных точках сопряжения дуг экстремали должно выполняться условие Вейерштрасса



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

са – Эрмана (3.14), приводящее к соотношениям

$$c_2 = (r_c^3 + ar_c^2 + 1)r_c + \lambda r_c^2 \quad (3.17)$$

$$c_2 = \alpha_c^2(3r_c^2 - 2\alpha_c^2) + \alpha\alpha_c(2r_c^2 - \alpha_c^2) + \alpha_c + \lambda r_c^2$$

$$\lambda_{1c} = -\frac{1}{r_c}(2\alpha_c^3 + \alpha\alpha_c^2 - 1)\sqrt{r_c^2 - \alpha_c^2} \quad (3.18)$$

Равенство (3.18) справедливо в обеих точках сопряжения. Согласно условию Вейерштрасса – Эрмана, постоянная  $c_2$  одинакова для всех дуг экстремали, и, следовательно, точка  $(r_c, r_c^2)$ , отвечающая дуге нулевого наклона в плоскости переменных  $\alpha$  и  $r^2$  (Фиг. 1–3), лежит на пересечении параболы  $OAD$  ( $r^2 = \alpha^2$ ) с интегральной кривой (3.5). Последняя же, как было сказано выше, при любом значении  $c_2$  кусочно-монотонна в области допустимых значений (3.7) и поэтому пересекается с прямой  $r^2 = r_c^2$  только в одной точке  $(\alpha_c, r_c^2)$ . Значит  $\lambda_1$  имеет равные значения  $\lambda_{1c}$  (3.18) на концах дуги нулевого наклона. Согласно уравнению (3.13) это может иметь место лишь в случае, если  $d\lambda_1/d\theta = 0$ , что приводит совместно с (3.17) к следующим значениям постоянных  $\lambda$  и  $c_2$ :

$$\lambda = \lambda'(r_c) \equiv -(4r_c^3 + 3ar_c^2 + 1)/(2r_c) \quad (3.19)$$

$$c_2 = c_2'(r_c) \equiv -r_c(2r_c^3 + ar_c^2 - 1)/2 \quad (3.20)$$

Вычисляя наклон интегральной кривой (3.8) в точке  $(r_c, r_c^2)$  при значении  $\lambda = \lambda'(r_c)$ , найдем, что  $dr^2/d\alpha = 2r_c$ . Это означает, что в поле интегральных кривых, отвечающем  $\lambda = \lambda' < 0$ , кривая с  $c_2 = c_2'$  (3.20) касается параболы  $OAD$  в точке  $(r_c, r_c^2)$ . Согласно фиг. 1–3 подобная ситуация может иметь место лишь при  $\lambda < \lambda_k$  (фиг. 3). Причем в соответствии с уравнениями (3.17) либо  $r_c = \alpha_c < \alpha_1 (c_2' > 0)$ , либо  $r_c > \alpha_k > \alpha_c > \alpha_1 (c_2' < 0)$ . В обоих случаях  $\lambda_{1c} \leq 0$ , что удовлетворяет условию Лежандра вдоль дуги нулевого наклона.

В первом случае интегральная кривая имеет одну общую точку с областью допустимых значений переменных  $\alpha$  и  $r^2$  (3.7): на границе  $OA$ . Следовательно, экстремаль будет состоять лишь из дуги окружности с радиусом  $r_c < \alpha_1$ , что входит в противоречие со сделанным предположением.

Для рассмотрения второго случая привлечем условие трансверсальности (3.14), согласно которому, если радиусы  $r(0) = r_i$  и  $r(\pi/n) = r_f (r_i < r_c < r_f)$  регулярных дуг экстремали не заданы, в точках  $\theta = 0$  и  $\pi/n$  должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial r} \equiv \frac{1}{r} (2\alpha^3 + \alpha\alpha^2 - 1) \sqrt{r^2 - \alpha^2} = 0 \quad (3.24)$$

Условие (3.24) требует, чтобы ветвь интегральной кривой, отвечающая случаю  $c_2' < 0$  и проходящая через точку  $(\alpha_c, r_c^2)$ , начиналась и заканчивалась на прямой  $\alpha = \alpha_1$  (3.10), что невозможно (фиг. 3).

Если во втором случае минимальный радиус  $r_i < r_c$  поперечного контура задан, то условие (3.24) должно выполняться только в точке  $\theta = \pi/n$ , а регулярная дуга экстремали при  $r > r_c$  приходится на прямую  $\alpha = \alpha_1$ , что также невозможно. Лемма доказана.

*Следствие 1.* Если параметр изопериметрического условия (3.1)  $k_f < \alpha_1$  и на концах экстремали не накладываются дополнительные условия, то оптимальным поперечным контуром является окружность с радиусом  $k_f$ .

Действительно, если на концах экстремали в полуцикле поперечного контура не накладываются дополнительные условия, согласно лемме 1 решением вариационной задачи может быть лишь вырожденный вариант структуры экстремали, положенной в формулировку леммы, — дуга окружности без сопрягающихся с ней по краям регулярных дуг. Причем соответствующие окружности имеют радиус  $r_c < \alpha_1$ . Но каждому  $r_c$  соответствует, согласно (3.1), значение параметра  $k_f = r_c < \alpha_1$ .

*Следствие 2.* Если экстремаль внутри полуцикла поперечного контура содержит дугу нулевого наклона, то в ее составе не может быть других дуг нулевого наклона.

Действительно, если экстремаль содержит внутреннюю дугу нулевого наклона, то, согласно лемме 1, соответствующая ей интегральная кривая или одна из ее ветвей имеет лишь одну общую точку с параболой  $OAD$  — точку касания.

*Следствие 3.* Если максимальный радиус  $r_f$  поперечного контура задан, то экстремаль может содержать дугу нулевого наклона внутри полуцикла поперечного контура.

Действительно, при  $\lambda = \lambda' < \lambda_k$  и  $r_f > r_c > \alpha_k > \alpha_c > \alpha_1$  (фиг. 3) указанная структура экстремали может существовать. При этом все необходимые условия экстремума выполнены.

*Лемма 2.* Экстремаль полуцикла поперечного контура не может содержать наряду с регулярной дугой дугу нулевого наклона с радиусом  $r_f > \alpha_1$ , либо  $r_i > \alpha_1$ , если  $r_f$  или  $r_i$  не заданы.

Для доказательства леммы не будем использовать необходимые условия экстремума, выписанные выше и доставляемые слабыми вариациями оптимального контура.

Чтобы убедиться, что контур, имеющий структуру, указанную в формулировке леммы 2, не является оптимальным, рассмотрим приращение функционала  $k_D$  (3.2) с учетом изопериметрического условия (3.15) и неравенства  $\dot{r} \geq 0$  на сильных вариациях  $\delta r$  в случае  $r_f > \alpha_1$ .

Выберем слева и справа от угловой точки  $\theta_c$  — точки сопряжения дуги нулевого наклона  $r_f$  и регулярной дуги, имеющей согласно уравнениям (3.17) значение параметра  $\alpha$  в этой точке  $\alpha_c < \alpha_c < r_f$ , бесконечно малые интервалы  $\Delta\theta_1$  и  $\Delta\theta_2$ . В точке  $\theta_c + \Delta\theta_1$  введем излом контура, перейдя от дуги нулевого наклона на интервале  $\Delta\theta_1$  к контуру, имеющему значение параметра  $\alpha = \alpha_c$ , что согласно (3.5) соответствует вариации  $\delta \dot{r} = r_f \sqrt{r_f^2 - \alpha_c^2} / \alpha_c$ . При этом радиус в точке излома  $\theta_c$  станет равным  $r_{f1} = r_f (1 - \sqrt{r_f^2 - \alpha_c^2} \Delta\theta_1 / \alpha_c) + O[(\Delta\theta_1)^2]$ . Непрерывную вариацию контура в окрестности точки излома завершим введением дуги нулевого наклона  $r_{f1}$  на интервале  $\Delta\theta_2$ . Описанная деформация контура приводит к уменьшению интеграла (3.15) на величину  $r_f^2 \sqrt{r_f^2 - \alpha_c^2} \varepsilon^2 / \alpha_c + O(\varepsilon^3)$ , если принять  $\Delta\theta_1 = \varepsilon$ .

Указанное уменьшение интеграла (3.15) компенсируем деформацией дуги нулевого наклона  $r_f$  на малом интервале  $\Delta\theta_3$  в окрестности точки  $\theta = \pi/n$ . В точке  $\theta = \pi/n - \Delta\theta_3$  введем излом контура, а на интервале  $\Delta\theta_3$  — дугу со значением параметра



ра  $\alpha = \alpha_1$ , что соответствует вариации  $\delta r = r_f \sqrt{r_f^2 - \alpha_1^2} / \alpha_1$ . При этом радиус в точке  $\theta = \pi/n$  станет равным  $r_{f3} = r_f (1 + \sqrt{r_f^2 - \alpha_1^2} \Delta\theta_3 / \alpha_1) + O[(\Delta\theta_3)^2]$ . Для выполнения изопериметрического условия (3.15) необходимо, чтобы

$$\Delta\theta_3 = \left( \frac{2\alpha_1 \sqrt{r_f^2 - \alpha_1^2}}{\alpha_c \sqrt{r_f^2 - \alpha_1^2}} \right)^{1/2} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Опуская выкладки, приведем выражение для приращения  $k_D$  (3.2)

$$\Delta k_D = - \frac{n}{\pi} \left[ r_f^2 \left( \frac{r_f^3 + a r_f^2 + 1}{r_f} - \frac{\alpha_1^3 + a \alpha_1^2 + 1}{\alpha_1} \right) \Delta\theta_3 + O(\varepsilon^2) \right]$$

Нетрудно установить, используя (3.10), что функция  $(\alpha^3 + a\alpha^2 + 1)/\alpha$  имеет единственный минимум при  $\alpha > 0$  в точке  $\alpha = \alpha_1$  и, следовательно, при  $\alpha > \alpha_1$  является возрастающей. Отсюда следует, что при  $r_f > \alpha_1$  приращение функционала сопротивления на выбранных допустимых вариациях контура  $\Delta k_D < 0$ , и значит соответствующий начальный контур не является оптимальным.

Аналогично доказывается неоптимальность контура, содержащего дугу нулевого наклона с радиусом  $r_i > \alpha_1$ , который не задан. Лемма доказана.

*Теорема.* При  $k_j \geq \alpha_1$  в случае отсутствия дополнительных условий на экстремаль поперечного контура на отрезке  $[0, \pi/n]$  она может состоять либо из дуги окружности радиуса  $\alpha_1$ , либо из регулярной дуги  $\alpha = \alpha_1$ , либо из них обеих, причем существование каждой из указанных структур экстремали определяется изопериметрическим условием.

С учетом лемм 1 и 2 будем искать экстремаль, состоящую из дуги нулевого наклона с радиусом  $r_i \leq \alpha_1$  на отрезке  $[0, \theta_c]$  и регулярной дуги на отрезке  $[\theta_c, \pi/n]$ .

Согласно условию теоремы  $k_j \geq \alpha_1$ , поэтому в соответствии с изопериметрическим условием (3.15)  $r_f = r(\pi/n) \geq \alpha_1$ . Тогда из условия трансверсальности (3.21) в точке  $\theta = \pi/n$  найдем:  $\alpha = \alpha_1$ . В точке сопряжения дуг должны выполняться условия (3.17), (3.18) ( $r_c = r_i$ ), к которым в соответствии с условием трансверсальности (3.14) в точке  $\theta = 0$ , имеющем вид  $\lambda_1 = 0$ , и дифференциальным уравнением (3.13) следует присоединить выражение

$$\lambda_{1c} = (4r_i^3 + 3ar_i^2 + 2\lambda r_i + 1)\theta_c \quad (3.22)$$

Предположим, что  $\lambda_{1c} < 0$ . Тогда согласно (3.17), (3.18) и (3.22) должны выполняться неравенства

$$r_i > \alpha_c > \alpha_1 \quad (3.23)$$

$$\lambda < \lambda'(r_i), \quad c_2 < c_2'(r_i) < 0$$

Так как интегральные кривые, отвечающие регулярной дуге, в соответствии с  $\alpha(\pi/n) = \alpha_1$  должны оканчиваться на прямой  $\alpha = \alpha_1$ , где  $r_f \geq r_i$ , нетрудно заметить (см. фиг. 1-3), что таковых, удовлетворяющих совокупности условий (3.23), не существует.

Пусть  $\lambda_{1c} = 0$ . Тогда по условию (3.18) либо  $r_i = \alpha_c$ , либо  $\alpha_c = \alpha_1$ . Согласно первой возможности интегральная кривая должна начинаться на параболе  $OA$  и заканчиваться по  $\alpha(\pi/n) = \alpha_1$  на прямой  $AB$ . Однако, как следует из фиг. 1-3, таких интегральных кривых не существует. Согласно второй возможности интегральная кривая должна начинаться на прямой  $AB$  и на ней же в соответствии с  $\alpha(\pi/n) = \alpha_1$  заканчиваться. Среди изображенных на фиг. 1-3 интегральных кривых такие отсутствуют. Указанная ситуация может реализоваться лишь в случае, когда интегральная кривая совпадает с прямой  $\alpha = \alpha_1$ , что будет иметь место при  $\lambda = \lambda_k$  и  $c_2 = 0$ . Из этих условий в соответствии с (3.17) и (3.22) следует, что  $r_i = \alpha_1$ .

Таким образом, доказано, что при  $k_j \geq \alpha_1$  экстремаль может состоять из дуги нулевого наклона  $r_i = \alpha_1$  и регулярной дуги  $\alpha = \alpha_1$  при  $r \geq r_i$ . Назовем поперечный контур, построенный из таких дуг экстремали, абсолютно оптимальным. Согласно (3.16) регулярная дуга  $\alpha = \alpha_1$  является отрезком прямой, описываемой уравнением

$$r = \frac{\alpha_1}{\cos(\theta + \gamma)}, \quad R(\theta) = \frac{\alpha_1}{k_j \cos(\theta + \gamma)} \quad (3.24)$$

Из (3.24) следует, что регулярная дуга  $r(\theta)$  касается окружности с радиусом  $\alpha_1$  в точке  $\theta = -\gamma$ . И, если  $\gamma = -\theta_c$ , где  $0 < \theta_c < \pi/n$ , то дуга нулевого

наклона  $r_i = \alpha_1$  без разрыва производной сопрягается с регулярной дугой (3.24).

С использованием изопериметрического условия (3.15) и (3.24) найдем

$$(k_j/\alpha_1)^2 = (n/\pi) [\theta_c + \operatorname{tg}(\pi/n - \theta_c)] \geq 1 \quad (3.25)$$

Согласно (3.25) экстремалью будет дуга окружности  $r = \alpha_1$  ( $\theta_c = \pi/n$ ), если  $k_j/\alpha_1 = 1$ , и комбинация дуги нулевого наклона и регулярной дуги, если

$$(k_j/\alpha_1)^2 < (n/\pi) \operatorname{tg}(\pi/n) \quad (3.26)$$

Если же

$$(k_j/\alpha_1)^2 \geq (n/\pi) \operatorname{tg}(\pi/n) \quad (3.27)$$

экстремаль будет состоять только из регулярной дуги (3.24), где  $\gamma$  — угол между нормалью к прямой, являющейся продолжением регулярной дуги и осью полярной системы координат, определится из соотношения

$$(k_j/\alpha_1)^2 = (n/\pi) [\operatorname{tg}(\pi/n + \gamma) - \operatorname{tg} \gamma] \quad (3.28)$$

Таким образом, конфигурация абсолютно оптимального поперечного контура определяется величиной одного параметра  $k_j/\alpha_1$ , содержащего характеристики среды, скорость движения и форму продольного контура. Теорема доказана.

*Следствие 1.* Сопrotивление тела, имеющего абсолютно оптимальный поперечный контур, не зависит от числа циклов  $n$ .

Подставив полученное решение в (3.2), найдем

$$c_D = 2\pi k_f^2 (2 - \alpha_1^3) (k_s^4/k_i)^{1/2} / (\alpha_1 S_M) + C + c_g \quad (3.29)$$

*Следствие 2.* Сопrotивление тела, имеющего конический продольный контур и абсолютно оптимальный поперечный контур, не зависит от относительной толщины тела.

Полагая продольный контур коническим с относительной толщиной  $\tau$ , которая может быть как свободна, так и задана, с использованием выражений для  $k_i$  (1.5) и  $k_f$  (3.3), из (3.29) найдем

$$c_D = (AE^2)^{1/2} (2 - \alpha_1^3) / \alpha_1 + C + c_g \quad (3.30)$$

Заметим, что  $\alpha_1$  в этом случае в соответствии с (3.3) и (3.9) зависит лишь от параметров среды и скорости движения тела. Соотношения (2.4) удовлетворяются тождественно, и между относительной толщиной  $\tau$  и формой абсолютно оптимального поперечного контура устанавливается взаимно однозначное соответствие согласно соотношению (3.25) либо (3.28). Полученный здесь результат указывает, что имеется бесчисленное множество абсолютно оптимальных тел в классе поверхностей с подобными по оси  $x$  поперечными сечениями, имеющих сопротивление, определяемое по формуле (3.30), конический продольный и абсолютно оптимальный поперечный контур.

**4. Оптимальный поперечный контур при заданном минимальном радиусе.** Из полученного выше решения для абсолютно оптимального контура следует, что при возрастании  $k_j/\alpha_1$  (см. (3.28))  $\pi/n + \gamma \rightarrow \pi/2$  и, значит, отношение максимального и минимального радиусов поперечного контура согласно (3.24) может стать сколь угодно большим, а  $\bar{R}(0)$  малым. Такая конфигурация поперечного контура может не представлять практического интереса. Поэтому в случаях, когда  $k_j/\alpha_1 > 1$ , представляет интерес поиск оптимального поперечного контура с ограничениями на концах экстремали. В частности, одним из таковых является задание минимального радиуса  $r_i$  экстремали на отрезке  $[0, \pi/n]$ . Заметим, что наложение дополнительных условий сужает множество допустимых экстремалей и, следо-

вательно, сопротивление таких тел будет больше сопротивления абсолютно оптимального тела, определяемого выражением (3.30).

Проведем качественный анализ решения для оптимального поперечного контура, когда задан его минимальный радиус  $r_i$ .

Рассмотрим случай, когда экстремаль будет состоять из дуги нулевого наклона  $r_i$  на отрезке  $[0, \theta_c]$  и регулярной дуги на отрезке  $[\theta_c, \pi/n]$ . Согласно лемме 1 дополнительная дуга нулевого наклона на интервале  $(\theta_c, \pi/n)$  существовать не может.

В точке сопряжения дуг должны выполняться условия (3.17) при  $r_c=r_i$ , а в точке  $\theta=\pi/n$  должно выполняться условие трансверсальности (3.21), согласно которому  $\alpha_j=r_j$  или  $\alpha_j=\alpha_1$ .

Из (3.17) нетрудно найти, что либо  $\alpha_c=r_i$ , либо  $r_i>\alpha_c>\alpha_1$ . Первому случаю отвечают интегральные кривые, начинающиеся на параболе  $OA$  при  $\lambda\leq\lambda_k$  (фиг. 3) и заканчивающиеся на ней ( $\lambda<\lambda_k$ ), либо  $\alpha=\alpha_c=r_i=\alpha_1$  ( $\lambda=\lambda_k$ , см. теорему). При  $\lambda<\lambda_k$  будет выполняться первое из условий, следующие из условия трансверсальности,  $\alpha_j=r_j$ . Однако такой случай не представляет особого интереса, так как при этом  $k_j<\alpha_1$  и абсолютно оптимальным поперечным контуром в соответствии со следствием 1 леммы 1 является окружность. Второму случаю, с учетом того, что  $r_i<r_j$ , могут удовлетворять лишь интегральные кривые при  $\lambda>\lambda_k$  и  $c_2>0$  (см. фиг. 1, 2). Значит, в точке  $\theta=\pi/n$  будет выполняться условие  $\alpha_j=\alpha_1$ . Из (3.17) определяется  $\alpha_c$ , зависящее только от  $r_i$  и  $a$ . С использованием (3.5) и (3.15) получим

$$\frac{\pi}{n} = \theta_c + \int_{\alpha_c}^{\alpha_1} \frac{Q}{r^2} d\alpha, \quad Q = \frac{\alpha}{2\sqrt{r^2 - \alpha^2}} \frac{dr^2}{d\alpha} \quad (4.1)$$

$$K^2 = \frac{\pi}{n} \left( \theta_c + \frac{1}{r_i^2} \int_{\alpha_c}^{\alpha_1} Q d\alpha \right)^{-1} \quad (4.2)$$

В (4.2)  $K$  — параметр формы поперечного контура, определяемый выражением

$$K = r_i/k_j = R(0) \leq 1 \quad (4.3)$$

При заданных  $r_i$  (или  $K$ ) и  $n$ , определяя из (3.17), (4.1), (4.2) постоянные  $c_2$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha_c$  и  $\theta_c$ , находим единственную интегральную кривую, соответствующую регулярной дуге экстремали, имеющей согласно (3.16) и фиг. 1, 2 вогнутую форму.

С учетом того, что для рассматриваемой структуры экстремали  $r_i \geq \alpha_1$ , и с использованием (4.3) можно найти условие, накладывающееся на определяющие параметры, для ее реализации

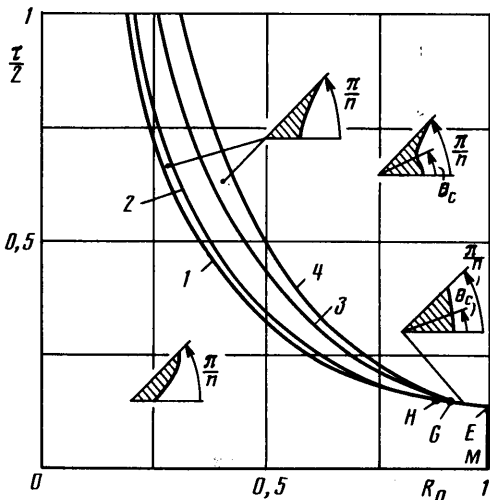
$$\alpha_i/k_j \leq K \leq 1 \quad (4.4)$$

При  $\theta_c=0$ , когда составная экстремаль вырождается в регулярную дугу, уравнениями (3.17), (4.1), (4.2) накладывается связь на определяющие параметры. Переход от одной структуры экстремали к другой может быть конкретизирован с использованием соотношений (3.26), (3.27).

При выполнении неравенства (3.26), если  $K$ , уменьшаясь, становится равным  $\alpha_i/k_j$  (см. (4.4)), то реализуется случай абсолютно оптимального поперечного контура, состоящего из дуги нулевого наклона и регулярной дуги — отрезка прямой. При выполнении неравенства (3.27) и  $K=K_n = \alpha_i/(k_j \cos \gamma) < 1$ , где  $K_n$  определено в соответствии со вторым соотношением (3.24), также реализуется случай абсолютно оптимальной экстремали — отрезка прямой.

Если же определяющие параметры задачи таковы, что удовлетворяются неравенства (3.26) и  $K < \alpha_1/k_1$ , либо — неравенства (3.27) и  $K < K_n$ ,

то экстремаль является выпуклой и принадлежит полю интегральных кривых, изображенных на фиг. 3 слева от прямой  $\alpha = \alpha_1$ .



Фиг. 4

чение полуцикла тела заштриховано). В точках  $H$  и  $G$  соответственно для  $n=4$  и  $6$  начинаются пары кривых  $1, 2$  и  $3, 4$ , из которых кривые  $1, 3$  отвечают абсолютно оптимальному контуру, состоящему из отрезков прямых, и разделяют области с выпуклым (слева) и вогнутым (справа) поперечными контурами, а кривые  $2, 4$  — переходу от экстремали, состоящей из вогнутой регулярной дуги (слева от кривых  $2$  и  $4$ ), к экстремали, состоящей из дуги нулевого наклона и вогнутой регулярной дуги (справа от кривых  $2$  и  $4$ ).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миеле А., Друге Г., Пригчард Р. и др. Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. 507 с.
2. Бунимович А. И. Соотношения между силами, действующими на тела, движущиеся в разреженном газе, в потоке света и в гиперзвуковом ньютоновском потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 4. С. 89–95.
3. Бунимович А. И., Якунина Г. Е. О форме пространственных тел минимального сопротивления, движущихся в пластически сжимаемой и упругопластической средах // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1987. № 3. С. 105–107.
4. Размагулин Х. А., Сагомонян А. Я., Алексеев Н. А. Вопросы динамики грунтов. М.: Изд-во МГУ. 1964. 239 с.
5. Сагомонян А. Я. Пробивание плиты тонким твердым снарядом // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1975. № 5. С. 104–111.
6. Витман Ф. Ф., Степанов В. А. Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара  $10^2 \div 10^3$  м/с // Некоторые проблемы прочности твердого тела. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 207–221.
7. Остапенко Н. А. Тела минимального волнового сопротивления в закрученном гиперзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 1. С. 107–117.

Москва

Поступила в редакцию  
15.IV.1991