

УДК 532.5.031

© 1992 г.

Н. Б. ИЛЬИНСКИЙ, А. В. ПОТАШЕВ

ПОСТРОЕНИЕ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ С ЗАКРЫЛКОМ, МОДЕЛИРУЕМЫМ ТОЧЕЧНЫМ ВИХРЕМ

Одним из способов улучшения аэродинамических свойств крыла, в частности увеличения подъемной силы, является его механизация. К механизированным относятся крылья с предкрылками и закрылками, основы теории которых заложены трудами С. А. Чаплыгина и В. В. Голубева [1]. Исходными для прямого аэродинамического расчета являются заданные профили основной части крыла и закрылка (предкрылка) и их расположение относительно друг друга и набегающего потока.

Другой подход к расчету механизированного крыла заключается в нахождении профиля и закрылка по заданным аэродинамическим характеристикам, например по распределениям скорости на их контурах. В случае, когда размеры закрылка малы по сравнению с размерами основного профиля, возможна замена его одиночным неподвижно закрепленным вихрем [2]. При этом интенсивность вихря принимается равной циркуляции, заданной на закрылке скорости. В таком приближении задача нахождения формы профиля по заданному распределению скорости $v(s)$ (s — дуговая абсцисса контура профиля) с общих позиций, основанных на теории обратных краевых задач, изучена М. Т. Нужиным [3]. Однако доведение решения таких задач до инженерного уровня, до численной реализации проведено не было в силу трудностей выполнения условий разрешимости.

В настоящей работе с использованием метода квазирешений обратных краевых задач (см. [4]) решена задача построения (проектирования) профиля с закрылком, заменяемым неподвижно закрепленным вихрем, по заданному распределению скорости вдоль контура профиля основной части крыла. Построены профили, сделаны выводы о влиянии закрылка (вихря) на форму и аэродинамические свойства механизированного крыла.

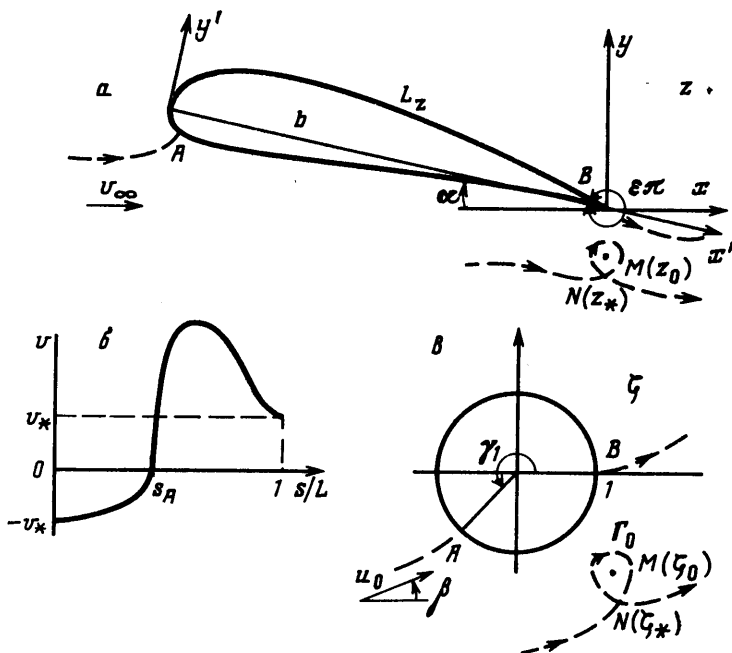
1. Постановка задачи. В плоскости z искомый непроницаемый крыловой профиль обтекается плоским установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости; контур L_z этого профиля является замкнутым и гладким, за исключением, быть может, задней кромки B , где внутренний к области течения угол равен $\varepsilon\pi$, $1 \leq \varepsilon \leq 2$ (фиг. 1, а). Скорость набегающего потока на бесконечности параллельна оси x , а ее величина v_∞ задана (всюду далее скорость безразмерная, отнесенная к v_∞). Безразмерная дуговая координата s , отнесенная к заданному периметру L контура профиля L_z , отсчитывается от $s=0$ на задней кромке до $s=1$ на ней же так, что при возрастании s вдоль L_z область течения остается слева.

Вдоль L_z задано распределение скорости потока

$$v=v(s), \quad 0 \leq s \leq 1$$

где кусочно-гладкая функция $v(s)$ обращается в нуль в точке A разветвления потока ($s=s_A$) и непрерывно дифференцируема в окрестности этой точки. Знак $v(s)$ связан с направлением обхода: $v(s) < 0$ при $0 < s < s_A$, $v(s) > 0$ при $s_A < s < 1$; $v(0) = -v_*$, $v(1) = v_*$ при $\varepsilon = 2$, $v(0) = v(1) = 0$ при $1 \leq \varepsilon < 2$ (фиг. 1, б).

Величина ε связана с поведением функции $v(s)$ в окрестности задней кромки: $v(s) \sim -C|s'|^{2/\varepsilon}/s'$, где $C = \text{const} > 0$, $s' = s$ в окрестности точки $s=0$ и $s' = s-1$ в окрестности точки $s=1$.



Фиг. 1

Требуется определить форму профиля и его гидродинамические характеристики, если в точке $M(z_0 = x_0 + iy_0)$ расположен вихрь интенсивности Γ_0 , моделирующий закрылок.

При сделанных предположениях существует комплексный потенциал течения $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где φ — потенциал скорости, ψ — функция тока, причем на L_z

$$\varphi(s) = \int_{s_A}^s v(s) ds, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (1.1)$$

а циркуляция Γ_1 скорости вокруг L_z определяется соотношением $\Gamma_1 = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi_1 - \varphi_2$.

Запишем условия краевой задачи. Требуется найти замкнутый контур L_z , ограничивающий область G_z , содержащую бесконечно удаленную точку, и аналитическую в G_z (за исключением точки $z = z_0$) функцию $w(z)$, имеющую в окрестности бесконечности представление

$$w(z) = z - (\Gamma_1 + \Gamma_0) (2\pi i)^{-1} \ln z + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$$

а в окрестности точки $z = z_0$ — представление

$$w(z) = -\Gamma_0 (2\pi i)^{-1} \ln(z - z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$$

Краевые условия имеют вид

$$\operatorname{Re} w(z)|_{L_z} = \varphi(s), \quad \operatorname{Im} w(z)|_{L_z} = 0, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (1.2)$$

Условия (1.2) совместно с (1.1) определяют в плоскости w уравнение границы двулистной области G_w , соответствующей G_z .

2. Аналитическое решение. Воспользуемся способом сопоставления плоскостей. Выберем в качестве канонической области внешность единичного круга $E^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ во вспомогательной плоскости ζ (фиг. 1, ϵ). Тогда комплексный потенциал $w(z)$ обтекания окружности ∂E^- со скоростью $u_0 e^{i\beta}$ и вихрем интенсивности Γ_0 в точке ζ_0 запишется в виде

$$w(\zeta) = u_0 \left(\frac{\zeta}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{\zeta} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta - \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - \zeta_0}{r_0(\zeta - \zeta_0^{-1})} + C_0 \quad (2.1)$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_0, \quad \zeta_0 = r_0 e^{i\gamma_0}$$

где ζ_0 — образ точки z_0 в плоскости ζ ; u_0, β, C_0 — вещественные постоянные, об определении которых будет сказано ниже.

Для дальнейшего решения задачи введем в рассмотрение аналитическую в E^- функцию

$$\chi(\zeta) = \ln(dw/dz) - \ln(\zeta - \zeta_1) - (2 - \epsilon) \ln(\zeta - 1) + \ln(\zeta - \zeta_0) + \ln(\zeta - \zeta_0^{-1}) - \ln(\zeta - \zeta_*) - \ln(\zeta - \zeta_*^{-1}) + (3 - \epsilon) \ln \zeta \quad (2.2)$$

где $\zeta_1 = e^{i\gamma_1}$ — образ точки A , $\zeta_* = r_* e^{i\gamma_*}$ — образ критической точки $N(z = z_*)$ в потоке. При $\zeta = e^{i\gamma}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \chi(e^{i\gamma}) &= S(\gamma) = \\ &= \ln \left| \frac{v(\gamma) [r_0 + 1/r_0 - 2 \cos(\gamma - \gamma_0)]}{2^{3-s} \sin[(\gamma - \gamma_1)/2] \sin^{2-s}(\gamma/2) [r_* + 1/r_* - 2 \cos(\gamma - \gamma_*)]} \right| \quad (2.3) \end{aligned}$$

Проводя сравнение функций $\varphi(s)$ и

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma) &= \operatorname{Re} w(e^{i\gamma}) = \\ &= 2u_0 \cos(\gamma - \beta) - \frac{\Gamma\gamma}{2\pi} - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{(r_0^2 - 1) \sin(\gamma - \gamma_0)}{2r_0 - (r_0^2 + 1) \cos(\gamma - \gamma_0)} + C_0 \quad (2.4) \end{aligned}$$

определим зависимость $s = s(\gamma)$, подставляя которую в $v(s)$ найдем $v(\gamma) = v(s(\gamma))$ и, следовательно, $S(\gamma)$. Тогда функция $\chi(\zeta)$ построится как решение задачи Шварца для E^- в виде

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\tau) \frac{\zeta + e^{i\tau}}{\zeta - e^{i\tau}} d\tau + i\alpha_0 \quad (2.5)$$

Из условия $\operatorname{Im} \chi(\infty) = 0$ следует $\alpha_0 = 0$. Учитывая (2.2), найдем функцию

$$z(\zeta) = \int_1^{\zeta} e^{-\chi(\zeta)} \frac{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_0^{-1}) \zeta^{3-\epsilon} w'(\zeta)}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_*) (\zeta - \zeta_*^{-1}) (\zeta - 1)^{2-\epsilon}} d\zeta$$

конформно отображающую E^- на G_z . Если в полученном выражении учесть, что $dw/d\zeta$ может быть восстановлена по ее особенностям в плоскости ζ в виде

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_0 e^{-i\beta} \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - 1)(\zeta - \zeta_*) (\zeta - \zeta_*^{-1})}{\zeta^2 (\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_0^{-1})} \quad (2.6)$$

то

$$z(\zeta) = u_0 e^{-i\beta} \int_1^{\zeta} e^{-\chi(\zeta)} (1 - \zeta^{-1})^{\epsilon-1} d\zeta \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что формула (2.7) полностью совпадает с решением [4] для изолированного профиля. Именно этим и объясняется тот факт, что условия разрешимости рассматриваемой задачи для профиля с закруткой (вихрем)

$$\int_0^{2\pi} S(\tau) e^{i\tau} d\tau = \pi(1-\varepsilon), \quad \int_0^{2\pi} S(\tau) d\tau = 0 \quad (2.8)$$

совпадают с аналогичными условиями в обратной краевой задаче аэродинамики для изолированного профиля. Таким образом, для отыскания формы замкнутого контура рассматриваемого механизированного профиля также можно применять метод квазирешений.

Перейдем теперь к вопросу об отыскании неизвестных параметров u_0 , β , C_0 , γ_1 , r_* , γ_* , r_0 , γ_0 , входящих в построенное решение. Для этого проинтегрируем сначала выражение $dw/d\zeta$ из (2.6)

$$w(\zeta) = u_0 e^{-i\beta} [(\zeta - A\zeta^{-1}) + B \ln \zeta + C \ln(\zeta - \zeta_0) + D \ln(\zeta - \zeta_0^{-1})] \quad (2.9)$$

Величины A , B , C и D связаны друг с другом соотношениями

$$A\zeta_0\zeta_0^{-1} = \zeta_1\zeta_*\zeta_*^{-1} \quad (2.10)$$

$$B+C+D - (\zeta_0 + \zeta_0^{-1}) = -(\zeta_1 + 1 + \zeta_* + \zeta_*^{-1}) \quad (2.11)$$

$$A - B(\zeta_0 + \zeta_0^{-1}) + \zeta_0\zeta_0^{-1} - C\zeta_0^{-1} + D\zeta_0 = \\ = (1 + \zeta_1 + \zeta_*)\zeta_*^{-1} + \zeta_1 + \zeta_* + \zeta_1\zeta_* \quad (2.12)$$

$$B\zeta_0\zeta_0^{-1} - A(\zeta_0 + \zeta_0^{-1}) = -[(\zeta_1 + \zeta_* + \zeta_1\zeta_*)\zeta_*^{-1} + \zeta_1\zeta_*] \quad (2.13)$$

Из сопоставления (2.1) и (2.9) видно, что

$$A = e^{2i\beta}, \quad B = \frac{ie^{i\beta}\Gamma}{2\pi u_0}, \quad C = -D = \frac{ie^{i\beta}\Gamma_0}{2\pi u_0} \quad (2.14)$$

Учитывая эти равенства, из (2.10) и (2.11) получим соотношения

$$\gamma_1 + 2(\gamma_* - \gamma_0 - \beta) = \pi \quad (2.15)$$

$$\left(r_* + \frac{1}{r_*}\right) \cos \gamma_* = \left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right) \cos \gamma_0 + \frac{\Gamma \sin \beta}{2\pi u_0} - 1 - \cos \gamma_1 \quad (2.16)$$

Если к (2.15), (2.16) добавить условия

$$\varphi'(0) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_1, \quad \varphi'(\gamma_1) = 0, \quad \varphi(\gamma_1) = 0 \quad (2.17)$$

$$z(r_0 e^{i\gamma_0}) = x_0 + iy_0 \quad (2.18)$$

то приходим к замкнутой системе для отыскания неизвестных параметров (здесь под $\varphi(\gamma)$ понимается $\operatorname{Re} w(e^{i\gamma})$ из (2.1)).

Сложность решения системы (2.15)–(2.18) обусловлена наличием уравнений (2.18). Имеет смысл рассмотреть сначала решение задачи в полуобратной постановке, считая положение точки $\zeta_0 = r_0 e^{i\gamma_0}$ в плоскости ζ заданным, а величину $z_0 = x_0 + iy_0$ отыскивать в ходе решения в виде (2.18). Тогда оставшуюся систему шести уравнений (2.15)–(2.17) удастся преобразовать к более простому виду.

Из первых двух уравнений (2.17) с учетом того, что

$$\varphi'(\gamma) = -2u_0 \sin(\gamma - \beta) - \frac{\Gamma}{2\pi} - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \frac{r_0^2 - 1}{2r_0 \cos(\gamma - \gamma_0) - r_0^2 - 1} \quad (2.19)$$

имеем

$$u_0 = [\Gamma - \Gamma_0(r_0^2 - 1)(r_0^2 + 1 - 2r_0 \cos \gamma_0)^{-1}](4\pi \sin \beta)^{-1} \quad (2.20)$$

$$C_0 = \varphi_1 - 2u_0 \cos \beta + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{(r_0^2 - 1) \sin \gamma_0}{(r_0^2 + 1) \cos \gamma_0 - 2r_0} \quad (2.21)$$

Подставляя полученные выражения для u_0 и C_0 в оставшиеся два уравнения (2.17), будем иметь

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{\sin \gamma_1}{\cos \gamma_1 - \Phi(\gamma_1)/\Phi(0)} \quad (2.22)$$

$$-\left[\Gamma \gamma_1 + \Gamma_0 \operatorname{arctg} \frac{(r_0^2 - 1) \sin(\gamma_1 - \gamma_0)}{2r_0 - (r_0^2 + 1) \cos(\gamma_1 - \gamma_0)} - 2\pi C_0 \right] \sin \gamma_1 = 0 \quad (2.23)$$

$$\Phi(\gamma) = \Gamma - \Gamma_0 (r_0^2 - 1) [r_0^2 + 1 - 2r_0 \cos(\gamma - \gamma_0)]^{-1}$$

Учитывая, что при заданных значениях r_0 и γ_0 величина C_0 зависит только от β (см. (2.21)), которая в свою очередь является функцией γ_1 (см. (2.22)), получим, что выражение (2.23) является уравнением для отыскания γ_1 . После нахождения γ_1 величина β вычисляется по формуле (2.22), C_0 — по (2.21), u_0 — по (2.20). Значение γ_* с учетом (2.15) определяется в виде

$$\gamma_* = \gamma_0 + \beta - \gamma_1/2 + \pi/2 \quad (2.24)$$

а r_* отыскивается из (2.16)

$$r_* = 0,5 (\delta_* + \sqrt{\delta_*^2 - 4}) \quad (2.25)$$

$$\delta_* = \frac{1}{\cos \gamma_*} \left[\left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \cos \gamma_0 + \frac{\Gamma \sin \beta}{2\pi u_0} - 1 - \cos \gamma_1 \right] \quad (2.26)$$

Таким образом, в принятой полуобратной постановке отыскание неизвестных параметров сводится к решению одного нелинейного уравнения (2.23) с последующим вычислением оставшихся параметров по формулам (2.22), (2.21), (2.20), (2.24) — (2.26). При этом координаты точки $M(z_0)$ в физической плоскости определяются по формуле (2.18) после решения задачи с применением метода квазирешений. Время расчета описанного полуобратного подхода на ЭВМ ЕС-1045 (программа написана на языке FORTRAN) составляет 1–2 с.

Для решения задачи в прямой постановке разработана итерационная процедура отыскания r_0 и γ_0 , являющихся решением уравнений (2.18) при заданных x_0 и y_0 . Как показали результаты расчетов, для достижения точности в вычислении x_0 и y_0 порядка $b \cdot 10^{-5}$ (b — длина хорды профиля) необходимо 5–10 итераций, каждая из которых является решением задачи в полуобратной постановке.

Решение при наличии предкрылка отыскивается аналогично.

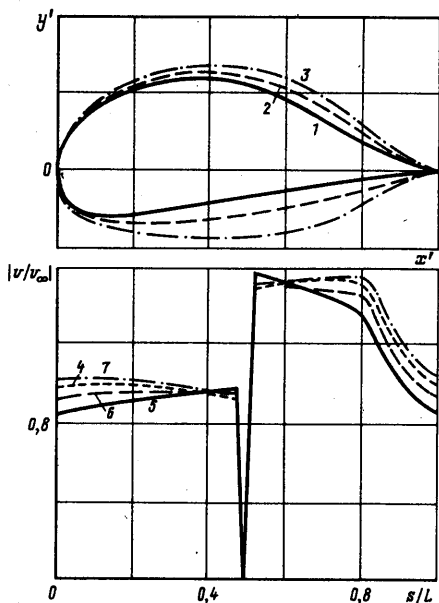
3. Результаты расчетов. При проведении расчетов задавались распределение скорости $v(s)$, $s \in [0, 1]$, величины v_∞ , $\Gamma_0' = \Gamma_0 / (v_\infty L)$ и координаты $z_0' = x_0' + iy_0'$ точки M в системе координат, связанной с хордой профиля ($z' = (z/b) \exp(i\alpha) + 1$, α — угол атаки (фиг. 1, а)). При этом исходное распределение скорости (сплошная кривая 4 на фиг. 2), выбранное из условия безотрывного обтекания, во всех примерах оставалось неизменным, а величины Γ_0' , x_0' и y_0' варьировались.

Отметим, что задание координат закрылка в плоскости z' приводит к замене уравнения (2.18) уравнением

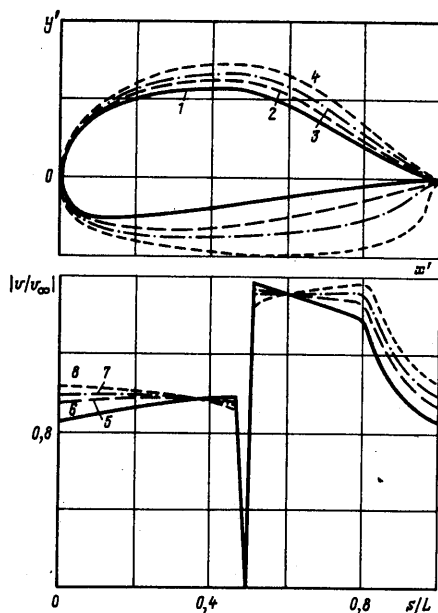
$$z(r_0 e^{i\gamma_0}) = b(x_0' - 1 + iy_0') e^{-i\alpha}$$

что в силу разработанного способа отыскания неизвестных параметров не вносит дополнительных трудностей в численное решение.

Результаты расчетов, показывающие влияние на форму профиля изменения интенсивности Γ_0' вихря при фиксированных значениях $x_0' = 1$ и $y_0' = -0,1$, приведены на фиг. 2 (здесь и на фиг. 3, 4 вертикальные размеры у профилей для нагляд-



Фиг. 2



Фиг. 3

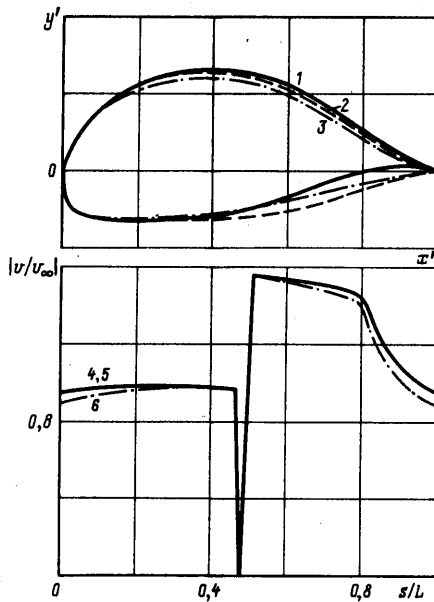
ности увеличены в 2 раза) и в таблице, где $t' = (t/b) \cdot 100\%$, t — толщина профиля, C_y — коэффициент подъемной силы, $v_*' = v_*/v_\infty$ — относительная скорость в задней кромке профиля. Контур 1 и соответствующее ему распределение скорости (кривая 5) получены для $\Gamma_0' = 0$ (т. е. при отсутствии вихря); контур 2 и кривая 6 — для $\Gamma_0' = 0,05$; контур 3 и кривая 7 — для $\Gamma_0' = 0,1$. Из сопоставления этих результатов видно, что с увеличением Γ_0' происходит увеличение толщины профиля. При этом также наблюдается возрастание C_y при одновременном уменьшении α .

На фиг. 3 (и ниже) показано изменение формы профилей (контур 1-4) и соответствующих распределений $v(s)$ (кривые 5-8) при приближении вихря с заданным значением $\Gamma_0' = 0,05$ к задней кромке профиля по вертикальной прямой $x_0' = 1$. Здесь контур 1 и кривая 5 построены для $y_0' = \infty$, контур 2 и кривая 6 — для $y_0' = -0,1$, контур 3 и кривая 7 — для $y_0' = -0,05$, контур 4 и кривая 8 — для $y_0' = -0,025$. Анализ результатов показывает, что в этом случае уменьшение $|y_0|$ приводит к изменениям контура профиля и его характеристик, аналогичным изменениям контура профиля при увеличении Γ_0' .

При смещении вихря с $\Gamma_0' = 0,05$ параллельно хорде профиля по прямой $y_0' = -0,1$ (см. фиг. 4 и приведенные ниже данные) аэродинамические характеристики меняются слабо, однако форма профилей, особенно вблизи задней кромки, изменяется сильно. Здесь контур 7 и кривая 4 построены для $x_0' = 0,9$, контур 2 и кривая 5 — для $x_0' = 1$, контур 3 и кривая 6 — для $x_0' = 1,1$.

Из рассмотрения приведенных результатов также можно заметить, что при приближении вихря к контуру профиля (или при увеличении Γ_0') величина v_* ско-

Фигура	Контур	Кривая	t' , %	α°	C_y	v_*'
2	1	5	16,00	4,24	0,88	0,86
	2	6	18,53	1,83	1,12	0,94
	3	7	21,55	-0,74	1,39	1,04
3	1	5	16,00	4,24	1,08	0,86
	2	6	18,53	1,83	1,12	0,94
	3	7	20,51	1,04	1,14	0,99
	4	8	23,61	0,44	1,18	1,05
4	1	4	18,23	2,33	1,13	0,95
	2	5	18,53	1,83	1,12	0,94
	3	6	17,00	2,21	1,10	0,90



Фиг. 4

рости в задней кромке профилей, построенных в результате применения метода квази-решений, растет и может даже превышать v_{∞} , т. е. применение закрылка дает возможность увеличивать C_x не только за счет сил, действующих на него, но и путем увеличения уровня скоростей на верхней поверхности основного профиля с сохранением безотрывного характера обтекания.

Подводя итог изложенному, заметим, что предложенный и численно реализованный метод позволяет отыскивать форму гарантированно замкнутых крыловых профилей при наличии у них закрылка (предкрылка), моделируемого вихрем. Решение этой задачи дает первое приближение более общей задачи нахождения формы профиля и закрылка по заданным на них распределениям скоростей. Естественно, что удовлетворительные результаты будут получаться, когда размеры закрылка малы. Для более полного учета его размеров следует рассматривать и более сложные способы моделирования закрылка. При этом перспективными являются постановки, в которых закрылок заменяется криволинейным разрезом или замкнутой кривой с распределенными на них особенностями. Такой подход позволит сохранить одно-связность области течения и, следовательно, работоспособность метода квази-решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С. А., Голубев В. В. К теории предкрылка и закрылка // Тр. ЦАГИ. 1935. Вып. 171. 39 с.
2. Голубев В. В. Труды по аэродинамике. М.; Л.: Гостехиздат, 1957. 979 с.
3. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.
4. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Погашев А. В. Построение крыловых профилей методом квази-решений обратных краевых задач // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 5-13.

Казань

Поступила в редакцию
15.II.1990