

УДК 532.517.4:013.4

© 1992 г.

Б. Л. СМОРОДИН

**КОНВЕКТИВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО
ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ СО СПИРАЛЬНОЙ
ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ**

В работе [1] предложена модель, описывающая генерацию крупномасштабных конвективных структур в турбулентных системах со спиральностью. Особенностью таких систем является то, что кроме однородности, изотропности и стационарности, предполагается отражательная неинвариантность турбулентности, в результате чего среднее произведение турбулентной скорости на завихренность отлично от нуля. Возникновение конвекции на фоне спиральной турбулентности в неподвижном слое с теплопроводными границами исследовалось в [1-3]. Показано, что рост спиральности приводит к увеличению горизонтального размера конвективных ячеек и уменьшению критического числа Рэлея. В настоящей работе исследована задача о конвективной устойчивости горизонтального вращающегося вокруг вертикальной оси слоя турбулентной жидкости при фиксированном теплотокке на границах в случае, когда интенсивность спирального фона не зависит от скорости вращения и степени подогрева.

1. Постановка задачи. Рассмотрим горизонтальный слой жидкости толщиной h , равномерно вращающийся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω . В случае малости центробежных сил по сравнению с гравитационными невозмущенное состояние во вращающейся системе характеризуется равенством нулю средней скорости и вертикальным градиентом температуры: $\nabla T_0 = -Ae$ (e — единичный вектор, направленный вверх).

Введем безразмерные переменные, выбрав в качестве масштабов расстояния, времени, скорости, температуры и давления h , h^2/ν , χ/h , Ah , $\rho_0\nu\chi/h^2$ соответственно (ν , χ — коэффициенты вязкости и температуропроводности). Используя результаты [1], запишем во вращающейся системе координат уравнения для безразмерных возмущений скорости v , давления p , температуры T :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p + \Delta v + RTe + RS_1[e \operatorname{div}(e \times v) + (e \nabla)(e \times v)] - Re(e \times v) \quad (1.1)$$

$$P \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + ve - S_2 \operatorname{div}(e \times v), \quad \operatorname{div} v = 0$$

$$R = \frac{g\beta Ah^4}{\nu\chi}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}, \quad Re = \frac{2\Omega h^2}{\nu}, \quad S_1 = \frac{\sigma_1 \chi}{h^3}, \quad S_2 = \frac{\sigma_2}{h}$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, β — коэффициент теплового расширения, σ_1 и σ_2 — параметры, характеризующие свойства спиральной турбулентности [1]. Система (1.1) содержит пять безразмерных параметров: R — число Рэлея; P — число Прандтля; Re — число Рейнольдса, определенное по скорости вращения; S_1 и S_2 — безразмерные коэффициенты спиральности.

Выберем систему координат так, чтобы ось z была направлена по вертикали, причем уравнения границ слоя $z=0$ и $z=1$. Используем нормальные возмущения $A=A(z)\exp[\lambda t+ikx]$, где $A=(v, T, p)$, λ — инкремент, а ось x направлена вдоль волнового вектора k . Перепишем систему (1.1) в терминах температуры T и вертикальных компонент скорости w и завихренности V

$$\begin{aligned}\lambda \Delta w &= \Delta^2 w - R k^2 i + R S_1 (V'' + k^2 V) - \text{Re } V' \\ \lambda V &= \Delta V - R S_1 w'' + \text{Re } w' \\ \lambda P T &= \Delta T + w + S_2 V\end{aligned}\quad (1.2)$$

$$V = (\text{rot } v)_z = \frac{\partial v y}{\partial x}, \quad \Delta = \frac{d^2}{dz^2} - k^2$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по z .

На нижней (твердой) границе выполняется условие прилипания, на верхней (свободной) границе нормальная компонента скорости и касательные компоненты тензора вязких напряжений обращаются в нуль. Поскольку турбулентный коэффициент теплопроводности многократно превышает молекулярный, возмущения теплотокма на обеих границах равны нулю [4]. Таким образом, имеем граничные условия

$$\begin{aligned}z=0: \quad w &= 0, \quad w' = 0, \quad V = 0, \quad T' = 0 \\ z=1: \quad w &= 0, \quad w'' = 0, \quad V' = 0, \quad T'' = 0\end{aligned}\quad (1.3)$$

Граница монотонной неустойчивости определяется решением краевой задачи (1.2) — (1.3) в случае $\lambda=0$; граница колебательной неустойчивости — в случае $\text{Im } \lambda \neq 0, \text{Real } \lambda = 0$. Нейтральные кривые $R(k)$ отыскивались численно, с помощью построения фундаментальной системы решений [5].

2. Случай нулевой спиральности ($S_1=0, S_2=0$). Задача Чандрасекара о возникновении конвекции во вращающемся слое с теплопроводными границами является классической (см. [4]). Попытка рассмотреть слой с теплоизолированными границами осуществлена в [6]. В этой работе в случае $\lambda=0$ краевая задача сформулирована для вертикальной компоненты скорости w . Амплитудное уравнение и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta^3 w + R k^2 w + \text{Re } w'' &= 0 \\ z=0: \quad w &= 0, \quad w' = 0, \quad w^V - 2k^2 w''' = 0 \\ z=1: \quad w &= 0, \quad w'' = 0 \quad w^V - 2k^2 w''' + k^4 w' - \text{Re } V'' = 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

В работе [6] в последнем условии для $z=1$ отсутствует слагаемое $\text{Re } V''$, что позволяет получить верный результат только при отсутствии моды ($\text{Re}=0$). При этом критическое число Рэлея для монотонной моды $R_k=320$, а критическое волновое число $k_k=0$; остальные результаты носят лишь качественный характер.

Используем точные граничные условия и рассмотрим поведение критических возмущений в зависимости от параметра вращения Re . Как и в задаче Чандрасекара, минимальное критическое число Рэлея R_{1c} растет с увеличением Re . Критическое волновое число при малых Re лежит в области длинных волн $k_k=0$. В случае $\text{Re} > \text{Re}_{1*} = 9$ горизонтальный размер конвективной ячейки становится конечным ($k_{1c} \neq 0$) и уменьшается с ростом параметра Re . При $\text{Re} > \text{Re}_{2*}$ наиболее опасны колебательные ячейчатые возмущения. Если $P=0,025, \text{Re}_{2*}=10,5$. Критические параметры ко-

Таблица 1

Re	R_{1C}	k_{1C}	R_{2C}	k_{2C}	ω
0	$3,20 \cdot 10^2$	0	—	—	—
10	$4,52 \cdot 10^2$	0,57	$4,59 \cdot 10^2$	1,12	$4,15 \cdot 10^{-1}$
10^2	$4,28 \cdot 10^3$	4,81	$1,34 \cdot 10^3$	2,15	$6,73 \cdot 10$
10^3	$7,99 \cdot 10^4$	11,73	$5,86 \cdot 10^3$	4,29	$5,61 \cdot 10^2$
10^4	$1,70 \cdot 10^6$	26,28	$6,32 \cdot 10^4$	8,93	$3,19 \cdot 10^3$
10^5	$3,74 \cdot 10^7$	58,00	$1,02 \cdot 10^6$	18,99	$1,57 \cdot 10^4$
10^6	$8,24 \cdot 10^8$	126,61	$1,87 \cdot 10^7$	40,60	$7,44 \cdot 10^4$
10^7	$1,80 \cdot 10^{10}$	276,70	$3,61 \cdot 10^8$	86,39	$3,52 \cdot 10^5$

Таблица 2

Ta	a_{1R}	a_{1k}	a_{2R}	a_{2k}
10^{12}	8,24	1,266	0,187	0,406
10^{14}	8,35	1,281	0,167	0,401
10^{15}	8,43	1,284	0,160	0,395
10^{24}	—	—	0,132	0,385
∞	8,7	1,305	0,126	0,378

лебательной моды — число Рэлея R_{2C} и волновое число k_{2C} — растут с увеличением Re.

Зависимости R_{1C} , k_{1C} , а также R_{2C} , k_{2C} и частоты нейтральных колебаний ω для $P=0,025$ от числа Рейнольдса представлены в табл. 1.

Асимптотические формулы для критических характеристик монотонной и колебательной неустойчивостей, как и в [4, 6], имеют вид

$$R_{1C}=a_{1R}Ta^{3/2}, R_{2C}=a_{2R}Ta^{3/2}, k_{1C}=a_{1k}Ta^{1/2}, k_{2C}=a_{2k}Ta^{1/2} \quad (2.2)$$

Здесь a_{1R} , a_{2R} , a_{1k} , a_{2k} — коэффициенты, $Ta=Re^2$ — число Тэйлора. Значения коэффициентов a_{1R} , a_{2R} , a_{1k} , a_{2k} при $P=0,025$ приведены в табл. 2.

В последней строке указаны значения коэффициентов, полученных аналитически для случая свободных теплопроводных границ [4]. В пределе $Ta \rightarrow \infty$ значения a_{1R} , a_{2R} , a_{1k} , a_{2k} приближаются к значениям для свободных границ. Независимость a_{1R} , a_{1k} от вида граничных условий отмечалась в [7], где этому факту дано простое объяснение: при быстром вращении влияние граничных условий сказывается лишь в тонких пограничных слоях. Этим же можно объяснить и то, что в [6] правильно получены показатели степеней в аналитических формулах (2.2); коэффициенты отличаются от приведенных выше.

Для слоя с теплоизолированными границами существует критическое число Прандтля $P_*=0,671$, начиная с которого $R_{2C} > R_{1C}$ при всех значениях Re, т. е. критическими для равновесия являются монотонные возмущения.

3. Неподвижный слой ($Re=0$). Рост спиральности приводит к смещению критического волнового числа в область длинных волн [2, 3]. С другой стороны, теплоизоляция границ приводит к невыгодности вертикального конвективного переноса тепла и вследствие этого — к почти горизонтальным критическим движениям. Таким образом, в слое спиральной жидкости с теплоизолированными границами действуют два механизма, обеспечивающие существование длинноволновых критических возмущений. Причем при подогреве снизу, как показывают расчеты, равновесие нарушают монотонные возмущения с $k_{1C}=0$.

Порог устойчивости равновесия R_{1C} относительно таких возмущений ($\lambda=0$) при $Re=0$ может быть определен аналитически. Разложим собст-

венные функции задачи (1.2), (1.3) w, V, T и собственное число R в ряды по степеням k^2 :

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n k^{2n}, \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n k^{2n}$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n k^{2n}, \quad R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n k^{2n} \quad (3.1)$$

В n -м порядке получим неоднородные уравнения:

$$w_n^{IV} + \kappa V_n'' = f_n^1, \quad V_n'' - \kappa w_n'' = f_n^2 \quad (3.2)$$

$$T_n'' + w_n + S_2 V_n = f_n^3, \quad \kappa = R_0 S_1, \quad R_0 = R_{1C}$$

где правые части f_n^1, f_n^2, f_n^3 не зависят от собственных функций n -го порядка. В нулевом приближении $f_0^1=0; f_0^2=0; f_0^3=0; w_0=0; V_0=0; T_0=C=\text{const}$, а значение R_0 не определяется. В первом приближении $f_1^1=R_0 C; f_1^2=0; f_1^3=C$, а собственные функции w_1 и V_1 имеют вид

$$w_1 = -\frac{A \cos \kappa z}{\kappa^2} - \frac{B \sin \kappa z}{\kappa^2} + \frac{R_0 C Z^2}{2\kappa^2} + D z + F$$

$$V_1 = -\frac{A \cos \kappa z}{\kappa} - \frac{B \sin \kappa z}{\kappa} + \frac{R_0 C Z^2}{2\kappa} + E z + G \quad (3.3)$$

где A, B, C, D, F, E, G — постоянные, а T_1 можно отыскать, решая третье уравнение из (3.2). Граничные условия (1.3) дают систему однородных алгебраических уравнений для коэффициентов $A-G$, условие разрешимости которой приводит к трансцендентному уравнению для R_0

$$R_0 [24 + 12\kappa^2 + \kappa^4 \cos \kappa - 4\kappa^3 \sin \kappa - 24\kappa \sin \kappa - 24 \cos \kappa] +$$

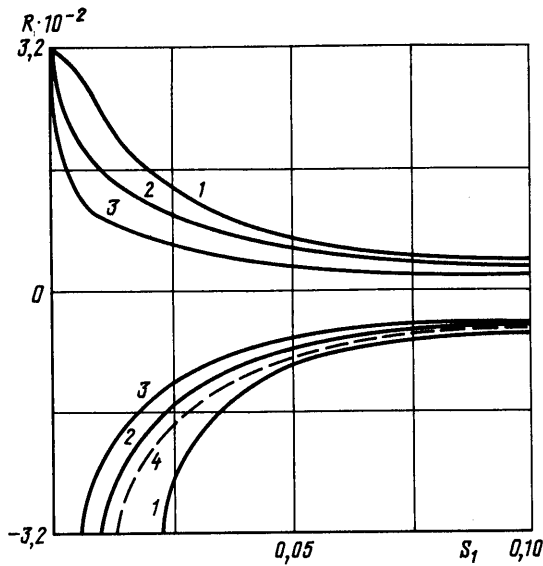
$$+ S_2 \kappa [24 + 24\kappa^2 + 3\kappa^4 - 24 \cos \kappa - 12\kappa^2 \cos \kappa - 24\kappa \sin \kappa - 16\kappa^3 \sin \kappa + 4\kappa^4 \cos \kappa] +$$

$$+ 12\kappa^5 (\cos \kappa \cdot \kappa - \sin \kappa) = 0 \quad (3.4)$$

Корень этого уравнения при $S_1=0; S_2=0$ совпадает с известным критическим значением для случая теплоизолированных границ [4] $R_{1C}=320$. При $S_1 \neq 0; S_2 \neq 0$ уравнение (3.4) решалось численно. Положительные корни соответствуют подогреву снизу, отрицательные дают порог конвекции для нагрева сверху. На фиг. 1 сплошными линиями изображено поведение критического числа R_{1C} в зависимости от параметров S_1 и S_2 : кривым 1-3 соответствуют значения $S_2=0; 0,1; 0,5$. Рост коэффициентов спиральности приводит к уменьшению $|R_{1C}|$.

При нагреве сверху ($R < 0$) в зависимости от величин S_1 и S_2 равновесие могут нарушать длинноволновые монотонные либо колебательные возмущения. Штриховая кривая 4 на фиг. 1 — граница колебательной неустойчивости при $S_2=0$. Эта граница не зависит от числа Прандтля. Частота нейтральных осцилляций ω зависит от R и стремится к нулю при $k \rightarrow 0$. В случае $S_2=0$ в точке $S_{1*}=0,097$ происходит переход от колебательной к монотонной неустойчивости. Рост параметра S_2 уменьшает S_{1*} (при $S_2=0,045, S_{1*}=0,001$).

4. Случай $S_1 \neq 0; Re \neq 0$. Вращение слоя в отличие от спирального и теплового механизмов увеличивает критическое волновое число, повышая при этом порог конвекции. Нейтральные кривые монотонных (сплошные линии) и колебательных (штриховые) возмущений при различных зна-



Фиг. 1

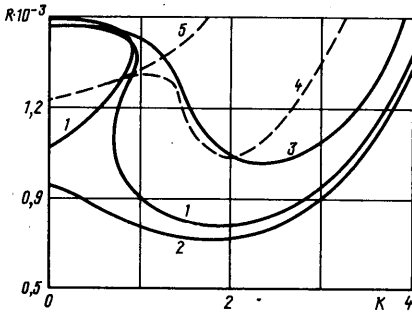
чениях Re , S_1 и P , порождаемые первыми несколькими уровнями спектра, приведены на фиг. 2, 3 ($S_2=0$). Значения параметров следующие: фиг. 2, $S_1=0,006$, кривым 1-3 соответствует $Re=28,75$; 30; 35; кривым 4-5 — $Re=100$, $P=0,025$; 1; фиг. 3, $S_1=0,010$, кривым 1-3 соответствует $Re=0$; 23; 25; 4 — $Re=23$, $P=0,025$; 5 — $Re=23$, $P=1$.

Колебательная мода зависит как от действия спирального механизма, так и от вращения. Предельное значение $R(k) \rightarrow R_{ок}$ при $k \rightarrow 0$ для колебательной нейтральной кривой сильно зависит от параметра S_1 и слабо от параметра Re (см. табл. 3). Кроме того, $R_{ок}$, как и в случае покоящегося слоя, не зависит от числа P . Не существует критического значения P_* , начиная с которого $R_{2c} > R_{1c}$ при любых Re . Эти обстоятельства, казалось бы, указывают на спиральное происхождение колебательной нейтральной кривой. С другой стороны, однако, частота нейтральных осцилляций ω при $k \rightarrow 0$ имеет конечный предел, который растет с ростом Re : $\omega \approx Re$. Переходя к размерным обозначениям, получим следующее соотношение между скоростью вращения слоя и размерной частотой нейтральных осцилляций: $\omega_p \approx 2\Omega$.

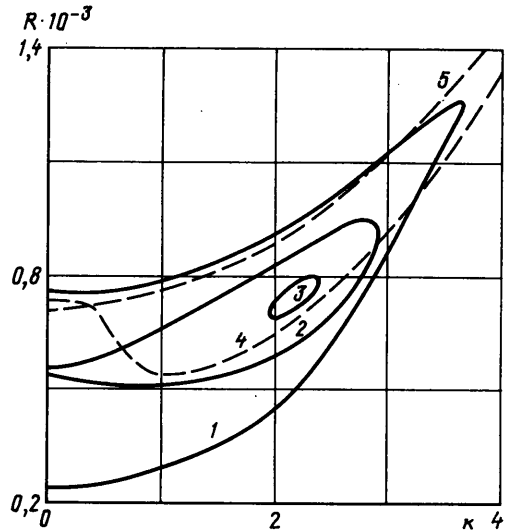
Отметим особенности нейтральных кривых $R(k)$. При $Re > Re_{1*} = f(S_1)$ критические монотонные возмущения переходят в ячеистую область $k_{1c} \neq 0$. Положение нейтральных кривых колебательных возмущений зависит от числа P : при малых числах P ($P=0,025$) минимум нейтральной кривой может располагаться как в ячеистой ($k_{2c} \neq 0$), так и в длинноволновой ($k_{2c}=0$) областях, что определяется параметрами S_1 и Re . Однако при $P=1$ значение числа Рэлея монотонно растет с k при любых параметрах S_1 и Re .

Таблица 3

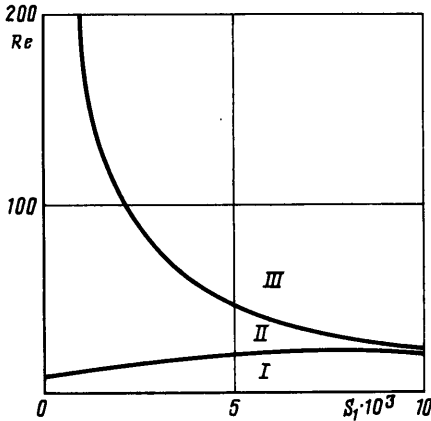
S_1	$Re=100$		200		300	
	$R_{ок} \cdot 10^{-3}$	ω	$R_{ок} \cdot 10^{-3}$	ω	$R_{ок} \cdot 10^{-3}$	ω
0,002	3,716	93,06	3,728	193,22	3,731	293,25
0,010	0,743	93,06	0,746	193,23	0,746	293,23



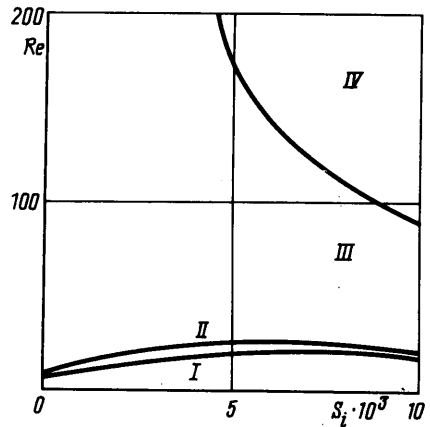
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

В результате анализа поведения нейтральных кривых при различных значениях параметров на плоскости (S_1, Re) построены карты устойчивости квазиравновесия для $P=1$ (фиг. 4) и $P=0,025$ (фиг. 5). (Значение $S_2=0$.) Области критических возмущений обозначены цифрами: I — длинноволновые монотонные; II — ячеистые монотонные; III — длинноволновые колебательные; IV — ячеистые колебательные. (На фиг. 5 обозначения для областей III и IV переставлены местами.)

Автор благодарит С. С. Моисеева за предложение темы и Г. З. Гершуни и Д. В. Любимова за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев С. С., Руткевич П. Б., Тур А. В., Яновский В. В. Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 2. С. 144–153.
2. Любимов Д. В., Смородин Б. Л. О конвективной неустойчивости плоского горизонтального слоя спиральной турбулентной жидкости: Препринт № 89. Свердловск: УрО АН СССР. Ин-т мех. сплошн. сред, 1989. 44 с.

3. *Березин Ю. А., Жуков В. П.* Конвективная неустойчивость в среде со спиральной турбулентностью // ПМТФ. 1990. № 1. С. 61–66.
4. *Гершуни Г. З., Жузовицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
5. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние. 1977. 366 с.
6. *Вубнов Б. М., Сенаторский А. О.* Влияние граничных условий на конвективную устойчивость вращающегося горизонтального слоя жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 124–129.
7. *Niiler P. P., Bishopp F. E.* On the influence of Coriolis force on onset of thermal convection // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. № 4. P. 753–765.

Пермь

Поступила в редакцию
3.IX.1990