

УДК 532.546

© 1992 г.

Р. Ф. ГАНИЕВ, С. А. ПЕТРОВ, Л. Е. УКРАИНСКИЙ

**О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ЭФФЕКТАХ
В НАСЫЩЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

Работа посвящена исследованию некоторых одномерных нелинейных эффектов, проявляющихся при распространении волны в слабопроницаемых насыщенных жидкостью пористых средах. Оценивается влияние нелинейности на затухание моногармонических волн, а также устанавливаются особенности нелинейного параметрического взаимодействия двух волн, возбуждаемых в среде двумя моногармоническими источниками различных частот.

Эти эффекты подробно изучены для однокомпонентных сред [1]. Вопросы, связанные с распространением нелинейных волн в многофазных средах, обстоятельно рассматривались для некоторых сред, например газопарожидкостных [2]. Распространение волн в пористых насыщенных жидкостью средах в основном изучалось в линейной постановке [3-5]. В последнее время предлагается ряд новых технологических процессов, основанных на эффектах, сопровождающих распространение волн большой амплитуды по насыщенным жидкостью пористым средам. С ростом амплитуд этих волн возрастает роль нелинейных эффектов, которые до настоящего времени, насколько это известно авторам, применительно к насыщенным жидкостью пористым средам не изучены. Полученные результаты могут быть использованы при разработке некоторых новых технологических процессов обработки нефтяных пластов.

1. Вывод уравнения Бюргера. Рассмотрим одномерное движение насыщенной жидкостью пористой среды, которое описывается системой уравнений [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial m\rho}{\partial t} + \frac{\partial m\rho u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial (1-m)R}{\partial t} + \frac{\partial (1-m)Rw}{\partial x} &= 0 \\ m\rho \frac{du}{dt} + R(1-m) \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'}{\partial x}, & \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \\ m\rho[1+\alpha(1-m)] \frac{du}{dt} - m\alpha\rho(1-m) \frac{dw}{dt} &= -m \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu m}{k}(u-w) \\ \sigma' &= (1-m)(\lambda_f + 2\mu_f)E + \nu_f p, & \frac{\rho}{\rho_0} &= 1 + \beta_1(p - p_0) \\ \frac{R}{R_0} &= 1 + \beta_2[p - p_0 - (\lambda_f + 2\mu_f)E] \end{aligned} \tag{1.1}$$

где m — пористость среды; ρ , R — плотности жидкости и скелета среды; u , w — скорости жидкости и скелета среды; α — коэффициент присоединенной массы; σ' — фиктивное напряжение среды; k — проницаемость; λ_f — модуль объемной упругости скелета; μ — динамическая вязкость жидкости; E — деформация скелета; p — давление жидкости; μ_f — модуль сдвига скелета; $\nu_f = \lambda_f \beta_2$; β_1 , β_2 — сжимаемости жидкости и материала пористой среды соответственно.

Все параметры, соответствующие невозмущенному состоянию среды, здесь и далее указаны с индексом ноль.

Представим все искомые функции, входящие в систему уравнений (1.1), в виде $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, где Φ — любая из искоемых функций системы (1.1), Φ_1 — относительные возмущения стационарного состояния искоемых функций.

Введем новые безразмерные переменные по формулам

$$t = \omega^{-1}\tau, \quad x = \lambda\omega^{-1}x', \quad m_1 = m_0 m', \quad p_1 = p_0 p' \\ u_1 = \lambda u', \quad w_1 = \lambda w', \quad R_1 = R_0 R'$$

где λ — масштаб скорости, который будет определен ниже, ω — характерная круговая частота распространяющейся по среде волны. Далее для простоты штрихи с безразмерных переменных снимем.

После простых подстановок перепишем (1.1) в новых переменных

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (\beta_1 p_0 p + m) + \frac{\partial u}{\partial x} &= f_1 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \left[R - \frac{m_0}{(1-m_0)} m \right] + \frac{\partial w}{\partial x} &= f_2 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} [\beta_2 p_0 p - R] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta_2}{\lambda_f + 2\mu_f} w \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{m_0 \rho_0}{R_0 (1-m_0)} u + w \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p_0 (m_0 - \nu_f)}{\lambda^2 R_0 (1-m_0)} p + \frac{1}{\lambda^2 R_0 \beta_2} R \right] &= f_3 \\ u - w = \varepsilon \left\{ [1 + \alpha(1-m_0)] \frac{\partial u}{\partial \tau} - \alpha(1-m_0) \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{p_0}{\lambda^2 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + f_4 \right\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где f_i — нелинейные члены уравнений, $\varepsilon = \rho_0 k \omega / \mu$ — безразмерный параметр. Ограничимся случаем $\varepsilon \ll 1$. Далее будем рассматривать лишь такие движения, для которых разность скоростей пористого скелета w и жидкости u является малой величиной порядка ε .

Применим к системе (1.2) метод медленно меняющегося профиля [7]. Введем новые переменные $\xi = \tau - x$, $\eta = \varepsilon x$.

Предполагая относительные возмущения малыми, представим искомые функции в виде ряда по малому параметру ε

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots; \quad w = \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \dots \\ m &= \varepsilon m^{(1)} + \varepsilon^2 m^{(2)} + \dots; \quad R = \varepsilon R^{(1)} + \varepsilon^2 R^{(2)} + \dots \\ p &= \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подставим разложения (1.3) в систему (1.2) и приравняем к нулю все слагаемые при одинаковых степенях ε . После простых преобразований для первых двух приближений полученные уравнения могут быть представлены следующим образом:

$$A \frac{\partial}{\partial \xi} U^{(1)} = 0 \quad (1.4)$$

$$A \frac{\partial}{\partial \xi} U^{(2)} = D(U^{(1)}) \quad (1.5)$$

где $U^{(i)}$ — четырехмерный вектор-столбец искоемых функций $u^{(i)}$, $m^{(i)}$, $R^{(i)}$, $p^{(i)}$; A — числовая матрица коэффициентов, зависящих от параметров сре-

ды и масштаба λ ; D — нелинейный дифференциальный оператор. Явный вид A и D не будем приводить из-за громоздкости.

Масштаб λ определим как собственное значение оператора A . При этом несложно показать, что λ совпадает со скоростью распространения бесконечно малых возмущений по насыщенной жидкостью пористой среде при отсутствии относительного движения фаз. Явное выражение для λ имеет следующий вид:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\lambda_f + 2\mu_f}{\rho_c} + \frac{\theta_f \kappa}{\rho_c \beta}} \quad (1.6)$$

$$\rho_c = (1 - m_0)R_0 + m_0\rho_0; \quad \theta_f = 1 - \nu_f; \quad \kappa = 1 - \beta_2(\lambda_f + 2\mu_f)$$

$$\beta = (1 - m_0)\beta_2 + m_0\beta_1$$

В формуле (1.6) первое слагаемое под знаком радикала обусловлено сжимаемостью скелета пористой среды, второе — сжимаемостью жидкости.

Условие разрешимости неоднородной системы (1.5) при λ , удовлетворяющему (1.6), имеет следующий вид:

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \eta} - \lambda \rho_0 B p^{(1)} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\lambda}{\rho_0} C \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (1.7)$$

$$B = \frac{B_1}{a_1 A}; \quad C = \frac{C_1}{A}$$

$$B_1 = a_2(R_0 - \rho_0) - m_0 a_1 - (1 - m_0)a_3 + \frac{2\theta_f}{\lambda \rho_0 \beta} \left(\frac{\rho_0 a_2}{\lambda} + \frac{m_0 a_4}{\lambda} - a_2 a_4 \right) +$$

$$+ \frac{2\theta_f}{\lambda \beta R_0} \left[a_2 a_3 + \frac{(1 - m_0)}{\lambda} a_3 - \frac{R_0 a_2}{\lambda} \right] + \frac{m_0 \rho_0}{\lambda}$$

$$C_1 = (1 - m_0) \left(\rho_0 - \frac{a_1}{\lambda} \right) \left[\frac{\theta_f}{\lambda^2 \beta} + \frac{(\lambda_f + 2\mu_f) \left(1 - \frac{\beta_2 \theta_f}{\beta} \right)}{\lambda^2} - R_0 \right]$$

$$A = \frac{\kappa + \theta_f}{\lambda \beta} + \frac{(1 - m_0)(\lambda_f + 2\mu_f)}{\lambda} \left[2 - \frac{\theta_f \beta_2}{\beta} - \frac{\kappa \nu_f}{(\lambda_f + 2\mu_f) \beta} \right]$$

$$a_1 = \frac{\kappa}{\lambda \beta}; \quad a_2 = \frac{m_0}{\lambda} \left(1 - \frac{\kappa \beta_1}{\beta} \right); \quad a_3 = \frac{\beta_2 R_0}{\lambda} \left[\frac{\kappa}{\beta} + (\lambda_f + 2\mu_f) \right]$$

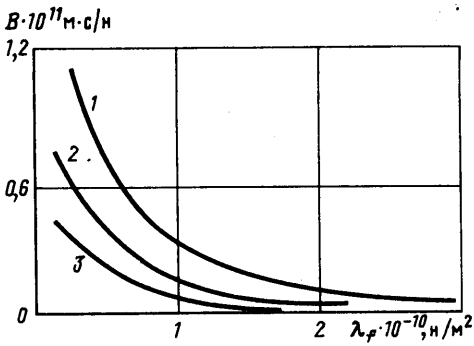
$$a_4 = \frac{\rho_0 \beta_1 \kappa}{\lambda \beta}; \quad a_5 = -\frac{1}{\lambda}; \quad a_6 = \frac{(1 - m_0)}{\lambda} \left[\frac{\kappa \nu_f}{\beta} - (\lambda_f + 2\mu_f) \right]$$

Уравнение (1.7) есть уравнение Бюргерса. Отметим, что в силу (1.4) аналогичному уравнению должны удовлетворять и другие неизвестные функции: $u^{(1)}$, $m^{(1)}$, $R^{(1)}$.

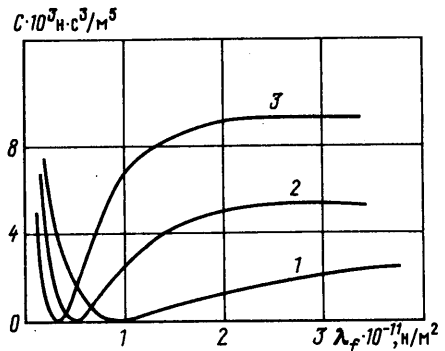
Используя разложения (1.3) и уравнение (1.7), с точностью до членов порядка ε^2 для возмущения давления p_1 получим уравнение Бюргерса, записанное в размерных координатах

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} - B p_1 - \frac{\partial p_1}{\partial \theta} - \frac{k}{\mu} C \frac{\partial^2 p_1}{\partial \theta^2} = 0, \quad \theta = t - \frac{x}{\lambda} \quad (1.8)$$

2. Зависимость коэффициентов уравнения Бюргерса от модуля объемного сжатия. Коэффициенты уравнения Бюргерса (1.8) для пористой среды существенно зависят от упругих коэффициентов. На фиг. 1, 2



Фиг. 1



Фиг. 2

приведены зависимости этих коэффициентов от модуля объемного сжатия λ_p при $\mu_f = 0,5 \lambda_p$ для различных значений пористости. Кривые 1–3 на рисунках рассчитаны для пористостей m_0 , равных 0,1; 0,2; 0,3 соответственно. Размерность коэффициентов соответствует системе СИ. Точка касания оси абсцисс кривой зависимости коэффициента диссипации от модуля сжатия соответствует так называемой точке «динамического равновесия» пористой среды.

В окрестности этой точки диссипация вследствие относительного движения жидкости в пористой среде мала, поэтому для таких сред необходимо учитывать другие механизмы диссипации. Среды, для которых λ_p меньше значения модуля сжатия в точке «динамического равновесия», будем называть «мягкими», а среды с λ_p большими значения модуля сжатия в этой точке, — «жесткими». Резкое убывание коэффициента при нелинейном члене показывает, что его влияние существенно для мягких сред, в то время как коэффициент диссипации имеет большие значения как в мягких, так и в жестких средах. Для реальных нефтяных пластов эти коэффициенты соответствуют жестким средам. Поэтому влияние нелинейности заметно только при распространении волн больших амплитуд.

Коэффициент нелинейности (фиг. 1) существенно зависит от пористости: чем меньше пористость, тем больше коэффициент. Зависимость коэффициента диссипации от модуля сжатия для различных пористостей (фиг. 2) в жестких и мягких средах различна. Жесткие среды характеризуются большей диссипацией при увеличении пористости, так как увеличение пористости вызывает возрастание амплитуды колебания жидкости относительно пористого скелета и, следовательно, увеличение относительного движения фаз. Наоборот, в мягких средах при увеличении пористости коэффициент диссипации уменьшается. В таких средах вследствие большой сжимаемости скелета пористой среды твердые частицы слабо связаны между собой.

Если пренебречь упругими свойствами пористой среды, то уравнения системы (1.1) будут описывать движение жидкости с твердыми включениями. В таких средах твердые включения влияют на затухание волны в жидкости. Чем больше концентрация твердых частиц в жидкости (а, следовательно, пористость среды становится меньше), тем выше диссипация.

3. Влияние нелинейности на распространение волны. Нелинейное параметрическое взаимодействие. Для того чтобы оценить влияние нелинейности на затухание волны основной частоты, запишем решение уравнения (1.8) в виде ряда по малому параметру при нелинейном члене. Ограничиваясь членами до третьего порядка малости включительно без

учета кратных гармоник, получим

$$p_1 = p_c \exp\left(-\frac{k}{\mu} C \omega^2 x\right) \sin(\omega \theta) + \frac{B^2 p_c^3 \mu^2}{16 C^2 \omega^2 k^2} \left[\exp\left(-3 \frac{k}{\mu} C \omega^2 x\right) + \right. \\ \left. + 0,5 \exp\left(-5 \frac{k}{\mu} C \omega^2 x\right) - 1,5 \exp\left(-\frac{k}{\mu} C \omega^2 x\right) \right] \sin(\omega \theta)$$

где p_c , ω — амплитуда давления в жидкости при $x=0$ и частота источника колебаний.

Рассмотрим случай, когда $q = kC\omega^2 x/\mu \ll 1$. Тогда с точностью до членов второго порядка по q

$$p_1 \approx p_c \exp\left[-\left(C\omega^2 + \frac{B^2 p_c^2 \mu^2}{4Ck^2}\right) \frac{k}{\mu} x\right] \sin(\omega \theta)$$

Из этого выражения видно, что влиянием нелинейности на затухание волны можно пренебречь при условии

$$p_c \ll \frac{2Ck}{B\mu} \omega \quad (3.1)$$

Чтобы рассмотреть вопрос о параметрическом взаимодействии, будем искать решение уравнения Бюргера в виде

$$p_1(x, \theta) = A_1(x, \theta) + A_2(x, \theta)$$

с граничными условиями при $x=0$

$$A_1(0, \theta) = p_n \sin(\omega_1 \theta), \quad A_2(0, \theta) = p_c \sin(\omega_2 \theta) \quad p_n \gg p_c, \quad \omega_2 \gg \omega_1$$

В этом случае для A_2 получим уравнение [1]

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} = B \frac{\partial(A_1 A_2)}{\partial \theta} + \frac{k}{\mu} C \frac{\partial^2 A_2}{\partial \theta^2}$$

где для A_1 используется известное решение Бесселя — Фубини до образования разрыва и решение Фей в области после образования разрыва.

Ищем решение в виде

$$A_2 = G_1(x) e^{i\omega_2 \theta} + G_2(x) e^{i(\omega_1 + \omega_2) \theta} + G_3(x) e^{i(\omega_1 - \omega_2) \theta} + \text{к. с.}$$

где к. с. — комплексно-сопряженные слагаемые.

С учетом условий $G_1(0) = p_c$, $G_2(0) = G_3(0) = 0$, методом вариации постоянной из укороченных уравнений для A_2 в области до образования разрыва нетрудно получить решение

$$A_2 = G_1 \sin(\omega_2 \theta) + [(G_1 - G_2)^2 + 4G_2 G_3 \cos^2(\omega_1 \theta)]^{0,5} \sin(\omega_2 \theta + \varphi) \quad G_1 = p_c e^{-\omega_2^2 x C h / \mu}$$

$$G_2 = \frac{B p_c p_n}{2} (\omega_1 + \omega_2) e^{-(\omega_1 + \omega_2)^2 x C h / \mu} \left[\int_0^x F(x) e^{(\omega_1 + 2\omega_2) C x h / \mu} dx \right]$$

$$G_3 = \frac{B p_c p_n}{2} (\omega_1 - \omega_2) e^{-(\omega_1 - \omega_2)^2 x C h / \mu} \left[\int_0^x F(x) e^{(\omega_1 - 2\omega_2) C x h / \mu} dx \right]$$

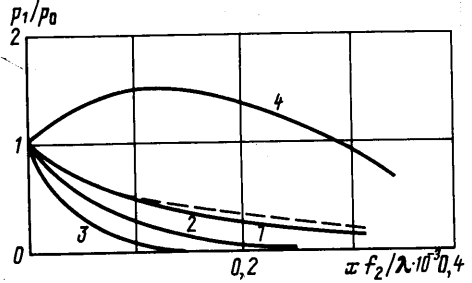
$$F(x) = \frac{2J_1(B\omega_1 x p_n)}{(B\omega_1 x p_n)}, \quad \varphi = \arctg \left[\frac{G_2 - G_3}{G_2 + G_3} \operatorname{tg}(\omega_1 \theta) \right]$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка.

Решение представляет собой волну с частотой ω_2 , совершающую пространственные биения амплитуды с частотой ω_1 . Максимальная амплитуда волны выразится формулой

$$A_2^{\max} = G_1 + G_2 + G_3 \quad (3.2)$$

В качестве примера на фиг. 3 представлены зависимости амплитуды высокочастотной волны от координаты для различных режимов возбуждения. Параметры пористой среды выбирались идентичными характерным параметрам нефтяного пласта в естественных условиях залегания районов Западной Сибири. Скелет пористой среды представляет собой крупнозернистый цементированный песчаник с проницаемостью $k=1$ дарси, пористостью $m_0=0,25$. Амплитуда высокочастотного источника колебаний принималась равной 1 атм, а низкочастотного — 10 атм. Параметр p_1 на графике представляет собой амплитуду давления при распространении волны от моногармонического источника и максимальную амплитуду давления высокочастотной волны при двухчастотном возбуждении. Частоты высокочастотной и низкочастотной волн равны $f_2 = \omega_2/2\pi = 25$ кГц и $f_1 = \omega_1/2\pi = 1$ кГц соответственно.



Фиг. 3

Штриховая кривая на фиг. 3 соответствует распространению высокочастотной волны без учета нелинейности. Кривые 1–3 описывают амплитуды высокочастотной волны от моногармонического источника сигнала с учетом нелинейности среды для амплитуд источника 1, 5, 8 атм соответственно, рассчитанные численно по уравнению Бюргерса (1.8). Кривая 4 отображает распределение модулированной по амплитуде высокочастотной волны, рассчитанной по формуле (3.2) при наличии параметрического взаимодействия с низкочастотной волной. Вид этой кривой показывает, что на достаточно больших расстояниях от источника колебаний амплитуда высокочастотной составляющей существенно превосходит амплитуду высокочастотной волны при моногармоническом режиме. Максимальное значение амплитуды волны, а также координата максимума зависят от частот и амплитуд источника колебаний. При уменьшении амплитуды низкочастотного источника колебаний максимум смещается к началу координат.

Как видно из характера кривых 1–3 на фиг. 3 для выбранных параметров пористой среды, влияние нелинейности при распространении волны от моногармонического источника несущественно при амплитудах источника, меньших 1 атм. Неучет нелинейности при больших амплитудах, согласно поведению кривых на графиках, может вызвать значительную ошибку при расчетах. Поэтому для оценки погрешности линейного решения удобно воспользоваться приближенной формулой (3.1), предварительно рассчитав коэффициенты нелинейности и диссипации для конкретных сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
2. Накоряков В. Е., Покусаяев Б. Г., Шрейбер И. Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
3. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solids // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. № 2. P. 179–191.
4. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 355 с.
5. Yu Shoumian, Yu Tian. Scattering of acoustic waves in an unbounded porous elastic medium // J. Acoust. Soc. Amer. 1990. V. 88. № 3. P. 1523–1529.
6. Нигматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
7. Бхагнагар П. Л. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983. 136 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.IV.1991