

УДК 532.546.013.3

© 1992 г.

А. Н. КРАЙКО, Ш. САЛОМОВ

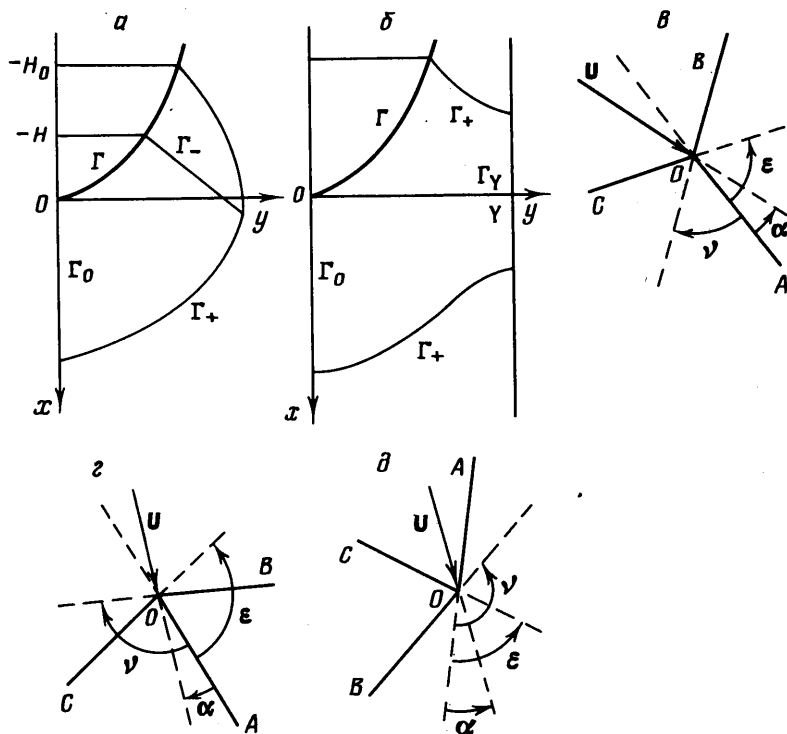
РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ В НЕНАСЫЩЕННЫЙ ПОРИСТЫЙ ГРУНТ В РАМКАХ МОДЕЛИ МГНОВЕННОГО НАСЫЩЕНИЯ

Решаются плоские задачи нестационарной фильтрации тяжелой жидкости в однородный ненасыщенный пористый грунт из одиночной выемки и из бесконечной периодической системы идентичных выемок. Уровень жидкости в выемке — известная функция времени t , что имитирует распространение жидкости по борозде, нормальной плоскости задачи. Фильтрация в грунт, занимающий пространство вне (в основном — ниже) выемки, осуществляется под действием силы тяжести и начинается в момент $t=0$ после ее мгновенного заполнения жидкостью. При $0 < t < t_1$ высота жидкости в выемке постоянна, а при $t=t_1$ мгновенно снижается до некоторого также постоянного уровня. Последний может быть и нулевым, совпадая с нижней точкой выемки. Рассматривается также задача, в которой уровень жидкости в выемке повышается.

Решение проводится в рамках «модели мгновенного насыщения» (ММН) [1, 2], согласно которой реальный процесс постепенного проникания жидкости в капиллярные поры, т. е. намокание грунта, заменяется мгновенным заполнением таких пор жидкостью и связыванием попавшей в них жидкости с пористой средой. При этом переходные области непрерывного изменения влажности [3], разделяющие зоны полностью смоченного и сухого грунтов, заменяются подвижными поверхностями разрыва — «передними» и «задними» фронтами насыщения или намокания. Скорость переднего фронта из-за связывания части жидкости пористой средой оказывается меньше скорости жидкости, подходящей к нему «сзади». Задний фронт возникает в грунте при $t=t_1$ и движется со скоростью «несвязанной» жидкости. В ММН эта жидкость занимает n -ю часть порового пространства, где n считается известной константой ($0 < n \leq 1$). Задний фронт разделяет зоны полного и частичного насыщения. В зоне полного насыщения жидкость занимает все поровое пространство, а в зоне частичного насыщения остается лишь «связанная» жидкость, занимающая его $(1-n)$ -ю часть. В рамках ММН решение рассматриваемых задач сводится к решению в зонах полного насыщения (для каждого t) уравнения Лапласа и по найденным в результате этого распределениям скорости жидкости на подвижных фронтах — расчету их эволюции. В созданном численном алгоритме решение уравнения Лапласа получается «методом граничных элементов» — МГЭ [4].

1. Направим ось x декартовых координат x, y, z вертикально вниз по силе тяжести, характеризуемой ускорением свободного падения g , а ось y — вправо, как показано на фиг. 1, а и б. Кроме того, оси x и z совместим с плоскостью симметрии борозды (или одной из идентичных борозд их бесконечной периодической последовательности), направленной по оси z , перпендикулярной плоскости исследуемого течения. Сечение борозды плоскостью x, y образует выемку, симметричную относительно оси x . Начало координат $x=y=0$ совместим с нижней точкой выемки. Течение по борозде в данной работе имитируется заданием при $z=\text{const}$ уровня жидкости в выемке: $x=-H(t)$. При $t < 0$ жидкость и в выемке и в грунте отсутствует, т. е. $H(t)=0$. В момент $t=0$ уровень жидкости изменяется скачком до некоторой конечной величины, принимаемой далее, если не оговорено особо, за линейный масштаб задачи L . В силу этого $H_0=H(+0)=1$.

Пространство вне выемки (или борозды) занято однородным пористым грунтом, в число физических характеристик которого наряду с уже упо-



Фиг. 1

минавшимися коэффициентом n входит коэффициент пористости $m < 1$, равный отношению объема порового пространства. В типичных ситуациях изменение параметров жидкости, в частности ее скорости U и давления p , в исходной пространственной задаче вдоль оси z много меньше, чем по x и y . Это позволяет в уравнениях, описывающих фильтрацию жидкости в пористом грунте, пренебречь производными по z и свести определение p , u и v , где u и v — x - и y -компоненты U , к решению плоской задачи.

Пусть далее $\rho = \text{const}$ — истинная плотность жидкости, а p отсчитывается от его уровня на свободной поверхности жидкости: $x = -H(t)$. То же значение $p = 0$ будет (при пренебрежении капиллярным скачком давления) на переднем фронте — Γ_+ и на заднем фронте — Γ_- . Решение задачи включает расчет эволюции во времени переднего фронта, а при $t > t_1$ — и заднего. Основные уравнения и условия ММН тождественны соответствующим уравнениям и условиям «одножидкостной» теории фильтрации насыщенных грунтов [3]. Изменяется, как уже отмечалось, лишь связь скорости D переднего фронта, которая в каждой точке фронта отсчитывается по внешней нормали N к Γ_+ , с нормальной к Γ_+ проекцией скорости $u_N = NU$. Согласно [1, 2], для переднего фронта

$$\partial N / \partial t = D = nu_N = nNU \quad (1.1)$$

в то время как задний фронт движется со скоростью жидкости, т. е. здесь $D = u_N$. В (1.1) N — координата Γ_+ , отсчитываемая по нормали N .

Прежде чем выписать прочие уравнения и условия задачи, напомним, что, согласно ММН [1, 2], в зонах частичного насыщения фрагменты жидкости, заполняющие глухие и капиллярные поры и располагающиеся на смачиваемых элементах

скелета грунта, предполагаются покоящимися. В зонах полного насыщения жидкость (связанная и несвязанная) заполняет все поровое пространство, однако движется в таких зонах только несвязанная жидкость, а связанная, как и в зонах частичного насыщения, покоится. Масса жидкости, приходящаяся на единицу объема грунта, в зонах частичного насыщения равна $(1-n)m\rho$, а в зонах полного насыщения — $m\rho$. В «зонах сухого грунта» жидкость, естественно, отсутствует полностью.

Движение несвязанной жидкости в зонах полного насыщения при постоянных m и n , что далее предполагается (грунт однородный), описывается уравнениями неразрывности и движения

$$\nabla U = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (UV)U = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla(gx) + mnf \quad (1.3)$$

В (1.3) f — сила, действующая на несвязанную жидкость со стороны грунта и связанной жидкости. Благодаря множителю mn перед f последняя имеет смысл силы, действующей на единицу массы несвязанной жидкости. При малых и умеренных скоростях для f хорошо работает закон Дарси [3], согласно которому

$$f = -gU/k \quad (1.4)$$

с коэффициентом фильтрации k . Благодаря множителю g этот коэффициент, определяемый физическими свойствами жидкости и грунта, имеет размерность скорости. Пренебрегая в (1.3), как и в теории фильтрации насыщенных грунтов, малым для типичных ситуаций ускорением жидкости и подставив (1.4) в (1.3), после обезразмеривания переменных придем к уравнению

$$\kappa \nabla \varphi - U = 0 \quad (\varphi = p - x, \kappa = k/(mn\sqrt{gL})) \quad (1.5)$$

Здесь и далее все переменные — безразмерные с L , $\sqrt{L/g}$, $\sqrt{gL}$, ρ и ρgL в качестве масштабов длины, времени, скорости, плотности и давления. Уравнения (1.1) и (1.2) при обезразмеривании не изменяются. Для типичных грунтов и $L = 0,1-0,3$ м безразмерный параметр $\kappa \ll 1$.

Подстановка U из (1.5) в (1.2) дает для определения φ уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = 0 \quad (1.6)$$

В силу симметрии задачи относительно плоскости xz , а в случае периодической системы борозд — плоскостей $y = lY$, где $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а Y — заданная константа (отнесенное к L расстояние между нижней точкой борозды и вершиной «грядки»), решение уравнения (1.6) достаточно строить в задаче с одиночной выемкой (фиг. 1, а) лишь при $y \geq 0$, а в задаче с системой идентичных выемок (фиг. 1, б) — в полосе $0 \leq y \leq Y$. При этом на плоскостях симметрии в зоне полного намокания, т. е. при $y = 0$ и $y = Y$, выполняется условие непротекания $v = 0$, или согласно (1.5)

$$\partial \varphi / \partial y = 0, \quad y = 0, Y \quad (1.7)$$

Пренебрежем движением жидкости в выемке. Тогда давление на «смооченном» отрезке Γ ее дна $x = -X(y)$, $0 \geq x \geq -H(t) \geq -1$, определяется уравнениями гидростатики и поэтому с учетом ориентации оси x равно $p = H - X$. Соответственно этому здесь же

$$\varphi = H, \quad x = -X(y), \quad 0 \geq x \geq -H \quad (1.8)$$

с известной функцией $X(y)$, определяющей форму выемки.

На фронтах намокания Γ_+ и Γ_- , где, как уже отмечалось, $p=0$, имеем

$$\varphi = -x, \quad (x, y) \in \Gamma_+, \Gamma_- \quad (1.9)$$

Условия (1.7)–(1.9) на границе зоны полного насыщения формулируют смешанную задачу для уравнения Лапласа (1.6). Решив эту задачу для данного момента времени, можно определить $\varphi = \varphi(x, y, t)$ во всей зоне полного насыщения, включая неподвижные и подвижные участки ее границ, а также и $U = \kappa \nabla \varphi$. При этом зависимость φ и U от времени оказывается параметрической, реализуясь через зависимость от t формы зоны полного насыщения и функции $H(t)$. Введя далее «масштабированное» время $\tau = n\kappa t$, перепишем уравнения движения фронтов насыщения в виде

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial N}, \quad (x, y) \in \Gamma_+; \quad \frac{\partial N}{\partial \tau} = n^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial N}, \quad (x, y) \in \Gamma_- \quad (1.10)$$

Согласно (1.6)–(1.10), если $H(t) = \text{const} = 1$ и как следствие этого отсутствует задний фронт, на эволюцию формы зоны полного насыщения во времени τ не влияют безразмерные параметры m , n и κ , характеризующие фильтрационные свойства пористого грунта. В этом случае наряду с $\varphi = \varphi(x, y, \tau)$ не зависят от m , n и κ и поля «масштабированной» скорости $U^0 = U/\kappa = \nabla \varphi$.

2. В рассматриваемой идеализированной постановке жидкость мгновенно заполняет выемку до уровня $x = -H(0) = -1$ и начинается ее фильтрация в грунт. При этом в начальный момент нормальная к границе выемки Γ скорость жидкости бесконечна [1, 2], а уравнение, определяющее продвижение Γ_+ в грунте, как нетрудно показать, в каждой точке Γ тождественно соответствующему уравнению для фронта насыщения одномерной задачи теории фильтрации. Пусть координата N_+ движущегося переднего фронта Γ_+ отсчитывается от Γ по нормали N к ней, а над границей грунта в указанной точке расположен слой жидкости высоты $h = N - X$, где, в согласии со сказанным ранее, $x = X(y)$ — уравнение образующей выемки. Тогда $N_+ = N_+(s, t)$ с координатой s , отсчитываемой вдоль Γ , определяется уравнением [1, 2]

$$\partial \chi / \partial \tau = 2(h + \sqrt{\chi}) \quad (\chi = N_+^2) \quad (2.1)$$

Так как при получении этого уравнения не учитывалась двумерность течения в пористом грунте, т. е. перетекание жидкости в направлении, касательном к Γ , что, строго говоря, верно лишь при $t=0$, то оно используется лишь на достаточно малом начальном интервале $0 < \tau \leq \tau_* \ll 1$.

В результате интегрирования (2.1), которое до $\tau = \tau_*$ проводилось методом Рунге — Кутты, получается начальная зона полного насыщения, позволяющая при $\tau > \tau_*$ решать задачу (1.6)–(1.10) с помощью МГЭ. В МГЭ не делается упрощающих предположений о локальной одномерности течения. Благодаря этому варьирование τ_* позволяет в процессе вычислений «экспериментально» находить диапазон значений τ_* , в котором изменение указанной величины практически не влияет на решение задачи в целом.

Не вникая в детали применения МГЭ к решению рассматриваемой задачи, напомним лишь основные моменты этого метода. Численный алгоритм настоящей работы основывался на непрямом МГЭ, суть которого состоит в следующем [4]. Решение уравнения Лапласа (1.6) в любой момент времени τ , т. е. $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, \tau)$, где $\mathbf{r}$ означает пару переменных x и y , ищется в форме

$$\varphi(\mathbf{r}, \tau) = \int_s G(\mathbf{r}, \xi) f(\xi) ds(\xi) + C \quad (2.2)$$

Здесь интеграл берется вдоль границы зоны полного насыщения $S=S(\tau)$; ds — длина ее элемента; ξ аналогично r означает пару координат точки границы; $G(r, \xi)$ — известная «двухточечная» функция, $f(\xi)$ и C — подлежащие определению «интенсивность источников» и константа. Граница S состоит из Γ , отрезка Γ_0 оси x , принадлежащего зоне полного насыщения (а в задаче о системе борозд с некоторого момента τ_2 , в который зона полного насыщения, распространяясь вправо, достигает прямой $y=Y$, — отрезка Γ_Y этой прямой), а также дуги Γ_+ переднего фронта и дуги Γ_- возникающего при $\tau=\tau_1$ заднего фронта. Уравнение (2.2) и его следствие, получающееся дифференцированием φ из (2.2) по нормали к S , справедливы, в частности, и на S . Это дает два уравнения

$$\begin{aligned}\varphi(r_b, \tau) &= \int_S G(r_b, \xi) f(\xi) ds(\xi) + C \\ \frac{\partial \varphi}{\partial N} &\equiv u_N^*(r_b, \tau) = \int_S^* F(r_b, \xi) f(\xi) ds(\xi)\end{aligned}\quad (2.3)$$

в которых r_b — координаты произвольной точки S , а $F(r_b, \xi)$, как и G , — известная двухточечная функция, сингулярная при $r_b=\xi$. В силу последнего обстоятельства интеграл во втором уравнении (2.3) несобственный, что и отмечено «звездочкой». В МГЭ граница S «дискретизируется», т. е. разбивается на M малых, но конечных отрезков. Интегралы по таким отрезкам заменяются после этого суммами, содержащими дискретный набор значений функции $f=f^q$ с $q=1, \dots, M$ в центрах указанных отрезков. Затем уравнения, полученные таким образом из первого уравнения (2.3), записываются в тех точках S , где в силу (1.8) или (1.9) известно φ , т. е. на Γ , Γ_+ и Γ_- . Аналогично уравнения, получающиеся из второго уравнения (2.3), записываются в точках отрезков Γ_0 и Γ_Y , в которых, согласно (1.7), $\partial\varphi/\partial N \equiv \partial\varphi/\partial y = 0$. Число получившихся в итоге уравнений равно M , т. е. числу подлежащих определению значений функции f^q . В эту систему, линейную относительно f^q , наряду с f^q входит, однако, также неизвестная константа C . Дополнительное уравнение, также линейное относительно f^q и, разумеется, этой константы, получается дискретизацией «условия излучения» [4]

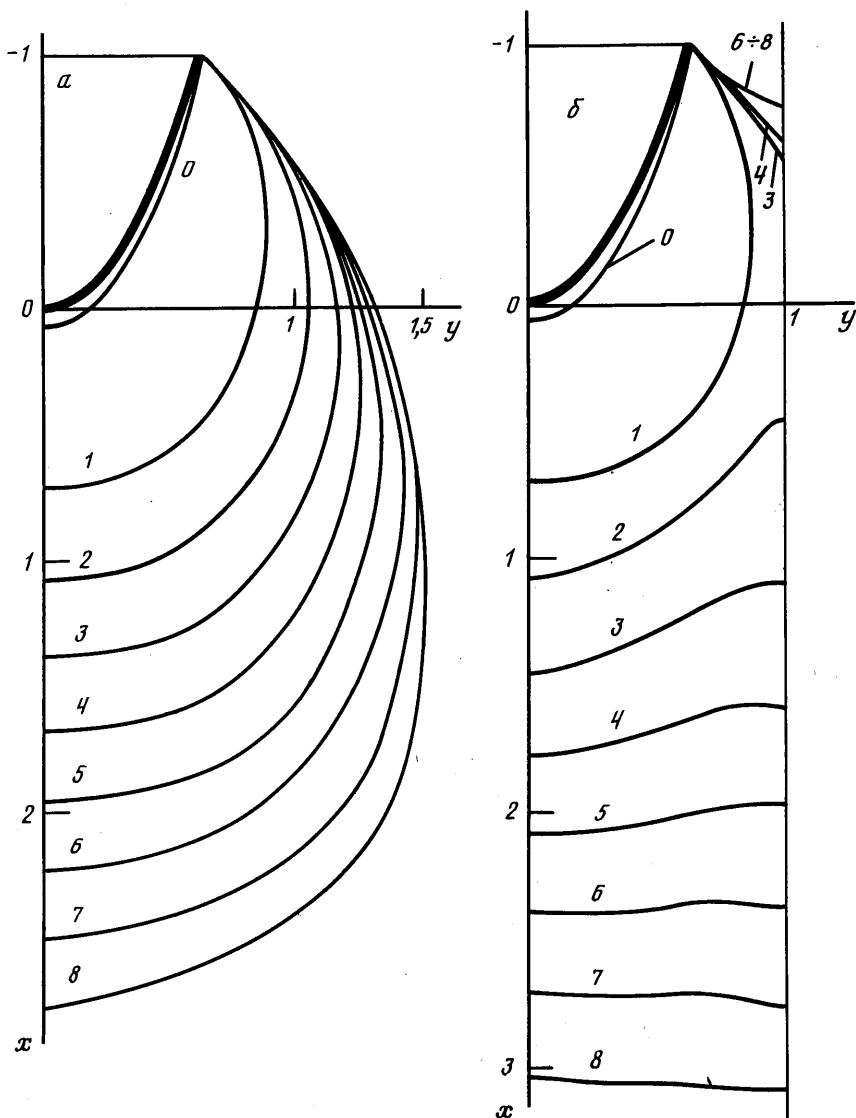
$$\int_S f(\xi) ds(\xi) = 0 \quad (2.4)$$

Не вдаваясь в дополнительные подробности перехода от (2.3) и (2.4) к линейной системе для $(M+1)$ -го неизвестного f^q и C и входящих в них в качестве коэффициентов значений функций G и F , отметим лишь, что при этом специальные приемы используются при рассмотрении изломов границы S . После определения f^q и C интегральные представления (2.3) позволяют найти $\partial\varphi/\partial N$ в соответствующих точках фронтов насыщения, а затем по (1.10), взяв достаточно малое приращение времени Δt , рассчитать смещение переднего, а при $\tau > \tau_1$ и заднего фронтов. Затем описанная численная процедура повторяется уже для новой зоны полного насыщения и ее границ.

3. Созданный в процессе выполнения данной работы численный алгоритм, реализованный на ФОРТРАНе, был опробован на многочисленных примерах решения в рамках ММН плоских задач нестационарной фильтрации жидкости из одиночной выемки и из периодической последовательности симметричных выемок. При проведении расчетов варьировались число отрезков M дискретизации границы S и значения τ_* и Δt , которые выбирались такими, чтобы дальнейшее увеличение M и уменьшение τ_* и Δt не вносило заметных корректив в графическое представление результатов. Часть полученных результатов приведена на фиг. 2–4. На них в плоскости xu наряду с границей выемки $x=-2.5 y^2$ и уровнями жидкости (горизонтальные отрезки) показаны фронты насыщения в разные моменты времени τ .

Фильтрация при постоянном уровне жидкости $H=1$ для $\tau > 0$ из одиночной выемки отвечает фиг. 2, а, а из системы выемок с расстоянием между соседними выемками $2Y=2$ — фиг. 2, б. В этих случаях не образуется задних фронтов и поэтому, как уже отмечалось, переход от t к τ ведет к «полному подобию» результатов в смысле независимости конфигурации зон полного насыщения и полей масштабированной скорости U^0 в них от m , n и x . Между цифрами у кривых Γ_+ и значениями τ на фиг. 2 имеет место такое соответствие (в скобках — значения τ): 0 (0,002), 1 (0,25), 2 (0,37), 3 (0,75), 4 (1,00), 5 (1,25), 6 (1,50), 7 (1,75) и 8 (2,00).

Фиг. 3 отвечает одиночной выемке, в которой при $0 < \tau \leq \tau_1 = 0,25$ уровень жидкости постоянен ($H=1$), а в момент $\tau=\tau_1$ мгновенно снижается либо до $H=0,1$ (фиг. 3, а), либо до $H=0$ (фиг. 3, б). В задачах с задним фронтом насыщения подо-



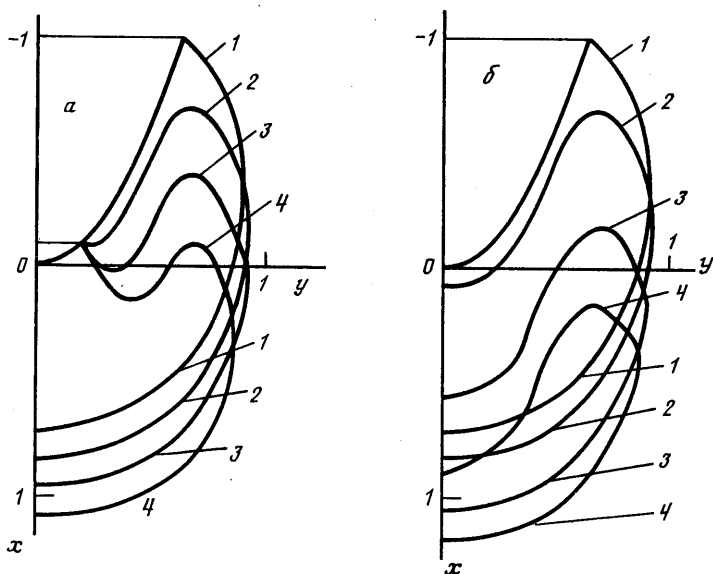
Фиг. 2

бие (в смысле независимости решения в масштабированных переменных от m, n и k) оказывается неполным прежде всего из-за того, что в уравнение движения заднего фронта из (1.10) входит n . В представленных на фиг. 3 результатах $n=0,5$. Кроме того, если исходный закон изменения уровня жидкости задан в форме $H=H(\tau)$, то при переходе к τ в нем в явном виде появится зависимость от x . В примерах фиг. 3 такая зависимость отсутствует, поскольку H задавалась как функция τ . Соответствие цифр около кривых Γ_+ и Γ_- , представляющих передний и задний фронты насыщения и τ , на фиг. 3, а такое: 1 (0,25), 2 (0,36), 3 (0,48) и 4 (0,63), а на фиг. 3, б: 1 (0,25), 2 (0,36), 3 (0,58) и 4 (0,73).

Фигура 4 в противоположность предыдущей соответствует подъему жидкости в выемке. Здесь уровень жидкости сначала (при $\tau=0$) скачком поднялся до $H_0=0,1$, до $\tau=0,25$ оставался постоянным, а затем при $\tau>0,25$ рос по закону

$$H(\tau)=0,1+\sin^2[0,45(\tau-0,25)]$$

В данном случае за линейный масштаб L было взято не размерное значение H_0 , а та же величина, что в примерах фиг. 2 и 3. Поэтому теперь $H_0 \neq 1$, а $H(\tau)$ достигает



Фиг. 3

начального уровня указанных примеров лишь при $\tau \approx 3$. Соответствие значений τ и цифр около кривых — передних фронтов на фиг. 4 — от 0 до 8 то же, что на фиг. 2. Номерам 9 и 10 отвечают $\tau = 2,5$ и 3.

Как уже отмечалось, один из способов контроля точности вычислений состоял в сравнении результатов, полученных при разных M , т. е. при увеличении числа отрезков разбиения границы. В приведенных примерах удвоение M (с 36 до 72) не вело к заметным (в масштабе фиг. 2–4) изменениям результатов. Дополнительную информацию о точности расчетов дает проверка интегрального закона сохранения массы жидкости. В общем случае переменных m и n имеем

$$-\int_0^t dt \int_{\Gamma} \rho m n U N ds = \iint_{\omega_+} \rho m d\omega + \iint_{\omega_-} \rho m (1-n) d\omega \quad (3.1)$$

где ω_+ и ω_- — соответственно площади зон полного насыщения и зон частичного насыщения. Данное равенство имеет очевидный смысл: количество жидкости, которое за время t втекло в грунт через смачиваемую границу выемки Γ , записанное в левой части равенства (знак минус учитывает направление внешней нормали N), равно количеству связанной и несвязанной жидкостей в пористом грунте. После перехода к τ и U° (3.1) для постоянных m и n принимает вид

$$-\int_0^\tau d\tau \int_{\Gamma} n U^\circ N ds = \omega_+ + (1-n)\omega_- \quad (3.2)$$

Отсюда, используя (1.10), нетрудно получить уравнение неразрывности (1.6) в дифференциальной форме.

В выполненных расчетах определялась относительная погрешность вычислений δ , равная модулю разности обеих частей (3.2), отнесенному к левой части этого равенства. Величина δ с ростом τ сначала растет, достигая при $M=36$ в разных задачах максимума $\delta_m = 0,07-0,13$ при $\tau = 0,2-0,3$. При больших τ наблюдается быстрое падение δ до долей процента при $\tau = 2-3$. При этом переход к $M=72$ уменьшает δ_m примерно вдвое. Расчет на ЭВМ ЕС-1061 до таких времен требует 15–35'.

4. В задачах «многократного полива» выемка наполняется жидкостью не один раз, и вследствие этого фронты насыщения могут пересекать возникшие при предыдущих поливах границы раздела зон частично насы-

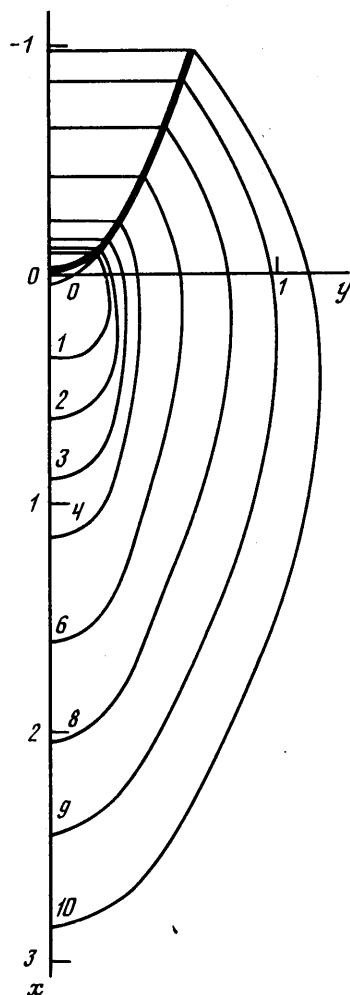
щенного и сухого грунтов. В точках такого пересечения фронт насыщения претерпевает излом, как показано на фиг. 1, *в* и *г*, где *OA* — граница, над (под) которой расположен сухой грунт (зона частичного насыщения), а *OB* и *OC* — соответствующие отрезки движущегося сверху вниз переднего фронта насыщения. Там же показаны вектор скорости *U* несвязанной жидкости, подходящей к переднему фронту со стороны зоны полного насыщения, и углы α , ϵ и ν , которые вектор *U* и отрезки *OB* и *OC* образуют в точке *O* с *OA*. Учтя знаки этих углов, определенные так, как показывают стрелки на соответствующих дужках, различие скоростей *D* движения переднего фронта над и под *OA* и то, что *O* — точка пересечения движущихся участков фронтов с фиксированной границей раздела *OA*, придем к равенству

$$1 - \operatorname{ctg} \epsilon \operatorname{tg} \alpha = \\ = n(1 - \operatorname{ctg} \nu \operatorname{tg} \alpha) \quad (4.1)$$

связывающему при заданном $n < 1$ углы α , ϵ и ν . При выводе (4.1) предполагалось отсутствие особенностей *U* в точке *O*, т. е. зависимости *U* от полярного угла. В этом случае из (4.1) следует, в частности, что при $n < 1$ угол $\alpha \neq 0$. Более того, согласно (4.1), при ϵ и $|\nu|$, не превышающих $\pi/2$ (фиг. 1, *в*), α положительно, а при ϵ и $|\nu|$, больших $\pi/2$ (фиг. 1, *г*), — отрицательно. Напомним, что $n=1$ отвечает несмачиваемому грунту, в котором граница *OA* не может возникнуть.

Казалось бы, иная ситуация возникает в примерах фиг. 3, где после снижения уровня жидкости в выемке передний и задний фронты пересекаются не на заранее известной границе раздела сухого и частичного насыщенного грунтов, а на границе, совпадающей с траекторией движения их точки пересечения (фиг. 1, *д*). Хотя на фиг. 3 эта граница не нарисована, ее нетрудно представить как огибающую фронтов насыщения. Несмотря на очевидное различие случаев фиг. 1, *в*, *г* и 1, *д*, формула (4.1) оказывается справедливой и для последней ситуации, если углы α , ϵ и ν отсчитывать от продолжения границы раздела *OA*. На фиг. 1, *д* сухой (частично насыщенный) грунт расположен справа (слева) от *OA*, *OB* — передний, а *OC* — задний фронт. В этом случае из (4.1), в частности, следует, что α обязательно должно быть больше нуля.

В заключение авторы благодарят В. А. Вострецову за помощь в работе.



Фиг. 4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крайко А. Н., Мазмудов А. А.* О моделировании нестационарной фильтрации тяжелой жидкости: Препринт № 168–88. Новосибирск: Ин-т теплофиз. СО АН СССР, 1988. 30 с.
2. *Крайко А. Н., Мазмудов А. А.* Решение двумерной нестационарной задачи фильтрации жидкости в пористый грунт в рамках модели мгновенного насыщения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 103–110.
3. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
4. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.

Москва
Бухара

Поступила в редакцию
5.XII.1990